CARL S. HERZ

Une ébauche d'une théorie générale des fonctions définies-négatives

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A2_0>

UNE ÉBAUCHE D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS DÉFINIES-NÉGATIVES

par Carl S. HERZ [1]

1. Le cadre.

On note $C(S)$ l'algèbre de toutes les applications de l'ensemble non-vide S dans le corps complexe C, munie de la topologie simple $(C(S) = C^S)$. Soit G un ensemble quelconque non-vide. $Q(G)$ désignera le sous-ensemble de $C(G \times G)$ constitué par les fonctions φ telles que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i , x_j)\, c_i \overline{c}_j \geqslant 0 \tag{Q}$$

quels que soient le nombre naturel n, les nombres complexes $c_1 , \ldots , c_n$, et les points $x_1 , \ldots , x_n$ de G. On prouve aisément la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - $Q(G)$ <u>est une semi-algèbre complète qui contient toutes les constantes positives mais aucune autre constante.</u>

(C'est-à-dire que $Q(G)$ est stable pour l'addition, la multiplication, la conjugaison complexe, et les limites simples de $C(G \times G)$, et qu'une fonction constante appartient à $Q(G)$ si et seulement si elle est $\geqslant 0$.)

PROPOSITION 2. - <u>Il y a une correspondance biunivoque entre les éléments de</u> $Q(G)$ <u>et les classes d'équivalence unitaire d'applications de</u> G <u>dans un espace hilbertien, à savoir</u>

$$\varphi \longleftrightarrow h : G \to H$$

si

$$\varphi(x , y) = \langle hx , hy \rangle$$

<u>où</u> $\langle\ ,\ \rangle$ <u>désigne le produit intérieur de l'espace</u> H.

On peut associer à chaque élément de $Q(G)$ un <u>mouvement</u> [2] <u>brownien</u> de la manière suivante. Etant donné $\varphi \in Q(G)$ correspondant à $h : G \to H$, nous pouvons considérer l'espace hilbertien H comme un espace de variables aléatoires à valeurs complexes dont les distributions sont gaussiennes de moyenne zéro et variance égale à la norme hilbertienne. En ce cas, un ensemble de variables est

---

[1] Boursier de la fondation Alfred P. Sloan.

[2] Ici j'entends "mouvement" ou "processus" au sens de FRÉCHET et LÉVY et non pas au sens de fonction stochastique.

indépendant si et seulement si les variables sont orthogonales deux à deux. L'élément $\varphi \in Q(G)$ s'identifie à la fonction de corrélation du système de variables gaussiennes. L'ensemble G joue le même rôle que joue le temps pour les processus stochastiques ordinaires. Donc, on peut exprimer la proposition 2 sous forme probabiliste.

PROPOSITION 2 bis. - <u>Il y a correspondance biunivoque entre les éléments de $Q(G)$ et les mouvements browniens complexes paramétrés par</u> G.

On voit aisément que les opérations binaires de la semi-algèbre $Q(G)$ correspondent aux opérations analogues pour les mouvements browniens indépendants. La relation d'ordre est un peu plus compliquée. Supposons φ , $\varphi' \in Q(G)$ et $h_\varphi : G \to H$ une application de G dans un sous-ensemble total de H qui correspond à φ. Pour que $\varphi - \varphi' \in Q(G)$, il faut et il suffit qu'il existe un opérateur hermitien positif T , de norme ≤ 1 , tel que

$$\varphi'(x , y) = \langle Th_\varphi x , h_\varphi y \rangle \quad .$$

L'opérateur T dépend de h_φ et de l'espace H et non pas seulement du mouvement brownien associé. Il s'en suit que, si G possède au moins deux points, $Q(G)$ n'est pas réticulé dans son ordre naturel. Appelons <u>caractère</u> de G un élément $\chi \in Q(G)$ de la forme $\chi(x , y) = k(x)\,\overline{k}(y)$ où k est un élément non-trivial de $C(G)$. Il est évident que les éléments extrémaux du cône $Q(G)$ sont les caractères et que les caractères correspondent aux applications non-triviales de G dans un espace hilbertien à une dimension. Autrement dit, les mouvements browniens extrémaux sont ceux du type $x \to k(x)u$ où u est une variable gaussienne réduite.

Remarquons que à $\varphi \in Q(G)$ est associé un écart,

$$d_\varphi(x , y) = \|h_\varphi x - h_\varphi y\| \quad ,$$

sur l'ensemble G. Si l'on suppose G muni d'une topologie $\mathfrak{T}$, alors φ est une fonction continue sur $G \times G$ si et seulement si l'écart d_φ est continu par rapport à $\mathfrak{T}$. Donc il n'y a pas de raison d'imposer a priori les topologies sur l'ensemble G pour l'étude des mouvements browniens. Au contraire, quel que soit l'ensemble de mouvements browniens donnés d'avance, une (pseudo-) topologie naturelle, toujours compatible avec une structure uniforme, s'impose sur G.

On est amené à choisir un point distingué $O \in G$, l'origine, et à se borner à la considération des mouvements browniens pour lesquels $hO = 0$. Notons $Q_0(G)$ l'ensemble des $\varphi \in Q(G)$ tels que $\varphi(x , O) \equiv 0$. Alors, il existe un sous-ensemble $N_0(G)$ de $C(G \times G)$ et une surjection $N_0(G) \to Q_0(G)$ tels qu'un écart d

s'associe à un mouvement brownien réel si et seulement si $d^2 \in N_0(G)$ et que l'application $\varphi \to d^2_\varphi$, restreinte aux fonctions réelles de $Q_0(G)$, est l'inverse de la surjection donnée. Précisons : on note $N(G)$ le sous-ensemble de $C(G \times G)$ constitué par les fonctions ψ telles que

$$\text{(N)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \psi(x_i , x_j)\, c_i\, \bar{c}_j \leqslant 0$$

quels que soient le nombre naturel n , les nombres complexes $c_1 , \dots , c_n$ satisfaisant à la condition

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = 0 \qquad ,$$

et les points $x_1 , \dots , x_n \in G$. Etant donné $\psi \in C(G \times G)$, on définit $\tilde{\psi} \in C(G \times G)$ par

$$2\tilde{\psi}(x , y) = - \psi(x , y) + \psi(x , \mathcal{O}) + \psi(\mathcal{O} , y) - \psi(\mathcal{O} , \mathcal{O}) \qquad .$$

On a :

PROPOSITION 3. - <u>Pour que</u> $\psi \in N(G)$ <u>il faut et il suffit que</u> $\tilde{\psi} \in Q(G)$.

Disons que $\psi \in N(G)$ est <u>réduit</u> si, en outre

$$\psi(x , y) = \bar{\psi}(y , x) \quad , \qquad \psi(x , x) \equiv 0 \qquad .$$

On appelle <u>forme linéaire</u> une fonction $\xi \in C(G \times G)$ ayant la forme

$$\xi(x , y) = f(x) - f(y)$$

où $f \in C(G)$, et on appelle <u>dégénérée</u> une fonction $C \in C(G \times G)$ de la forme $C(x , y) = g(x) + g(y)$, $g \in C(G)$.

PROPOSITION 4. - <u>Chaque élément</u> $\theta \in N(G)$ <u>s'exprime de façon unique sous la forme</u>

$$\theta = c + \xi + \psi \qquad ,$$

<u>où</u> c <u>est une fonction dégénérée,</u> ξ <u>est une forme linéaire</u> **<u>réelle,</u>** <u>et</u> ψ <u>est un élément réduit de</u> $N(G)$.

$N_0(G)$ désigne le cône des éléments réduits de $N(G)$. Ce cône contient l'hyperplan réel constitué par les formes linéaires imaginaires.

PROPOSITION 5. - <u>L'application</u> $\psi \to \tilde{\psi}$ <u>est un épimorphisme du cône</u> $N_0(G)$ <u>sur le cône</u> $Q_0(G)$ <u>dont le noyau se compose de toutes les formes linéaires imaginaires.</u>

Le point essentiel de la démonstration est de prouver que $\psi \to \tilde{\psi}$ soit surjective. Or, étant donné $\varphi \in Q_0(G)$ on pose

$$\psi(x , y) = \varphi(x , x) + \varphi(y , y) - 2\varphi(x , y) .$$

Alors, $\psi \in N_0(G)$ et $\tilde{\psi} = \varphi$.

On s'est intéressé aux fonctions appartenant à $N(G)$ (fonctions définies-négatives) à cause du rapport avec les éléments de $Q(G)$ (fonctions définies-positives) donné par le corollaire suivant des propositions 1 et 3.

PROPOSITION 6. - Soit $\psi \in C(G \times G)$. Pour que $\exp(- t\psi) \in Q(G)$ pour chaque $t > 0$ il faut et il suffit que ψ soit un élément hermitien de $N(G)$.

Si G est un groupe, les éléments de $C(G)$ s'identifient aux éléments homogènes de $C(G \times G)$, c'est-à-dire aux fonctions $\varphi \in C(G \times G)$ satisfaisant à :

$$(H) \qquad \varphi(z + x , z + y) = \varphi(x , y)$$

quels que soient $x , y , z \in G$ (Nous notons toujours l'opération binaire d'un groupe par $+$). Dans le cas où G est un groupe commutatif localement compact, on déduit, de la proposition 6 et de l'analyse harmonique, qu'il existe une correspondance biunivoque entre les semi-groupes de probabilités sur le groupe dual et les éléments continus de $HN_0(G)$, les fonctions définies-négatives homogènes réduites. Ce fait a donné lieu à l'intérêt initial de la théorie de fonctions définies-négatives pour la théorie de probabilité. Cependant, on aura une théorie plus maniable et plus fructueuse en poursuivant l'étude des mouvements browniens à laquelle la théorie des fonctions définies-négatives peut se voir subordonnée par la proposition 5 (3).

2. Cas général d'un groupe.

On suppose désormais que G soit doué d'une opération binaire $+$, pour laquelle il est un groupe. Le point distingué Θ sera toujours l'élément neutre du groupe. En ce cas il y a un sous-ensemble $UQ(G) \subset Q_0(G)$ correspondant aux mouvements browniens stationnaires : un élément $\varphi \in Q(G)$ appartient à $UQ(G)$ si et seulement s'il satisfait à la condition

$$(U) \quad \varphi(x + y , x + z) - \varphi(x + y , x) - \varphi(x , x + z) + \varphi(x , x) = \varphi(y , z)$$

quels que soient $x , y , z \in G$.

(3) De toute façon les formes linéaires imaginaires nous gêneront. Suivant le chemin que nous avons indiqué, on évite les difficultés jusqu'au point où on passe des mouvements browniens aux fonctions négatives-définies.

Cette condition équivaut à l'énoncé suivant concernant le mouvement brownien associé à φ : la distribution jointe des variables $h(x+y) - hx$ et $h(x+z) - hx$ est identique à celle des variables hy et hz. En termes plus pittoresques : les distributions jointes de couples d'accroissements, partant du même temps initial, ne dépendent pas du temps initial. Dans le cas de mouvements browniens réels il suffit de constater que $\|hx - hy\| = \|h(x-y)\|$ pour en conclure que le mouvement brownien est stationnaire, mais dans le cas de mouvements browniens complexes, il faut en général considérer les distributions jointes de couples.

Soit $h : G \to H$ une application du groupe G sur un sous-ensemble total de l'espace hilbertien H. Posons

$$U_x\, hy = h(x+y) - hx \quad .$$

PROPOSITION 7. - Pour que $h : G \to H$ soit stationnaire, il faut et il suffit que $\{U_x : x \in G\}$ s'étende à une représentation unitaire de G dans H.

Nous signalons que l'application $\psi \to \tilde{\psi}$ donne lieu à un homomorphisme du cône $HN_0(G)$ dans $UQ(G)$ (voir la proposition 5), mais cet homomorphisme ne reste plus surjectif. Son noyau se compose de toutes les formes linéaires homogènes imaginaires.

Deux problèmes importants se présentent immédiatement : analyser la structure du cône $UQ(G)$ et trouver l'image de $HN_0(G)$ dans $UQ(G)$. En ce qui concerne les points extrémaux de $UQ(G)$, on a tout de suite un résultat partiel.

PROPOSITION 8. - Pour que φ soit un élément extrémal du cône $UQ(G)$ il faut et il suffit que les représentations unitaires, $\{x \to U_x\}$, associées soient irréductibles.

3. Groupes commutatifs.

Dorénavant on suppose le groupe G commutatif. On appelle gaussien un élément $\gamma \in UQ(G)$ tel que l'application $h_\gamma : G \to H$ soit un homomorphisme. Dans ce cas la représentation $x \to U_x$ est triviale. Vu comme élément de $C(G \times G)$, γ est une fonction bilinéaire.

Chaque élément $\varphi \in UQ(G)$ possède une partie gaussienne ainsi définie. Soit $h_\varphi : G \to H_\varphi$ associé à φ. Notons H_g le sous-espace de H_φ constitué par les éléments fixes sous l'action de tous les U_x, $x \in G$. Soit F la projection orthogonale de H_φ sur H_g. La partie gaussienne de φ est φ_g où

$$\varphi_g(x , y) = \langle Fh_\varphi x , h_\varphi y\rangle \quad .$$

PROPOSITION 11. – $Fhx = \lim_{n\to\infty} n^{-1} h(nx)$.

Démonstration. – Donons-nous un nombre naturel n et $x \in G$. Posons

$$T_n(x) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} U_x^h \quad .$$

D'après le théorème ergodique, pour chaque x , $T_n(x)$ converge fortement vers une projection E_x . De plus, on a

$$E_x\, hx = \lim_{n\to\infty} n^{-1} h(nx) \quad ,$$

cette limite existant dans H . Il reste à démontrer que $Fhx = Ex\, hx$. Il est évidemt que $F \subset E_x$ et que $E_x U_y = U_y E_x$ quel que soit $y \in G$. (C'est à ce moment que la commutativité de G intervient pour la première fois.) Pour (U) ,

$$U_y\, hx = U_x\, hy + hx - hy \quad .$$

Donc

$$U_y E_x\, hx = E_x U_y\, hx = E_x U_x\, hy + E_x\, hx - E_x\, hy = E_x\, hx \quad ,$$

ce qui entraîne que $E_x h_x$ soit laissé fixe par U_y . Alors y était arbitraire, et l'énoncé s'en déduit.

Comme corollaire, on trouve :

THÉORÈME 1. – Soit G un groupe commutatif. Le cône UQ(G) est une somme directe

$$UQ(G) = \Gamma(G) \oplus \tilde{N}(G)$$

où $\Gamma(G)$ désigne le cône complet constitué par les éléments gaussiens de UQ(G) tandis que $\lim_{n\to\infty} n^{-2} \varphi(nx , ny) = 0$ pour chaque φ appartenant au cône $\tilde{N}(G)$.

Démonstration. – Etant donné $\varphi \in UQ(G)$, on pose

$$\varphi = \varphi_g + \varphi_p \quad ,$$

$$\varphi_p(x , y) = \langle (I - F)hx , hy\rangle$$

d'où il suit que

$$\varphi_p \in UQ(G) \quad .$$

D'autre part, d'après la proposition précédente,

$$\varphi_g(x , y) = \lim_{n\to\infty} n^{-2} \varphi(nx , ny) \quad .$$

L'application $\varphi \to \varphi_g$ est donc linéaire.

On arrive maintenant à un résultat remarquable.

THÉORÈME 2. - $\widetilde{N}(G)$ <u>est réticulé dans son ordre naturel.</u>

<u>Démonstration.</u> - La comparaison d'éléments de $Q(G)$ revient à la comparaison d'opérateurs hermitiens sur un espace hilbertien. Lorsqu'il s'agit d'éléments de $UQ(G)$, interviennent seulement des opérateurs commutant avec la représentation convenable $x \to U_x$. Pour être précis, donnons-nous φ_1, $\varphi_2 \in \widetilde{N}(G)$, et posons $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Or il existe des opérateurs A_1, A_2, uniquement déterminés, tels que

$$\varphi_i(x , y) = \langle A_i \, hx , hy \rangle$$

où $h : G \to H$ est une application de G sur un sous-ensemble total de H qui correspond à φ. De plus $A_i U_x = U_x A_i$ pour chaque $x \in G$, $i = 1 , 2$. Pour démontrer l'existence d'une plus petite borne supérieure (ou d'une plus grande borne inférieure) pour φ_1 et φ_2 il suffit de le démontrer pour A_1 et A_2. Moyennant des techniques connues on y parviendra si on peut prouver que A_1 et A_2 commutent entre eux. Il suffit donc d'établir le lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Soient</u> $\varphi \in \widetilde{N}(G)$ <u>et</u> $h : G \to H$, $x \to U_x$ <u>une application de</u> G <u>sur un sous-ensemble total de</u> H <u>et la représentation de</u> G <u>dans</u> H <u>correspondante. Alors l'algèbre de tous les opérateurs bornés sur</u> H, <u>commutant avec les</u> U_x, $x \in G$, <u>est commutative.</u>

Ce lemme se démontre au moyen du lemme 2.

LEMME 2. - <u>Si</u> $\varphi \in \widetilde{N}(G)$, <u>alors</u> $(I - E_x)H_\varphi$ <u>est le plus petit sous-espace invariant (sous l'action de tous les</u> U_y, $y \in G$) <u>qui contient</u> hx.

<u>Démonstration.</u> - L'hypothèse $\varphi \in \widetilde{N}(G)$ entraîne que $E_x \, hx = 0$. Or il suffit de prouver que $\langle U_y \, hx , u \rangle = 0$, pour chaque $y \in G$, entraîne $U_x u = u$. Remarquons que

$$[I - U(-x)]hy = [U(y - x) - U(-x)]hx \quad .$$

On a supposé u orthogonal au terme de droite de cette équation. Donc,

$$0 = \langle [I - U_x^*(x)]hy , u \rangle = \langle hy , [I - U_x]u \rangle \quad .$$

Puisque $[I - U_x]u$ est orthogonal à hy quel que soit $y \in G$, il en résulte que $U_x u = u$.

Le lemme 1 en résulte aisément. Supposons que A et B commutent avec tous les U_y, $y \in G$. Alors ils commutent forcément avec $I - E_x$. D'après le lemme 2, hx

est un vecteur cyclique de $(I - E_x)H_\varphi$ sous l'action des U_y. Ceci entraîne $A_x B_x = B_x A_x$ où

$$A_x = (I - E_x)\, A(I - E_x) \; ; \quad B_x = (I - E_x)\, B(I - E_x) \quad .$$

Or,

$$ABhx = A_x B_x hx = B_x A_x hx = BAhx \quad .$$

Les hx constituant un ensemble total, $AB = BA$.

D'après la proposition 8 et le fait qu'une représentation unitaire irréductible d'un groupe commutatif est à une dimension, on prouve aisément le théorème 3.

THÉORÈME 3. - Soit G un groupe commutatif. Les éléments extrémaux de $UQ(G)$ sont ou bien de la forme

$$\varphi(x , y) = (\mathfrak{J}x)(\overline{\mathfrak{J}y})$$

où $\mathfrak{J} : G \to C$ est un homomorphisme du groupe G dans le groupe additif des nombres complexes, ou bien de la forme

$$\varphi(x , y) = \mu[1 - \chi(x)][1 - \overline{\chi}(y)]$$

où $\mu > 0$ et χ est un caractère du groupe G.

Il en résulte que l'application $\psi \to \tilde{\psi}$ applique $HN_0(G)$ sur les éléments $\varphi \in UQ(G)$ tels que

$$\varphi_g(x , y) = \varphi_g(- y , - x) \quad .$$

Par ailleurs, une conséquence banale du théorème spectral pour les groupes d'opérateurs unitaires sur un espace hilbertien est la proposition suivante :

PROPOSITION 12. - Soit $\varphi \in \tilde{N}(G)$. Soit B le complément de l'origine dans le groupe compact dual au groupe discret G. Il existe une mesure de Radon positive μ, et une seule, définie sur B telle que

$$\varphi(x , y) = \int_B [1 - \chi(x)][1 - \overline{\chi}(y)]\; \mu(d\chi) \quad .$$

La proposition 12 n'est pas le théorème de représentation des lois infiniment divisibles de Paul LÉVY. Pour y parvenir il faut montrer que la mesure μ est en fait portée par un sous-ensemble convenable de B. Il n'y a aucune difficulté si la topologie $\mathfrak{J}_\varphi$ associée à φ est localement compacte. En ce cas, grâce à l'analyse harmonique, on montre que μ est portée par l'ensemble des caractères continus par rapport à $\mathfrak{J}_\varphi$.

Le problème général soulève une question intéressante : on se donne un écart invariant, $d(x,y) = \delta(x - y)$, par exemple $\delta(x) = \varphi^{1/2}(x , x)$. Soit Q_δ le cône constitué par les éléments $\theta \in UQ(G)$ tels que $|\theta(x , y)| \leq M_\theta\, \delta(x)\, \delta(y)$ où M_θ ne dépend que de θ. Ce cône est faiblement complet et, si

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\, \delta(nx) = 0 \quad \text{pour chaque } x \in G ,$$

il est réticulé. Ses éléments sont évidemment des fonctions continues par rapport à l'écart δ (4). On se demande s'il existe un ensemble B_δ, réunion dénombrable de compacts de B, lié naturellement avec l'écart δ, tel que pour chaque $\varphi \in Q_\delta$ la mesure μ qui intervient dans la représentation donnée par la proposition 12 ait la propriété $\mu(CB_\delta) = 0$, et, bien sûr, tel que B_δ soit petit par rapport à B suivant la faiblesse de δ. On sait qu'en général on ne peut pas imposer que tous les caractères de B_δ soient continus.

Ce problème me semble être un exemple important des problèmes typiques d'analyse concernant des cônes dépourvus de base compacte.

4. Lois stables.

Seules des modifications très légères sont nécessaires si l'on suppose ci-dessus que G est un espace homogène. Ici on suppose qu'en plus de la structure de groupe de G, on se donne un groupe Λ d'automorphismes de G. Soit $\alpha : \Lambda \to R^+$ un multiplicateur du groupe Λ. (Pour distinguer les opérations de Λ et de G nous noterons celui de Λ multiplicativement.) Un mouvement brownien stationnaire, $h : G \to H$, sera dit stable d'ordre α par rapport à Λ si, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe un opérateur unitaire D_λ sur H tel que

$$D_\lambda\, hx = \alpha^{-1/2}(\lambda)\, h(\lambda x)$$

pour chaque $x \in G$. Les U_x et D_λ ensemble engendrent une représentation unitaire du produit semi-direct de Λ par G. La condition que les D_λ existent s'exprime en termes de $\varphi \in UQ(G)$ par

$$\text{(D)} \qquad \varphi(\lambda x , \lambda y) = \alpha(\lambda)\, \varphi(x , y)$$

pour chaque $\lambda \in G$ et chaque $x , y \in G$. Notons $UQ(G , \Lambda , \alpha)$ le sous-cône de $UQ(G)$ ainsi déterminé. Les raisonnements du numéro 3 restent valables. On a

---

(4) On peut toujours supposer que δ est une vraie métrique car l'ensemble des x pour lesquels $\delta(x) = 0$ constitue un sous-groupe de G, et on passe facilement au groupe quotient.

THÉORÈME 4. - $UQ(G, \Lambda, \alpha)$ est un cône faiblement complet dont les éléments extrémaux correspondent aux représentations unitaires irréductibles du groupe ΛG. Si $UQ(G, \Lambda, \alpha) \subset \tilde{N}(G)$, alors $UQ(G, \Lambda, \alpha)$ est réticulé dans son ordre naturel.

Le cas classique est celui où G est un espace réel à un nombre fini de dimensions, $\Lambda = R^+$ est le groupe des homothéties de G, et $\alpha(\lambda) = \lambda^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$. Dans ce cas, $UQ(G, \Lambda, \alpha)$ a une base compacte et les représentations irréductibles de ΛG sont toutes induites par celles de G, les élément extrémaux de $UQ(G, \Lambda, \alpha)$ sont les φ de la forme

$$\varphi(x, y) = \int_0^\infty [1 - \chi(\lambda x)][1 - \overline{\chi}(\lambda y)] \lambda^{-1-\alpha} d\lambda ,$$

χ étant un caractère de G.

S'il s'agit des espaces vectoriels de dimension infinie le problème fondamental reste ouvert. Je conjecture ce qui suit.

CONJECTURE. - Soit G un espace de Banach réel. Soit $1 \leqslant p \leqslant 2$. Pour que G soit équivalent à un sous-espace fermé d'un espace $L^p(\Omega, dp)$ il faut et il suffit que la fonction $\|x\|^p$ soit définie-négative.

Remarques. - La nécessité est banale. La conjecture est vraie si l'espace n'a qu'un nombre fini de dimensions et elle est toujours valable si $\alpha = 2$. Dans ce dernier cas il suffit de prendre (Ω, dp) l'espace de probabilité sur lequel le mouvement brownien (G est lui-même un espace hilbertien) est défini.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE. - Le lecteur est prié d'utiliser la référence, fondamentale dans tout ce sujet :

LÉVY (Paul). - Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Monographies des Probabilités, 1).