Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Gabriel Mokobodzki

Barycentres généralisés

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 2 (1961-1962), exp. nº 13 bis, p. 10-21
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A9_0>

BARYCENTRES GÉNÉRALISÉS

par Gabriel MOKOBODZKI

1. Le théorème de Hahn-Banach.

L'outil essentiel de cette étude est le théorème de Hahn-Banach que nous utiliserons sous la forme suivante :

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, H un sous-espace vectoriel de E. Soit p une application de E dans $\mathbb{R}$, telle que

1. $$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ , \quad \forall \ x \ , y \in E \quad .$$

2. $$p(\lambda x) = \lambda p(x) \ , \quad \forall \ \lambda \geq 0 \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

On dira que p est une application sous-linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 1. - Toute forme linéaire ν_1 sur H telle que

$$\nu_1(x) \leq p(x) \ , \quad \forall \ x \in H$$

admet un prolongement ν à E tout entier tel que

$$\nu(x) \leq p(x) \ , \quad \forall \ x \in E \quad .$$

On va chercher des conditions pour que ce prolongement soit unique.

LEMME 1. - Soit ν un prolongement de ν_1 tel que $\nu(x) \leq p(x)$, $\forall \ x \in E$. Alors

$$\nu(x) \leq p'(x) \ , \quad \forall \ x \in E$$

où

$$p'(x) = \inf_{y \in H} \left(p(x + y) - \nu_1(y)\right) \quad .$$

En effet

$$\nu(x+y) = \nu(x) + \nu_1(y) \leq p(x+y) \quad \text{pour tout} \quad y \in H \quad .$$

LEMME 2. - L'application p' est sous-linéaire, $p' \leq p$ et

$$p'(y) = \nu_1(y) = -p'(-y) \quad \text{pour tout} \quad y \in H \quad .$$

LEMME 3. - Soit $x \in E$, $x \neq 0$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $-p(-x) \leq \lambda \leq p(x)$. La forme linéaire μ_1 sur $\mathbb{R}.x$ définie par $\mu_1(x) = \lambda$ vérifie

$$\mu_1(y) \leq p(y) \qquad \forall \ y \in \mathbb{R}x \quad .$$

Nous pouvons alors énoncer :

PROPOSITION 1. - Pour que ν_1 admette un prolongement unique ν à E tout entier, il faut et il suffit que l'on ait

$$p'(x) = -p'(-x) \qquad \forall \ x \in E \quad ,$$

autrement dit, que l'application

$$x \to p'(x) \quad \text{soit linéaire} \quad .$$

2. Systèmes de balayage.

Nous utiliserons la proposition 1 en particulier lorsque $H = \{0\}$.

Introduisons le schéma où nous utiliserons cette proposition. [Pour une étude plus détaillée, voir CHOQUET (*)].

DÉFINITION. - Nous appellerons système de balayage un triplet (F, F^+, S) où F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ordonné par F^+, cône convexe saillant de F et où S est un cône convexe de F qui vérifie

$$S - F^+ = F \quad .$$

(*) CHOQUET (Gustave). - Mesures coniques maximales sur les cônes faiblement complets, Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 6, 1962, n° 12, 15 p.

Notations. - On désigne par $\mathfrak{M}^+$ le cône convexe des formes linéaires positives sur F (ordonné par F^+) et $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+ - \mathfrak{M}^+$. Par analogie avec les cas classiques on appellera mesures les éléments de $\mathfrak{M}$.

On munit alors $\mathfrak{M}$ de la structure uniforme de la convergence simple dans F qui fait de $\mathfrak{M}$ un espace localement convexe séparé.

PROPOSITION 2. - $\mathfrak{M}^+$ est complet dans $\mathfrak{M}$, donc fermé.

On introduit alors le cône convexe fermé S^*.

$$S^* = \{\mu \; ; \; \mu \in \mathfrak{M} \; ; \; \langle \mu , f \rangle \geq 0 , \; \forall \; f \in S\} \quad .$$

Nous supposerons pour simplifier dans ce qui suit que S^* est un cône saillant qui définit une relation d'ordre notée $\prec$

$$(\mu \prec \nu) \Longleftrightarrow (\nu - \mu) \in S^* \quad .$$

Définition. - On pose, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^+$,

$$A_\mu = \{\nu \; ; \; \nu \in \mathfrak{M}^+ \; ; \; \nu \prec \mu\} \quad .$$

PROPOSITION 3. - Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^+$, A_μ est compact.

Démonstration. - En effet $A_\mu = \mathfrak{M}^+ \cap (\mu - S^*)$, donc A_μ est complet. D'autre part, il est relativement compact, car pour tout $f \in F$, il existe $g , h \in S$ tels que

$$- h \leq f \leq g \quad ,$$

donc si l'on pose

$$\langle A_\mu , f \rangle = \bigcup_{\nu \in A_\mu} \langle \nu , f \rangle \quad ,$$

on a

$$\langle \mu , - h \rangle \leq \langle A_\mu , f \rangle \leq \langle \mu , g \rangle \quad .$$

Etudions la restriction à $\mathfrak{M}^+$ de la relation d'ordre définie par S^*.

PROPOSITION 4.

1. $\mathcal{M}^+$ est inductif vers le bas.

2. Toute mesure est minorée par une mesure minimale.

Définition. - On pose

$$P_\mu(f) = \sup_{\nu \in A_\mu} \langle \nu , f \rangle$$

pour $\mu \in \mathcal{M}^+$ et $f \in F$.

PROPOSITION 5.

1. $f \to P_\mu(f)$ est sous-linéaire sur F.

2. $P_\mu(f) = \inf\limits_{\substack{h \geq f \\ h \in S}} \langle \mu , h \rangle$.

3. Si μ est minimale, alors

$$f \to P_\mu(f) \text{ est linéaire} \qquad \text{et} \quad P_\mu(f) = \langle \mu , f \rangle \quad .$$

Démonstration. - (1) est évident, (3) résulte de la proposition 1 et du fait que si ν est une forme linéaire telle que $\nu \leq P_\mu$, alors ν est positive sur F.

Démontrons (2). Posons

$$P'_\mu(f) = \inf_{\substack{h \geq f \\ h \in S}} \langle \mu , h \rangle \quad .$$

D'après l'hypothèse $S - F^+ = F$, $P'_\mu(f)$ est borné pour tout f et

$$f \to P'_\mu(f) \text{ est sous-linéaire} \quad .$$

D'après HAHN-BANACH, il existe une forme linéaire ν_0 sur F telle que

$$\nu_0(f_0) = P'_\mu(f_0) \text{ pour } f_0 \text{ fixé} \quad ,$$

et

$$\nu_0(f) \leq P_\mu(f) \qquad \forall \ f \in F \quad .$$

Mais cela implique $\nu_0 \in \mathfrak{M}^+$ et $\nu \in A_\mu$, car

$$(f \in - F^+) \implies (P'_\mu(f) \leq 0) \qquad ;$$

et si $h \in S$,

$$\nu(h) \leq P'_\mu(f) = \langle \mu , h \rangle \qquad .$$

Nous venons de démontrer que $P_\mu \geq P'_\mu$.

Or, on a trivialement

$$P_\mu \leq P'_\mu \qquad ,$$

par suite

$$P_\mu = P'_\mu \qquad .$$

Propriétés des mesures minimales.

a. Si μ est minimale, et si $0 \leq \nu \leq \mu$, alors ν l'est aussi.

b. Si μ est minimale, k_μ l'est aussi $(k \geq 0)$.

Cette propriété essentielle conduit dans des cas divers à étudier quelque chose d'analogue au support de la mesure minimale.

Elle conduit à la notion de bord introduite par CHOQUET, aussi bien qu'à la notion de barycentre généralisé qui sont des mesures extrémales définissant d'une certaine manière des graphes.

Ces exemples, opposés, montrent l'intérêt de la notion de mesure minimale.

3. Barycentres généralisés.

Soient E un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie faible, Y un convexe compact de E et soit d'autre part X un convexe compact. On pose $Z = Y \times X$. On dira qu'une fonction numérique h sur Z est convexe si, pour tout $x \in X$, $h_x : y \to h(x , y)$ est convexe dans Y.

Soit C le cône des fonctions convexes.

On va étudier le système de balayage défini par le triplet $(\mathcal{C}(Z)\ ,\ \mathcal{C}^+(Z)\ ,\ C)$.

La condition supplémentaire " C^* est saillant" est vérifiée car $C - C$ est un espace vectoriel réticulé dense en norme dans $\mathcal{C}(Z)$.

On désigne par P_X et P_Y les projections de Z sur X et Y.

PROPOSITION 1. - Soit $T \in \mathcal{M}^+(Z)$ une mesure minimale.

Alors pour toute $h \in \mathcal{C}(Z)$

$$\int h\, dT = \inf_{\substack{f \geq h \\ f \in C}} \int f\, dT \quad .$$

C'est la traduction de la proposition 2.4.

PROPOSITION 2. - Soit T minimale et $h \in \mathcal{C}(Z)$.

1. Il existe une fonction numérique convexe s. c. i. φ telle que $h \leq \varphi$ et $\int \varphi\, dT < + \infty$.

2. Il existe une suite f_n de fonctions convexes telle que $h \leq f_n \leq \varphi$, $\forall\ n$, et si l'on pose $\psi = \limsup f_n$, ψ est convexe et $\int h\, dT = \int \psi\, dT$.

Démonstration. - Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. - Soient $f_1\ ,\ f_2 \geq h$, alors

$$\int (\sup(f_1\ ,\ f_2) - h)\, dT \leq \int (f_1 - h)\, dT + \int (f_2 - h)\, dT \quad .$$

Il suffit alors de prendre une suite f_n de fonctions convexes continues, telles que

$$f_n \geq h \ ; \qquad \int (f_n - h)\, dT \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad .$$

Posons

$$g_n = \sup_{m \geq n} f_m \quad \text{et} \quad \varphi = g_1 \quad .$$

On a

$$\int \varphi \, dT \leqslant \int h \, dT + 1 \quad ,$$

et

$$\int (g_n - h) \, dT \leqslant \sum_{m \geqslant n} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^n} \quad .$$

Par suite

$$\psi = \inf_n g_n \quad \text{est convexe}$$

et

$$\int (\psi - h) \, dT = 0 \quad .$$

LEMME 1. - Soient T_1 , $T_2 \in \mathcal{M}^+(Z)$, $T_1 \neq T_2$ et $P_X(T_1) = P_X(T_2)$; il existe alors T'_1 , T'_2 $(0 < T'_1 \leqslant T_1)$; $0 < T'_2 \leqslant T_2)$ telles que

$$P_X(T'_1) = P_X(T'_2) = \nu \ , \qquad \nu \neq 0$$

et que les projections sur Y des supports fermés de T'_1 et T'_2 soient contenus dans des convexes compacts disjoints.

[Voir le lemme 2 dans la démonstration de la proposition 3 sur les mesures extrémales.]

PROPOSITION 3. - Si $T \in \mathcal{M}^+(Z)$ est minimale, alors T est P_X-extrémale.

Démonstration. - On fait un raisonnement par l'absurde.

Supposons T non extrémale. Il existe T_1 , T_2 $(0 \leqslant T_1 \leqslant T$, $0 \leqslant T_2 \leqslant T$, $T_1 \neq T_2)$ telles que

$$P_X(T_1) = P_X(T_2)$$

et

$$T_0 = T_1 + T_2 \leqslant 2T \quad \text{est minimale} \quad .$$

D'après le lemme précédent, il existe T_1' , T_2' , $(0 \leq T_1' \leq T_1$; $0 \leq T_2' \leq T_2)$ avec

$$P_X(T_1') = P_X(T_2') = \nu \neq 0$$

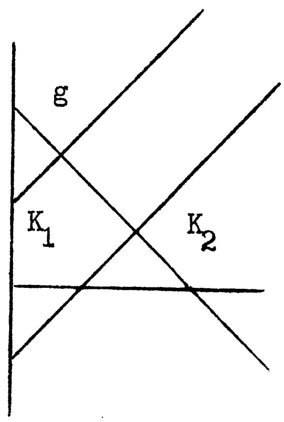
et les projections sur Y des supports fermés de T_1' et T_2' sont contenues dans deux convexes compacts disjoints K_1 et K_2 . De plus $T' = T_1' + T_2'$ est minimale.

Soit alors g une fonction affine continue ≥ 0 sur Y telle que

$$\lambda_1 = \sup_{x \in K_1} g(x) < \inf_{y \in K_2} g(y) = \lambda_2 \quad .$$

Soit

$$\lambda = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \quad .$$



On pose

$$h = \inf [(g - \lambda_1) , (\lambda_2 - g)] \quad ;$$

alors

$$h(x) \leq 0 \quad \text{pour} \quad x \in K_1 \cup K_2$$

et

$$h(x) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad \text{pour} \quad g(x) = \lambda \quad .$$

D'autre part, il existe une fonction borélienne T-intégrable convexe ψ telle que

$$\psi \geqslant h \circ P_Y \quad \text{et} \quad \int (\psi - h \circ P_Y)\, dT' = 0 \quad .$$

Par suite T' est portée par l'ensemble borélien,

$$A = \{Z \ ; \ z \in Z \ ; \ \psi(z) \leqslant 0\} \quad .$$

Enfin T_1' et T_2' sont respectivement portées par les ensembles A_1 et A_2 ainsi définis

$$A_1 = \{(y , x) \ ; \ (y , x) \in Y \times X \ ; \ g(x) \leqslant \lambda_1\}$$

$$A_2 = \{(y , x) \ ; \ (y , x) \in Y \times X \ ; \ g(x) \geqslant \lambda_2\} \quad .$$

Soient

$$B_1 = P_X(A_1 \cap A)$$

$$B_2 = P_X(A_2 \cap A) \quad .$$

Par hypothèses B_1 et B_2 sont deux ensembles ν-mesurables portant

$$\nu = P_X(T_1') = P_X(T_2') \quad ,$$

donc

$$B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \quad .$$

Soit $x \in B_1 \cap B_2$, il existe alors y_1 , $y_2 \in Y$ tels que

$$(x , y_1) \in A_1 \cap A \quad \text{et} \quad (x , y_2) \in A_2 \cap A \quad .$$

On a donc

$$g(y_1) \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < g(y_2)$$

et

$$\psi(x, y_1), \psi(x, y_2) \leqslant 0 \quad .$$

Soit alors

$$y = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \quad \text{avec} \quad g(y) = \lambda \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < 1 \quad .$$

On a, puisque ψ est convexe,

$$\psi(x, \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2) \leqslant \alpha \quad \psi(x, y_1) + (1 - \alpha) \psi(x, y_2) \leqslant 0 \quad ;$$

mais comme $\psi \geqslant h \circ P_Y$,

$$0 < \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = h(y) \leqslant \psi(x, y) \quad .$$

Nous avons ainsi obtenu une contradiction. Par conséquent, toute mesure minimale est aussi extrémale.

DÉFINITION 1. - <u>On dit que deux mesures</u> T_1 <u>et</u> $T_2 \geqslant 0$ <u>sur</u> Z <u>sont affinement équivalentes si</u>

$$\int f(y)\ g(x)\ dT_1 = \int f(y)\ g(x)\ dT_2$$

<u>pour toute</u> f <u>affine continue sur</u> Y <u>et toute</u> $g \in \mathcal{C}(X)$.

Nous noterons cette équivalence $T_1 \sim T_2$. Il est immédiat que si $T_1 \prec T_2$, alors $T_1 \sim T_2$, et que

$$(T_1 \sim T_2) \implies (P_X(T_1) = P_X(T_2)) \quad .$$

LEMME 2. - <u>Soient</u> T_1 , $T_2 \in \mathfrak{M}^+(Z)$, $T_1 \sim T_2$, $P_X(T_1) = \nu$.
<u>Pour toute fonction numérique</u> g ν-<u>intégrable sur</u> X , $0 \leqslant g \leqslant 1$, <u>alors</u>

$$[(g \circ P_X).T_1] \sim [(g \circ P_X).T_2] \quad .$$

LEMME 3. - <u>Soient</u> T_1 , $T_2 \in \mathfrak{M}^+(Z)$ <u>deux mesures</u> P_X<u>-extrémales,</u> $T_1 \neq T_2$, <u>telles que</u>

$$P_X(T_1) = P_X(T_2) = \nu \neq 0 \qquad .$$

<u>Il existe alors</u> g , $0 \leq g \leq 1$, g ν<u>-intégrable et</u> $\int g \, d\nu > 0$ <u>telle que si l'on pose</u>

$$T_1' = (g \circ P_X).T_1 \qquad ,$$

$$T_2' = (g \circ P_X).T_2 \qquad ,$$

<u>les projections sur</u> Y <u>des supports fermés de</u> T_1' <u>et</u> T_2' <u>sont contenus dans des convexes compacts disjoints.</u>

Raisonner comme pour le lemme 1 en utilisant le lemme 2.

PROPOSITION 4. - Deux mesures positives P_X-extrémales distinctes ne peuvent être affinement équivalentes.

PROPOSITION 5.

1. Toute mesure $T \in \mathfrak{M}^+(Z)$ est minorée par une mesure minimale unique.

2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. T est minimale.

b. T est P_X-extrémale.

<u>Application.</u> - Soient X_1 et X_2 deux espaces compacts, T une mesure positive sur $X_1 \times X_2$.

La mesure T peut être considérée comme une mesure sur $\mathfrak{M}^1(X_1) \times X_2$.

Soit T_0 la mesure minimale unique associée à T .

DÉFINITION 2. - Nous dirons que T_0 est la désintégrée de T relativement à la projection de $X_1 \times X_2$ sur X_2 .

PROPOSITION 6. - Si X_1 est métrisable, il existe une suite K_n de compacts deux à deux disjoints de X_2 , et une application π de $A = \bigcup_n K_n$ dans $\mathfrak{M}'(X_1)$ telle que

1. Si $\nu = P_{X_2}(T)$ alors $\nu(A) = \nu(X_2)$.

2. π est continue sur chaque K_n .

3. Pour toute f continue sur X_1 , on a

$$\int (f \circ P_{X_1})\, dT = \int_A \left(\int f\, d\pi(x) \right) d\nu(x) \qquad .$$