Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

Paul-André Meyer

Décomposition des surmartingales

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, n° 2 (1961-1962), exp. n° 11, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A6_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel (Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 11
15 et 22 juin 1962

DÉCOMPOSITION DES SURMARTINGALES

par Paul-André MEYER

Le problème de la décomposition des surmartingales a été posé par DOOB dans son livre "Stochastic processes" [1]. Nous donnons ici un aperçu des démonstrations qui permettent de le résoudre.

1. Rappels.

a. On se donne un espace probabilisé (Ω , F , P) , où F désigne une tribu de parties de Ω , et P une loi de probabilité sur (Ω , F) . Il n'y aura aucun inconvénient à supposer que la loi P est complète : tout sous-ensemble d'un ensemble P-négligeable est alors F-mesurable (et P-négligeable). On considère en outre une famille $(F_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$ de sous-tribus de F , qui satisfait aux propriétés suivantes :

(T1) Les tribus F_t croissent avec t .

(T2) La famille (F_t) est continue à droite : on a $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$ pour tout t .

(T3) Chaque tribu F_t contient tous les ensembles P-négligeables.

b. Les surmartingales que nous envisagerons seront d'un type particulier : nous appellerons surmartingale une famille $(Y_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$ de variables aléatoires numériques définies sur Ω , qui satisfait aux conditions suivantes :

(S1) Y_t est F_t-mesurable et intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

(S2) Pour tout couple (s , t) d'éléments de $\mathbb{R}_+$ tel que $s < t$, on a :

$$Y_s \geq E[Y_t|F_s] \text{ presque sûrement (en abrégé : p. s.)} .$$

(S3) L'application (décroissante) $t \to E[Y_t]$ est continue à droite.

Une surmartingale dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche sera dite standard. Les théorèmes de Doob permettent d'établir assez facilement l'existence, pour toute surmartingale (Y_t) satisfaisant à (S1)-(S3), d'une surmartingale standard (X_t) telle que l'on ait $X_t = Y_t$ p. s. pour chaque t . Nous dirons que (X_t) est une version standard de (Y_t) .

On parvient à la notion de martingale en remplaçant le signe $\leqslant$ de (S2) par un signe $=$. Il existe une analogie entre la théorie que nous développons ici et la théorie classique du potentiel, dans laquelle les surmartingales correspondent aux fonctions surharmoniques, les martingales aux fonctions harmoniques.

Une surmartingale (Y_t) sera dite achevée s'il existe une variable aléatoire intégrable Y telle que l'on ait $Y_s \geqslant E[Y|F_s]$ p. s. Lorsque (Y_t) est standard et achevée, la limite $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$ existe p. s., est intégrable, et satisfait à l'inégalité $Y_s \geqslant E[Y_\infty|F_t]$ p. s.

Appelons solution de Dirichlet une martingale standard (X_t) de la forme $(E[Y|F_t])_{t\in\underset{\sim}{R}_+}$, où Y est une variable aléatoire intégrable. DOOB a montré qu'une martingale est une solution de Dirichlet si et seulement si elle est uniformément intégrable, et que l'on a alors $X_t = E[X_\infty|F_t]$ p. s. Soit alors (Y_t) une surmartingale achevée ; nous pouvons écrire, en désignant par (X_t) une version standard de la martingale $(E[Y_\infty|F_t])$:

$$Y_t = X_t + (Y_t - X_t) \qquad (\text{"décomposition de Riesz"}) \quad .$$

Le premier terme du second membre est une solution de Dirichlet (la "solution de Dirichlet associée à (Y_t) ") ; le second terme est une surmartingale standard, positive, qui tend vers 0 lorsque t tend vers ∞ : nous dirons qu'une telle surmartingale est un potentiel standard.

c. Un temps d'arrêt est une variable aléatoire positive T, finie ou non, telle que l'événement $\{T < t\}$ appartienne à F_t pour tout $t \in \underset{\sim}{R}_+$. La tribu F_T des événements antérieurs à T est constituée par les événements A tels que l'intersection $A \cap \{T \leqslant t\}$ appartienne à F_t pour tout t. Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$; on a aussi $F_S \subset F_T$.

Soient T un temps d'arrêt, A un événement antérieur à T ; nous désignerons par T_A le temps d'arrêt défini par les relations :

$$T_A(\omega) = T(\omega) \quad \text{pour} \quad \omega \in A \ ; \qquad T_A(\omega) = +\infty \quad \text{pour} \quad \omega \notin A \quad .$$

d. Soient $(Y_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ une surmartingale standard achevée, T un temps d'arrêt. On pose $Y_T(\omega) = Y_{T(\omega)}(\omega)$; la fonction de ω ainsi définie est une variable aléatoire F_T-mesurable et intégrable. Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$; DOOB a établi l'inégalité :

$$Y_S \geq E[Y_T | F_S] \quad \text{p. s.} \qquad (\text{"théorème d'arrêt"}) \quad .$$

Si $(Y_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ est une solution de Dirichlet, on peut remplacer l'inégalité par une égalité.

e. Soit $(Y_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ une surmartingale standard et achevée. On dit que (Y_t) appartient à la classe (D) si les variables aléatoires Y_T , associées à tous les temps d'arrêt T possibles, sont uniformément intégrables. On peut montrer que toute solution de Dirichlet appartient à la classe (D) : toute surmartingale achevée majorée par une solution de Dirichlet appartient donc aussi à la classe (D). Nous verrons que la réciproque est vraie.

2. Le problème de représentation des potentiels.

a. Nous appellerons processus à trajectoires croissantes un processus stochastique $(A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(C1) A_t est F_t-mesurable et intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

(C2) On a $A_0 = 0$; les applications $t \to A_t(\omega)$ sont croissantes et continues à droite.

La condition (C2) entraîne l'existence de la limite A_∞ des A_t ; nous dirons que le processus est intégrable si l'on a $E[A_\infty] < \infty$.

b. Soit (A_t) un processus croissant et intégrable. Choisissons une version standard (Z_t) de la martingale $E[A_\infty | F_t]$ et posons :

$$Y_t = Z_t - A_t \quad .$$

Il est facile de voir que ce processus est une surmartingale standard et positive. D'autre part, les théorèmes de Doob sur les martingales montrent que les deux termes du second membre convergent vers A_∞ lorsque t tend vers $+\infty$; il en résulte que (Y_t) est un potentiel. Nous dirons que c'est le potentiel engendré par (A_t) .

Soit T un temps d'arrêt ; posons $A_T(\omega) = A_{T(\omega)}(\omega)$. Une application du théorème d'arrêt de Doob (qui a été rappelé en 1 (d) ci-dessus) montre que l'on a :

$$Y_T = Z_T - A_T = E[A_\infty | F_T] - A_T \quad \text{p. s.} \quad .$$

La martingale (Z_t) étant une solution de Dirichlet, les variables aléatoires de la forme Z_T sont uniformément intégrables ; il en est de même pour les variables aléatoires de la forme A_T, qui sont toutes majorées par A_∞. Il en résulte que (Y_t) est un <u>potentiel standard de la classe</u> (D).

Le paragraphe suivant sera consacré à la démonstration de la réciproque :

THÉORÈME 1. - <u>Soit (Y_t) un potentiel standard. Pour qu'il existe au moins un processus croissant intégrable qui l'engendre, il faut et il suffit que (Y_t) appartienne à la classe (D).</u>

Un potentiel engendré par un processus croissant intégrable (A_t) est majoré par la martingale $(E[A_\infty|F_t])$. Le théorème 1 montre donc en particulier qu'un potentiel appartient à la classe (D) si et seulement s'il est majoré par une martingale uniformément intégrable.

3. Démonstration du théorème 1.

a. La topologie affaiblie $\sigma(L^1, L^\infty)$ sur l'espace $L^1(\Omega, F, P)$ sera appelée "topologie σ" dans la suite. Son intérêt vient du théorème de compacité de Dunford-Pettis (voir [4]) que nous utiliserons sous la forme suivante : il est possible d'extraire une suite σ-convergente de tout ensemble uniformément intégrable de fonctions de L^1.

Par ailleurs, la topologie σ possède les propriétés suivantes : soit (f_n) une suite σ-convergente de variables aléatoires de L^1, et soit f une variable aléatoire égale p. s. à sa limite. Si les f_n sont positives, f l'est encore p. s. ; si les f_n sont mesurables par rapport à une tribu F_t (qui contient les ensembles P-négligeables), f est aussi F_t-mesurable.

b. LEMME. - <u>Soient (X_t) un potentiel standard, (X^n_t) $(n \in \mathbb{N})$ des potentiels standard possédant les propriétés suivantes</u> :

1. <u>Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, les X^n_t convergent vers X_t au sens de la topologie σ.</u>

2. <u>Chaque potentiel (X^n_t) est engendré par un processus croissant intégrable (A^n_t).</u>

3. <u>Les variables aléatoires A^n_∞ sont uniformément intégrables. Il existe alors un processus croissant intégrable (A_t) qui engendre (X_t).</u>

<u>Démonstration</u>. - Les variables aléatoires (A^n_t) sont majorées par les (A^n_∞) : en utilisant le théorème de Dunford-Pettis et un procédé diagonal, on extrait une

suite n_k telle que les $(A_t^{n_k})$ convergent vers des variables aléatoires (B_t) pour t rationnel et $t = \infty$. Les processus $(X_t^{n_k} + A_t^{n_k})$ étant des martingales, on vérifie que le processus $(X_t + B_t)$ est une martingale pour t rationnel. D'autre part, les B_t croissent avec t.

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, posons :

$$M_s(\omega) = \lim_{\substack{t \text{ rationnel} \\ t \downarrow s}} [X_t(\omega) + B_t(\omega)] \quad ,$$

limite qui existe p. s. pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Posons ensuite :

$$A_s(\omega) = X_s(\omega) - M_s(\omega)$$

(A_s) est un processus croissant intégrable qui engendre (X_t), à une petite régularisation près que nous laissons aux soins du lecteur.

c. Nous allons chercher à associer des processus (X_t^n) et (A_t^n), satisfaisant aux conditions ci-dessus, à tout potentiel standard (X_t) qui appartient à la classe (D). Nous commencerons par les remarques suivantes :

Soit T un temps d'arrêt ; posons

$$p_T X_t = E[X_{T+t} | F_t] \quad .$$

Il n'est pas difficile de vérifier que le processus $(p_T X_t)$ est une surmartingale majorée par (X_t), donc un potentiel de la classe (D). Nous en choisirons une version standard.

Nous n'utiliserons en fait que le cas où T est une constante, que nous désignerons par la notation $1/n$. Nous poserons alors :

$$H_t^n(\omega) = n[X_t(\omega) - p_{1/n} X_t(\omega)]$$

$$A_t^n(\omega) = \int_0^t H_s^n(\omega) \, ds \quad .$$

Ces expressions ressemblent évidemment beaucoup à des "laplaciens approchés" du potentiel (X_t).

d. LEMME. - <u>Le processus croissant</u> (A_t^n) <u>est intégrable, et le potentiel</u> (X_t^n) <u>qu'il engendre est égal à</u>

$$X_t^n = E[n \int_t^{t+1/n} X_s \, ds | F_t]$$

<u>en particulier,</u> X_t^n <u>converge en croissant vers</u> X_t <u>lorsque</u> n <u>tend vers</u> $+\infty$.

Nous ne détaillerons pas la démonstration de ce lemme, qui est facile. On prend un nombre fini $u \geq t$, et on établit les égalités :

$$\begin{aligned} E[A_u^n - A_t^n \mid F_t] &= n.E[\int_t^u (X_s - p_{1/n} X_s) \, ds | F_t] \\ &= n.E[\int_t^u (X_s - X_{s+1/n}) \, ds | F_t] \\ &= nE[\int_t^{t+1/n} X_s \, ds | F_t] - n.E[\int_u^{u+1/n} X_s \, ds | F_t] \end{aligned} ,$$

le second terme a une espérance mathématique inférieure à celle de X_u ; (X_t) appartenant à la classe (D), cette espérance tend vers 0, et le lemme est établi.

e. La démonstration de l'intégrabilité uniforme des A_∞^n est plus délicate. Considérons les processus croissants intégrables de la forme

$$A_t^H(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) \, ds$$

où les variables aléatoires $H_s(\omega)$ sont positives, et où le processus (H_s) satisfait aux propriétés de mesurabilité nécessaires pour que ces intégrales aient un sens. Supposons que le potentiel (X_t^H) engendré par (A_t^H) soit majoré par (X_t). Nous allons montrer qu'il est possible, quel que soit $c > 0$, de décomposer le processus (H_t) en une somme de deux processus analogues (H_t^c) et (H_{ct}) de telle sorte que l'on ait

$$E[(A_\infty^{H^c})^2] \leq 2c^2 \quad .$$

$$E[A_\infty^{H_c}] \leq r(c)$$

où $r(c)$ est une fonction positive qui tend vers 0 lorsque $c \to \infty$.

Ces deux conditions suffisent à entraîner l'intégrabilité uniforme des A_∞^H satisfaisant à la propriété de majoration considérée. En particulier, les potentiels des (A_t^n) étant majorés par (X_t), les (A_∞^n) seront uniformément intégrables et le théorème 1 sera établi.

Soient

g^c la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, c]$ de $\underset{\sim}{R}_+$,

$H_t^c(\omega)$ la variable aléatoire $H_t(\omega) \cdot g^c \circ X_t(\omega)$,

$T^c(\omega)$ le temps d'arrêt, borne inférieure des instants t tels que $X_t(\omega) \geq c$; T^c tend vers $+\infty$ avec c , et l'appartenance de (X_t) à la classe (D) montre que la fonction $r(c) = E[X_{T^c}]$ tend vers 0 lorsque $c \to \infty$.

Posons enfin $H_{ct} = H_t - H_t^c$; nous avons

$$E[A_\infty^{H_c}] = E[\int_0^\infty H_s(\omega)[1 - g^c \circ X_s(\omega)]\, ds] \leq E[\int_{T^c}^\infty H_s\, ds] = E[X^H_{T^c}]$$

$$\leq E[X_{T^c}] = r(c) \quad .$$

f. Nous avons donc établi l'inégalité relative à H_c . Montrons maintenant que le potentiel de (H^c) est majoré par c . Nous avons

$$X_t^{H^c} = E[\int_t^\infty H_s(\omega) \cdot g^c \circ X_s(\omega)\, ds | F_t] \quad .$$

Soit $S^c(\omega)$ la borne inférieure des instants $s \geq t$ tels que $X_s^H(\omega)$ soit $\leq c$; on a $X^H_{S^c}(\omega) \leq c$ d'après la continuité à droite des trajectoires. Mais on a d'autre part $\int_t^{S^c} H_s \cdot g^c \circ X_s = 0$. Par conséquent :

$$X_t^{H^c} = E[\int_{S^c}^\infty H_s \cdot g^c \circ X_s\, ds | F_t] \leq E[\int_{S^c}^\infty H_s\, ds | F_t] \quad .$$

La dernière intégrale peut se calculer en prenant d'abord une espérance conditionnelle relativement à F_{S^c} . Or on a

$$E[\int_{S^c}^\infty H_s\, ds | F_{S^c}] = X^H_{S^c} \leq c \quad .$$

g. Le potentiel de $(A_t^{H^c})$ est donc majoré par c . Nous allons montrer qu'on en déduit (d'après VOLKONSKI) l'inégalité $E[(A_t^{H^c})^2] \leq 2c^2$. Utilisons la relation (où les exposants c ont été omis)

$$[A^H_\infty(\omega)]^2 = 2\int_0^\infty (A^H_\infty - A^H_t).H_t\, dt \quad .$$

L'espérance mathématique du second membre est égale à :

$$2\int_0^\infty E[(A^H_\infty - A^H_t).H_t|F_t]\,dt = 2E[\int_0^\infty H_t.E[(A^H_\infty - A^H_t)|F_t]\,dt]$$

$$= 2E[\int_0^\infty H_t.X^H_t\,dt] \leq 2c.E[\int_0^\infty H_t\,dt] \leq 2c^2 \; .$$

4. Solution du problème de décomposition de Doob.

DOOB a remarqué, dans le cas d'un ensemble de temps discret, que toute surmartingale était la somme d'une martingale et d'un processus dont les trajectoires étaient des fonctions décroissantes du temps. Il a posé la question de savoir à quelles conditions il en était de même dans le cas continu. La réponse est maintenant facile : nous dirons que la surmartingale (X_t) appartient localement à la classe (D) si :

pour tout a fini, les variables aléatoires X_T, associées à tous les temps d'arrêt T tels que $0 \leq T \leq a$, sont uniformément intégrables.

On a alors le :

THÉORÈME 2. - Pour que la surmartingale (X_t) admette une décomposition de Doob, il faut et il suffit qu'elle appartienne localement à la classe (D).

L'idée essentielle de la démonstration (que nous omettrons) consiste à remarquer que chaque intervalle $[n, n+1)$ est isomorphe à $[0, +\infty)$, à décomposer (X_t) sur cet intervalle en une martingale et un potentiel de la classe (D), à représenter ce potentiel au moyen du théorème 1, et à "recoller" les décompositions obtenues. Il n'y a aucune difficulté dans tout cela.

5. Processus croissants continus et potentiels réguliers.

a. Il est naturel de se demander à quelles conditions il est possible de représenter un potentiel (X_t) de la classe (D) au moyen d'un processus croissant intégrable dont les trajectoires sont continues. Nous allons résoudre ce problème, en utilisant une méthode introduite par M. G. ŠUR dans la théorie des fonctionnelles additives de Markov.

Nous allons établir d'abord une condition nécessaire : supposons que (X_t) soit engendré par un processus croissant intégrable continu (A_t) , et considérons une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) ; la limite des T_n est un temps d'arrêt T , et nous avons :

$$E[X_T] = E[A_\infty] - E[A_t] \; ; \qquad E[X_{T_n}] = E[A_\infty] - E[A_{T_n}] \qquad .$$

Il résulte du théorème de Lebesgue que $E[A_{T_n}]$ tend vers $E[A_T]$: on a donc la même propriété pour $E[X_{T_n}]$ et $E[X_T]$. Cela nous amène à énoncer la définition et le théorème suivants :

Nous dirons qu'un potentiel standard (X_t) est <u>régulier</u> s'il appartient à la classe (D) et si l'on a la relation :

$$\lim_n E[X_{T_n}] = E[X_T]$$

pour toute suite croissante de temps d'arrêt T_n qui converge vers T .

THÉORÈME 3. - <u>Pour qu'un potentiel standard (X_t) soit engendré par un processus croissant continu, il faut et il suffit que (X_t) soit régulier.</u>

b. <u>Démonstration</u> : Cas où (X_t) est borné. - Nous allons reprendre les notations du § 3 (c) , et montrer que les processus croissants (A_t^n) convergent vers un processus croissant continu. Commençons par le cas où le processus (X_t) est majoré par une constante c : nous avons vu au § 3 (g) que l'on avait alors

$$E[(A_t^n)^2] \leq 2c^2 \qquad .$$

Dans ce cas, nous pouvons donc remplacer la topologie faible $\sigma(L^1 , L^\infty)$ par la topologie faible $\sigma(L^2 , L^2)$; il existe alors une suite n_k telle que les variables aléatoires $A_t^{n_k}$ convergent vers des variables aléatoires A_t au sens de cette topologie, pour t rationnel ou infini. Nous avons vu que l'on pouvait alors régulariser A_t en un processus croissant qui engendre (X_t) : nous allons montrer que ce processus croissant est <u>continu</u>.

Supposons en effet que ce processus ne soit pas continu. Donnons-nous un intervalle $[0 , \tau]$, et une subdivision finie de cet intervalle au moyen de points t_i d'abscisse rationnelle : si la fonction $A_t(\omega)$ présentait une discontinuité d'amplitude supérieure à h , on aurait l'inégalité

$$\sum_i (A_{t_{i+1}}(\omega) - A_{t_i}(\omega))^2 \geq h^2 \quad .$$

Si le processus croissant présentait des discontinuités avec une probabilité positive, l'espérance

$$E[\sum_i (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2]$$

resterait donc bornée inférieurement par un nombre $a > 0$, quelle que soit la finesse de la subdivision (t_i) de $[0 , \tau]$. Or la norme dans L^2 est une fonction semi-continue inférieurement pour la topologie faible : pour toute subdivision (t_i) , on aurait donc, pour tout n assez grand, l'inégalité

$$E[\sum_i (A^n_{t_{i+1}} - A^n_{t_i})^2] \geq a \quad .$$

Nous allons montrer que l'on a au contraire la propriété (S) suivante :

$\forall$ $a > 0$, $\exists$ une subdivision (t_i) de $[0 , \tau]$ telle que l'on ait

$$E[\sum_i (A^n_{t_{i+1}} - A^n_{t_i})^2] < a \quad \text{pour tout } n \text{ assez grand} \quad .$$

Le lemme suivant est la clef de la démonstration. Il est dû à ŠUR, et il exprime que $(p_{1/n} X_t)$ tend "quasi-uniformément" vers (X_t) lorsque $n \to \infty$.

c. LEMME. - Soit ε un nombre positif, et soit T_n le temps d'arrêt :

$$T_n(\omega) = \inf\{t : X_t(\omega) - p_{1/n} X_t(\omega) > \varepsilon\} \quad .$$

Ces temps d'arrêt croissent avec n ; si (X_t) est régulier, leur limite est $+\infty$.

Démonstration. - Soit T la limite des T_n ; le processus (X_t) étant régulier, on a

$$E[X_T] = \lim_n E[X_{T_n}] \quad .$$

On a la même propriété pour le processus $(p_{1/n} X_t)$, qui est régulier lui aussi, comme on le vérifie immédiatement. Par conséquent, on a

$$E[X_T - p_{1/n} X_T] = \lim_n E[X_{T_n} - p_{1/n} X_{T_n}]$$

mais on a

$$X_{T_n} - p_{1/n} X_{T_n} \geq \varepsilon . \chi_{\{T_n < \infty\}} \geq \varepsilon . \chi_{\{T < \infty\}}$$

on obtient donc

$$\liminf_n E[X_T - p_{1/n} X_T] \geq \varepsilon . P\{T < \infty\} \quad .$$

Or l'espérance du premier membre tend en décroissant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; il en résulte que l'on a $T = \infty$ p. s. D'autre part, la décroissance de $X_t - p_{1/n} X_t$ lorsque n tend vers l'infini montre que l'on a

$$X_t(\omega) - p_{1/m} X_t(\omega) < \varepsilon$$

pour tout $m > n$, sur l'ensemble $\{T_n > t\}$.

d. Démonstration de la propriété (S). - Soit (t_i) une subdivision de $[0 , \tau]$. On établirait l'identité suivante, par des méthodes analogues à celle de VOLKONSKI (cf. § 3 (g))

$$E[\sum_i (A^n_{t_{i+1}} - A^n_{t_i})^2] = 2E[\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} n.(X_u - p_{1/n} X_u) \, du \int_u^{u+1/n} n(X_v - p_{t_{i+1}-u} X_v) dv] .$$

On se fixe alors un nombre positif ε , puis un nombre k tel que $P\{T_k < \tau + 1\}$ soit $< \varepsilon$, et une partition (t_i) de pas $< 1/k$. On intègre séparément sur les ensembles $\{T_k < \tau + 1\}$ et $\{T_k \geq \tau + 1\}$, et on obtient une majoration du second membre par une quantité qui tend vers 0 avec ε .

e. Passage au cas général. - Considérons maintenant un potentiel standard (X_t) de la classe (D), qui est régulier mais non nécessairement borné. Si nous pouvons montrer qu'il existe une série de potentiels réguliers bornés (X^n_t) telle que l'on ait $\sum X^n_t = X_t$ p. s. pour chaque t , le théorème sera établi pour (X_t) : en effet, les (X^n_t) sont engendrés par des processus croissants continus (A^n_t) ; si l'on pose $A_t = \sum A^n_t$, cette série converge p. s. vers une quantité finie ; or une série de fonctions continues croissantes converge uniformément sur tout intervalle où sa somme est finie : le processus croissant (A_t) est donc continu, et engendre (X_t) .

Nous établirons l'existence des processus (X^n_t) de la manière suivante : le potentiel (X_t) , appartenant à la classe (D), est engendré par un processus croissant intégrable (B_t) . Soit g^n la fonction caractéristique de l'intervalle $[0 , n]$ de $\underset{\sim}{R}_+$; posons :

$$B'^{n}_t(\omega) = \int_0^t g^n \circ X_t(\omega)\ dB_t(\omega) \qquad .$$

Soit (Y^n_t) le potentiel engendré par le processus croissant (B'^{n}_t) : la différence $(X_t - Y^n_t)$ est un potentiel ; on vérifiera immédiatement que, si la somme de deux potentiels est un potentiel régulier, chacun d'eux est régulier : il en résulte que (Y^n_t) est régulier. D'autre part, la méthode qui a été employée au § 3 (f) montre que le potentiel (Y^n_t) est majoré par n . Il suffit alors de poser :

$$B^n_t = B'^{n+1}_t - B'^{n}_t$$

Le théorème suivant donne une autre caractérisation de l'accessibilité.

6. Étude de l'unicité de la représentation.

Nous avons vu que tout potentiel standard (X_t) qui appartient à la classe (D) est engendré par un processus croissant intégrable (A_t) , et nous avons donné un procédé de construction de ce processus à partir des "laplaciens approchés" de (X_t) . Des exemples simples montrent que l'on n'a pas d'unicité pour une telle représentation. Nous allons chercher à caractériser une "classe d'unicité" naturelle, c'est-à-dire une partie U de l'ensemble des processus croissants intégrables, telle que tout potentiel (X_t) soit engendré par un élément unique de U . Il apparaîtra d'ailleurs que cet élément est le processus (A_t) qui a été construit plus haut.

Les démonstrations de ce paragraphe sont assez techniques ; nous n'en donnerons que les grandes lignes. Voici d'abord quelques définitions.

a. Donnons-nous un intervalle $[0 , \tau]$ $(0 < \tau \leq \infty)$, un nombre positif ε , un processus stochastique $Y = (Y_t)$ dont les trajectoires sont continues à droite et possèdent une limite à gauche en tout point (y compris le point à l'infini). Nous appellerons (Y , ε)-<u>chaîne</u> sur $[0 , \tau]$ une suite (T_n) de temps d'arrêt qui satisfait aux conditions suivantes :

(C1) $T_1 = 0$; $T_n \leq T_{n+1}$ pour tout n .

(C2) On a $T_n(\omega) = \tau$ pour n assez grand, sauf pour un ensemble négligeable de points ω de Ω .

(C3) La fonction $t \to Y_t(\omega)$ a p. s. une oscillation inférieure à ε sur chacun des intervalles $[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)[$.

Nous verrons plus loin des exemples de telles chaînes.

b. Considérons un processus croissant intégrable (A_t) et une martingale standard bornée (Y_t) . La fonction $t \to A_t(\omega)$ ne présente qu'une infinité dénombrable de discontinuités, et la somme de leurs valeurs est finie. Nous pouvons considérer alors la somme

$$\sum_{t \leq \tau} (A_t - A_{t-})(Y_t - Y_{t-}) \quad .$$

Il est facile de voir que cette somme est une variable aléatoire intégrable. Nous désignerons son espérance mathématique par la notation $[(Y_t), (A_t)]_\tau$.

Nous donnerons au théorème suivant une forme un peu plus simple par la suite, sous des hypothèses plus restrictives que celles-ci.

THÉORÈME 4. - Soit (X_t) un potentiel standard de la classe (D). Il existe un processus croissant intégrable unique (A_t) , qui engendre (X_t) et possède la propriété suivante :

$[(Y_t), (A_t)]_\tau$ est nul pour toute valeur de τ et toute martingale standard bornée (Y_t) .

c. La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME. - Soient $Y = (Y_t)$ une martingale standard bornée, (T_n) une (Y, ε)-chaîne de temps d'arrêt sur $[0, \tau]$, (A_t) un processus croissant intégrable. La variable aléatoire :

$$(*) \qquad E[Y_\tau A_\tau - \sum_m Y_{T_m} (A_{T_{m+1}} - A_{T_m}) \mid F_0]$$

converge en norme dans L^1 , lorsque ε tend vers 0 , vers la variable aléatoire :

$$(**) \qquad E[\sum_t (A_t - A_{t-})(Y_t - Y_{t-}) \mid F_0]$$

La démonstration du lemme suit le schéma suivant :

Soient (T_m) et (S_m) deux (Y, ε)-chaînes ; on vérifie que la différence des variables aléatoires (*) correspondantes est majorée en norme par $2\varepsilon E[A_\tau]$. On peut donc se borner à considérer une suite particulière de (Y, ε)-chaînes, ε tendant vers 0 .

On désigne alors par D_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la fonction $t \to Y_t(\omega)$ présente sur $[0, \tau]$ plus de n discontinuités dont l'amplitude dépasse ε, et on choisit n assez grand pour que l'on ait :

$$\int_{D_n} A_\tau \, dP < \varepsilon \quad .$$

On définit alors par récurrence la chaîne de temps d'arrêt de la manière suivante :

$T_1 = 0$

$$T_{p+1}(\omega) = \sup\{r \leq \tau : \; r \geq T_p(\omega) \; , \; |Y_r(\omega) - Y_{T_p}(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, , \; A_r(\omega) - A_{T_p}(\omega) \leq \frac{\varepsilon}{n}\} \quad .$$

On remarque ensuite que l'on a :

$$E[Y_\tau A_\tau \mid F_0] = E[\sum Y_{T_{p+1}} (A_{T_{p+1}} - A_{T_p}) \mid F_0]$$

alors que la variable aléatoire (**) diffère aussi peu que l'on veut de la somme :

$$E[\sum (Y_{T_{p+1}} - Y_{T_{p+1}-})(A_{T_{p+1}} - A_{T_{p+1}-}) \mid F_0]$$

lorsque ε tend vers 0. On est ramené en définitive à montrer que l'espérance mathématique :

$$E[|\sum (Y_{T_{p+1}} - Y_{T_p})(A_{T_{p+1}} - A_{T_p}) - \sum (Y_{T_{p+1}} - Y_{T_{p+1}-})(A_{T_{p+1}} - A_{T_{p+1}-})|]$$

tend vers 0 avec ε. On décompose alors cette somme en plusieurs autres, dont une seule est délicate à traiter : la somme :

$$\int [\sum (Y_{T_{p+1}} - Y_{T_{p+1}-})(A_{T_{p+1}-} - A_{T_p})] \, dP$$

qu'il convient de couper en deux intégrales, l'une prise sur D_n, l'autre sur $\Omega - D_n$, que l'on majore séparément.

d. Montrons que le processus croissant intégrable (A_t) qui a été construit au cours de la démonstration du théorème 1 satisfait à la relation $[(Y_t), (A_t)]_\tau = 0$ pour toute martingale standard bornée (Y_t) et toute valeur <u>rationnelle</u> de τ. La même propriété en résultera alors pour tout τ.

Etant donné que nous n'avons pas détaillé les majorations qui conduisent au lemme précédent, nous nous bornerons ici au principe de la démonstration. Considérons une (Y , ε)-chaîne (T_p) sur $[0 , \tau]$; les espérances

$$E[Y_\tau . A_\tau] - E[\sum Y_{T_p} (A_{T_{p+1}} - A_{T_p})]$$

$$E[Y_\tau . A^n_\tau] - E[\sum Y_{T_p} (A^n_{T_{p+1}} - A_{T_p})]$$

(où les (A^n_t) sont les processus croissants continus définis en 3, c) sont très voisines des sommes :

$$E[\sum_{t\leq\tau} (Y_t - Y_{t-})(A_t - A_{t-})] \ ; \qquad E[\sum_{t\leq\tau} (Y_t - Y_{t-})(A^n_t - A^n_{t-})]$$

et l'on peut voir, en utilisant l'intégrabilité uniforme des A^n_τ , que l'approximation est uniforme en n . D'autre part, les (A^n_t) étant continus, on a $[(Y_t) , (A^n_t)]_\tau = 0$ pour tout n . On a aussi la relation

$$\lim_n E[Y_\tau . A^n_\tau] = E[Y_\tau . A_\tau] \qquad ,$$

par définition de la topologie $\sigma(L^1 , L^\infty)$. Enfin, on peut montrer sans difficulté que l'on a :

$$E[\sum Y_{T_p} (A^n_{T_{p+1}} - A^n_{T_p})] = E[\sum Y_{T_p} (X^n_{T_p} - X^n_{T_{p+1}})] \rightarrow E[\sum Y_{T_p} (X_{T_p} - X_{T_{p+1}})]$$

$$= E[\sum Y_{T_p} (A_{T_{p+1}} - A_{T_p})] \qquad .$$

Il résulte de tout cela que l'on a

$$\lim_n [(Y_t) , (A^n_t)]_\tau = 0 = [(Y_t) , (A_t)]_\tau \qquad .$$

e. Soient (A_t) et (B_t) deux processus croissants intégrables qui engendrent (X_t) et satisfont à la relation

$$[(Y_t) , (A_t)]_\tau = [(Y_t) , (B_t)]_\tau = 0$$

pour toute martingale standard bornée (Y_t) . Nous avons aussi la relation, pour toute chaîne (T_p) de temps d'arrêt sur $[0 , \tau]$:

$$E[\sum Y_{T_p}(A_{T_{p+1}} - A_{T_p})] = E[\sum Y_{T_p}(X_{T_p} - X_{T_{p+1}})] = E[\sum Y_{T_p}(B_{T_{p+1}} - B_{T_p})] \quad .$$

Nous déduisons alors du lemme la relation :

$$E[Y_\tau . A_\tau] = E[Y_\tau . B_\tau] \quad .$$

Or A_τ et B_τ sont F_τ-mesurables, et Y_τ peut être prise égale à une variable aléatoire quelconque, F_τ-mesurable et bornée. Il en résulte que l'on a $A_\tau = B_\tau$ p. s. ; les trajectoires des deux processus croissants étant continues à droite, on en déduit que l'on a

$$A_t(\omega) = B_t(\omega) \quad \text{pour tout} \quad t$$

sauf aux points d'un ensemble négligeable.

7. Accessibilité des temps d'arrêt.

Il est possible de donner au théorème 4 une forme beaucoup plus agréable lorsque la famille (F_t) ne possède pas de "temps de discontinuité". Le processus (A_t) envisagé peut être alors caractérisé par le fait que ses discontinuités ne coïncident pas avec certains temps d'arrêt.

a. Nous dirons qu'un temps d'arrêt T est un temps de discontinuité pour la famille (F_t) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt T_n, qui converge partout vers T et qui est telle que l'on ait :

$$F_T \neq \bigvee F_{T_n}$$

cette dernière notation désignant la tribu engendrée par la réunion des tribus F_{T_n}.

b. On a défini, dans l'exposé 5 de [2], une famille de tribus (F_t) associée de manière naturelle à un processus de Markov (X_t) ; nous nous réfèrerons à ce cas sous le nom de "cas markovien". Il n'est pas difficile de déduire du "théorème de Blumenthal" que cette famille (F_t) ne possède pas de temps de discontinuité.

c. Les définitions suivantes ne possèdent d'intérêt que dans le cas d'une famille (F_t) sans temps de discontinuité.

Nous dirons qu'un temps d'arrêt T est totalement inaccessible si T n'est pas p. s. infini et si, pour toute suite de temps d'arrêt (T_n) qui converge en croissant vers T, l'ensemble

$$\{\omega : T(\omega) < \infty , \ T_n(\omega) < T(\omega) , \ \forall \ n\}$$

est négligeable. Nous dirons que le temps d'arrêt T est <u>inaccessible</u> s'il existe un événement $A \in F_T$ tel que le temps d'arrêt T_A (cf. 1, c) soit totalement inaccessible. Soit T un temps d'arrêt qui n'est pas inaccessible : nous dirons que T est <u>accessible</u>. Le temps d'arrêt égal à $+\infty$ sera considéré comme accessible.

Le théorème suivant donne une autre caractérisation de l'accessibilité.

d. THÉORÈME 5. - <u>Supposons que la famille (F_t) n'ait pas de temps de discontinuité ; pour qu'un temps d'arrêt soit inaccessible, il faut et il suffit qu'il existe une solution de Dirichlet (Y_t) telle que l'on ait</u>

$$P\{Y_T \neq Y_{T-}\} > 0 \quad .$$

<u>Démonstration.</u>

a. <u>Suffisance.</u> - Supposons que l'on ait, par exemple :

$$P\{Y_T \geqslant Y_{T-} + \varepsilon\} > 0$$

où ε est un nombre positif. Désignons par A l'événement $\{Y_T \geqslant Y_{T-} + \varepsilon\}$, qui appartient à F_T. Nous allons montrer que T_A est totalement inaccessible. Donnons-nous une suite de temps d'arrêt T_n qui converge en croissant vers T_A, et posons :

$$B_n = \{\omega : T_n(\omega) < T_A(\omega)\} \quad \text{(événement antérieur à } T_n \text{)}$$

$$B = \{\omega : T_n(\omega) < T_A(\omega) < \infty , \ \forall \ n\}$$

en utilisant le théorème d'arrêt de Doob, on obtient :

$$\int_{B_n} Y_{T_n} \, dP = \int_{B_n} Y_{T_A} \, dP \quad ;$$

on passe ensuite à la limite en utilisant l'intégrabilité uniforme, et il vient :

$$\int_B Y_{T^-} \, dP = \int_B Y_{T_A} \, dP$$

qui contredit la définition de A si l'on a $P[A] > 0$.

b. Nécessité. - Soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible ; définissons un processus croissant intégrable (U_t) de la manière suivante :

$$U_t(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad t < T(\omega) \;; \qquad U_t(\omega) = 1 \quad \text{si} \quad t \geqslant T(\omega) \quad .$$

Le potentiel (X_t) engendré par (U_t) est régulier. S'il ne l'était pas, en effet, on pourrait trouver une suite de temps d'arrêt S_n , qui convergerait en croissant vers un temps d'arrêt S de manière que l'événement

$$A = \{\omega : \ S_n(\omega) < S(\omega) \ , \ \forall \ n \ , \ S(\omega) = T(\omega) < \infty\}$$

ait une probabilité positive. Cet événement appartient à F_S ; la famille (F_t) n'ayant pas de temps de discontinuité, on peut trouver une suite croissante de nombres entiers n_k et des événements $B_k \in F_{S_{n_k}}$, tels que l'on ait :

$$P[(A \cap \complement B_k) \cup (B_k \cap \complement A)] \leqslant P(A)\,(1 - \frac{1}{2^k}) \quad .$$

Posons $C_k = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k$, $C = \bigcap_k C_k$. Si l'on n'avait pas $P(A) = 0$ le temps d'arrêt T_C ne serait pas p. s. infini, et il pourrait être approché, par valeurs strictement inférieures, par les temps d'arrêt T_k qui sont définis par les relations :

$$T_k(\omega) = S_{n_k}(\omega) \quad \text{pour} \quad \omega \in C_k$$

$$T_k(\omega) = \infty \quad \text{pour} \quad \omega \notin C_k \quad .$$

Ceci contredirait l'inaccessibilité totale de T .

Le potentiel (X_t) étant régulier, il est engendré par un processus croissant intégrable continu (V_t) . Nous avons alors la relation :

$$E[U_\infty | F_t] - U_t = E[V_\infty | F_t] - V_t \quad .$$

La martingale $(E[U_\infty - V_\infty \mid F_t])$ présente donc une discontinuité d'amplitude égale à 1 à l'instant T , et ne présente aucune autre discontinuité.

e. Nous arrêterons ici l'étude de l'accessibilité. Signalons cependant deux résultats, que nous ne démontrerons pas.

– Si la famille (F_t) n'a pas de temps de discontinuité, et si T est un temps d'arrêt accessible, il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) qui converge en croissant vers T par valeurs strictement inférieures à T.

– Dans le cas markovien, un temps d'arrêt T est accessible si et seulement si les trajectoires du processus de Markov sont p. s. continues à l'instant T.

f. Soit (A_t) un processus croissant intégrable ; nous dirons que (A_t) est un processus <u>à discontinuités accessibles</u> si l'on a

$$A_T = A_{T^-} \quad \text{p. s.}$$

pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible T.

Soit (A_t) le processus croissant intégrable envisagé dans l'énoncé du théorème 4 ; soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible, et soit (Y_t) la martingale (construite à la fin de la démonstration du théorème 5) qui présente un saut d'amplitude égale à 1 à l'instant T. La relation $[(Y_t), (A_t)]_\infty$ entraîne l'égalité $A_T = A_{T^-}$ p. s., et il en résulte que (A_t) a des discontinuités accessibles. Réciproquement, si (A_t) est un processus à discontinuités accessibles, il ne présente aucune discontinuité commune avec aucune martingale, et il en résulte que la condition du théorème 4 est vérifiée. On a donc établi le :

THÉORÈME 6. – <u>Supposons que la famille (F_t) ne possède pas de temps de discontinuité. Tout potentiel de la classe (D) est engendré par un processus croissant intégrable à discontinuités accessibles, et ce processus est unique.</u>

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOOB (J. L.). – Stochastic processes. – New York, J. Wiley ; London, Chapman and Hall, 1953 (Wiley Publications in Statistics).

[2] Séminaire BRELOT : Théorie du potentiel, t. 5, 1960/61. – Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[3] ŠUR (M. G.). – Fonctionnelles additives continues des processus de Markov et fonctions excessives [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 137, 1961, p. 800-803.

[4] COURRÈGE (Philippe). – Ensembles uniformément intégrables de fonctions et compacité faible dans L^1, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 1, 1962, n° 2, 27 p.