Jacques Deny

Les principes du maximum en théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 2 (1961-1962), exp. nº 10, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A5_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 10

8 juin 1962

LES PRINCIPES DU MAXIMUM EN THÉORIE DU POTENTIEL

par Jacques DENY

Soit X un espace localement compact donné une fois pour toutes, sur lequel on ne fait aucune hypothèse de dénombrabilité. On désigne par C_K (resp. C) l'ensemble des fonctions numériques sur X à support compact (resp. à support quelconque), par M_K (resp. M) l'ensemble des mesures de Radon réelles sur X à support compact (resp. à support quelconque), par C_K^+, ... les sous-ensembles de C_K, ... constitués par des éléments positifs.

Un noyau continu sur X est une application linéaire positive V de C_K dans C. Une telle application est nécessairement continue au sens suivant ; quels que soient l'élément $f_0 \in C_K$, le compact $E \subset X$ et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage u du support $\operatorname{supp}(f_0)$ et un nombre $\eta > 0$ tels que les relations

$$f \in C_K , \quad \operatorname{supp}(f) \subset u , \quad \max_{x \in X} |f(x) - f_0(x)| \leqslant \eta$$

entraînent

$$|Vf(x) - Vf_0(x)| \leqslant \varepsilon , \quad \forall \ x \in E \quad .$$

Le <u>transposé</u> du noyau continu V est l'application linéaire positive V^* de M_K dans M définie par $\langle f , V^* \mu \rangle = \langle Vf , \mu \rangle$ pour tout couple $f \in C_K$, $\mu \in M_K$. Cette application est continue lorsqu'on munit M_K et M des topologies vagues.

On dit que le noyau continu V tend vers 0 à l'infini si, pour toute $f \in C_K$, la fonction continue Vf tend vers 0 à l'infini.

1. Rappel concernant le principe complet du maximum.

DÉFINITION 1. - <u>On dit que le noyau continu</u> V <u>satisfait au principe complet du maximum si, pour tout couple</u> f, $g \in C_K^+$ <u>et pour tout nombre réel</u> $a \geqslant 0$, <u>la relation</u>

$$Vf(x) \leqslant Vg(x) + a$$

a lieu pour tout $x \in X$ dès qu'elle a lieu en tout point du support de f.

Pour $a = 0$, cet énoncé se réduit au "principe de domination" ; pour $g = 0$, il se réduit au principe ordinaire du maximum (voir § 3).

En modifiant légèrement une démonstration donnée d'autre part [1], on obtient facilement l'énoncé du "principe dual" du principe complet du maximum :

THÉORÈME 1. - Pour que le noyau continu V satisfasse au principe complet de maximum, il faut et il suffit que son transposé V^* satisfasse au principe du balayage avec diminution des masses ; autrement dit : quel que soit l'ouvert relativement compact ω et quelle que soit la mesure $\mu \in M_K^+$, il existe au moins une mesure $\mu' \in M_K^+$ possèdant les propriétés suivantes :

(i) μ' est portée par l'adhérence $\overline{\omega}$ de ω ;

(ii) $V^* \mu' \leq V^* \mu$;

(iii) les restrictions à ω des mesures $V^* \mu$ et $V^* \mu'$ sont identiques ;

(iv) $\int d\mu' \leq \int d\mu$.

En effet il est facile de voir que si V^* satisfait au principe du balayage avec diminution des masses, V satisfait au principe complet du maximum (on vérifiera que si $Vf(x) \leq Vg(x) + a$ sur le support de f, on a la même relation en tout point $x \in X$, en utilisant une "balayée" de ε_x sur l'intérieur de $\mathrm{supp}(f)$).

Pour montrer la réciproque, prenons un ouvert relativement compact ω, et désignons par A_ω l'ensemble des mesures positives nulles sur ω (c'est un cône convexe et fermé de M), M_ω^1 l'ensemble des mesures positives portées par $\overline{\omega}$ et de masse totale ≤ 1, U_ω^1 l'image de M^1 par V^* (c'est un compact convexe do M), U l'image de M_K par V^*.

Puisque V satisfait au principe complet du maximum, les relations :

$$" f \in C_K ; \quad f(x) \leq 0 \text{ hors de } \omega , \quad Vf(x) \leq 1 \text{ sur } \omega "$$

---

[1] DENY (Jacques). - Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel, Séminaire de Théorie du Potentiel (Séminaire Brelot-Choquet-Deny), t. 5, 1960/61, exposé n° 6, 9 p.

Démonstration du théorème : pour qu'un noyau continu strictement positif satisfasse au principe de domination, il faut et il suffit que son transposé satisfasse au principe du balayage ; à noter que, dans l'énoncé du théorème suivant, il est inutile de supposer que le noyau soit strictement positif.

entraînent

$$Vf(x) \leq 1 \ , \quad \forall \ x \in X \quad .$$

Il revient au même de dire que les relations :

$$" \ f \in C_K \ ; \quad \langle f , \mu \rangle \leq 0 \ , \quad \forall \ \mu \in A_\omega \ ; \qquad \langle Vf , \mu \rangle \leq 1 \ , \quad \forall \ \mu \in M^1_\omega \ "$$

entraînent

$$\langle Vf , \mu \rangle \leq 1 \ , \quad \forall \ \mu \in M^+_K \ , \qquad \int d\mu = 1 \quad .$$

Transformant ces relations par dualité, on voit que les hypothèses :

(1) $$" \ f \in C_K \ ; \quad \langle f , \mu \rangle \leq 0 \ , \quad \forall \ \mu \in A_\omega \ ; \qquad \langle f , \mu \rangle \leq 1 \ , \quad \forall \ \mu \in U^1_\omega \ "$$

entraînent

$$\langle f , \mu \rangle \leq 1 \ , \quad \forall \ \mu \in U \quad .$$

Soit alors E un demi-espace fermé de M contenant A_ω et U^1_ω, donc l'ensemble convexe et fermé $A_\omega + U^1_\omega$ (cette somme vectorielle est fermée, car A_ω est fermé et U^1_ω est compact). Si l'hyperplan H limitant E ne contient pas l'origine, E est l'ensemble des éléments $\mu \in M$ vérifiant $\langle f , \mu \rangle \leq 1$ pour un élément $f \in C_K$ convenable ; cela entraîne $\langle f , \mu \rangle \leq 0$ pour toute $\mu \in A_\omega$, car A_ω est un <u>cône</u> contenu dans E. Si H contient l'origine, E est l'ensemble des éléments $\mu \in M_K$ vérifiant $\langle f , \mu \rangle \leq 0$ pour un élément $f \in C_K$ convenable. Dans tous les cas cela entraîne, d'après (1), qu'on a

$$\langle f , \mu \rangle \leq 1 \ , \quad \forall \ \mu \in U \quad ,$$

autrement dit que E <u>contient</u> U.

Le convexe fermé $A_\omega + U^1_\omega$ étant l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent, il en résulte qu'on a l'inclusion :

$$U \subset U^1_\omega + A_\omega$$

ce qui exprime précisément que V satisfait au principe du balayage avec diminution des masses.

Rappelons que, pour qu'un noyau continu V tendant vers 0 à l'infini, satisfasse au principe complet du maximum et soit tel que $V(C_K)$ soit dense dans C_0 (ensemble des fonctions numériques continues sur X et tendant vers 0 à l'infini), il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens P_t sur C_0 tels que, pour toute $f \in C_K$ et tout $x \in X$, on ait

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t\, f(x)\, dt \quad .$$

Ce résultat de G. HUNT (2) constitue un progrès décisif dans la recherche des noyaux satisfaisant au principe complet du maximum. Sans revenir sur cette question, nous allons faire quelques remarques concernant deux principes moins étudiés : le principe fort du maximum et le principe classique du maximum.

2. Le principe fort du maximum.

DÉFINITION 2. - On dit que le noyau continu V satisfait au principe fort du maximum si, pour toute fonction $f \in C_K$, la relation $Vf(x) \leq 1$ a lieu partout dès qu'elle a lieu en tout point du support de f.

Il revient au même de dire que, pour toute $f \in C_K$, le module du "potentiel" Vf atteint son maximum en au moins un point du support de f (3).

Une autre forme équivalente est le principe de l'enveloppe convexe (4) ; soit φ une application continue de X dans R^n, à support compact. On peut définir, d'une manière évidente (5), une application $V\varphi$ de X dans R^n, appelée encore

---

(2) Voir la bibliographie et diverses démonstrations dans le tome 5 du Séminaire de Théorie du Potentiel (1960/61) ; voir aussi l'exposé de G. LION dans ce volume du Séminaire, pour une extension du théorème de Hunt, et l'étude du "principe du maximum positif", dont il ne sera pas question ici.

(3) Si le potentiel Vf prend des valeurs de signes contraires, le maximum et le minimum de Vf sont atteints sur le support de F, d'où le nom de "maximum-minimum principle" donné à ce principe par A. BEURLING.

(4) A ma connaissance, cette remarque a été faite pour la première fois par BEURLING, dans le cadre des "espaces de Dirichlet".

(5) Si φ a pour coordonnées φ_i, $V\varphi$ est l'application vectorielle dont les coordonnées sont $V\varphi_i$; on peut évidemment remplacer R^n par un espace vectoriel topologique plus général.

potentiel engendré par φ. Alors, pour tout $x \in X$, le vecteur $V\varphi(x)$ appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble constitué par l'origine de R^n et les valeurs prises par $V\varphi$ sur le support de φ. La démonstration est immédiate, en utilisant le fait que l'enveloppe convexe d'un fermé de R^n est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Voici l'énoncé du principe dual :

THÉORÈME 2. - Pour qu'un noyau continu V satisfasse au principe fort du maximum, il faut et il suffit que son transposé V^* satisfasse au principe du balayage faible avec diminution des masses ; autrement dit : quel que soit l'ouvert relativement compact ω et quelle que soit la mesure $\mu \in M_K^+$, il existe au moins une mesure $\mu' \in M_K^+$ possédant les propriétés (i), (iii), et (iv) de l'énoncé du théorème 1.

La démonstration est toute semblable à celle du théorème 1 ; il suffit de remplacer le cône A_ω par le sous-espace fermé N_ω de M constitué par les mesures ne chargeant pas ω, et d'observer que le principe du balayage faible avec diminution des masses peut s'énoncer de la façon suivante : pour tout ouvert relativement compact, on a l'inclusion : $U \subset N_\omega + U_\omega^1$.

Bien évidemment tout noyau continu satisfaisant au principe complet du maximum satisfait au principe fort du maximum. La question se pose de savoir si la réciproque est exacte, du moins sous certaines hypothèses de régularité ; nous nous bornerons à le montrer dans un cas très particulier :

Remarque. - Si X n'a qu'un nombre fini de points, et si V est un noyau sur X qui n'est pas dégénéré et satisfait au principe fort du maximum, V satisfait au principe complet du maximum.

En effet, d'après le théorème 2, le transposé V^* satisfait au principe du balayage faible ; or, pour un noyau non dégénéré sur un espace fini, le principe du balayage faible entraîne soit le principe du balayage ordinaire (diminution du potentiel en dehors de l'ensemble ω sur lequel on balaye, autrement dit la condition (ii) est satisfaite quels que soient ω et μ), soit le principe du balayage inverse (augmentation du potentiel en dehors de ω) [6]. Le fait que la masse totale de la mesure balayée est diminuée (propriété (iv)) entraîne, comme on

---

(6) Voir : CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Modèles finis en théorie du potentiel, J. Anal. math., t. 5, 1956/57, p. 77-135.

le voit immédiatement en prenant pour μ une masse ponctuelle et pour ω un ensemble réduit à un point, qu'il ne peut s'agir que du principe du balayage ordinaire. D'après le théorème 1, V satisfait donc au principe complet du maximum.

3. Le principe classique du maximum.

DÉFINITION 3. - On dit que le noyau continu V satisfait au principe (classique) du maximum, si, pour toute fonction $f \in C_K^+$, la relation $Vf(x) \leq 1$ a lieu partout dès qu'elle a lieu en tout point du support de f.

Autrement dit, le maximum de tout potentiel Vf, avec $f \in C_K^+$, est atteint en au moins un point du support de f.

THÉORÈME 3 (7). - Pour qu'un noyau continu V satisfasse au principe du maximum, il faut et il suffit que son transposé V^* satisfasse au principe du pseudo-balayage ; autrement dit, quel que soit l'ouvert relativement compact ω et quelle que soit la mesure $\mu \in M_K^+$, il existe au moins une mesure $\mu' \in M_K^+$ possédant les propriétés suivantes :

(i) μ' est portée $\overline{\omega}$;

(iii)' la restriction de $V^* \mu'$ à ω est au moins égale à la restriction de $V^* \mu$;

(iv) $\int d\mu' \leq \int d\mu$.

La démonstration est toute semblable à celle du théorème 1 ; on remplacera l'ensemble A_ω par le cône fermé B_ω constitué par les mesures dont la restriction à ω est ≤ 0, et on observera que le principe du pseudo-balayage peut s'énoncer de la façon suivante : pour tout ouvert relativement compact ω on a l'inclusion : $U \subset B_\omega + U_\omega^1$.

Bien entendu tout noyau continu satisfaisant au principe fort du maximum satisfait au principe classique, mais la réciproque est inexacte.

On connait beaucoup d'exemples de noyaux de convolution sur R^n satisfaisant au principe du maximum. L'exemple le plus important dans la pratique est le noyau de convolution par une fonction intégrable ne dépendant que de la distance à

---

(7) Ce résultat m'a été communiqué par A. BEURLING dans le cas particulier des noyaux de composition symétriques sur un groupe abélien discret.

l'origine et sous-harmonique en dehors de l'origine [8]. Des exemples plus généraux ont été construits récemment par G. CHOQUET [9].

Le problème de déterminer explicitement tous les noyaux satisfaisant au principe du maximum est sans doute assez difficile, et il semble utile, pour le résoudre, d'étendre le champ des noyaux en considérant des opérateurs qui ne sont pas nécessairement positifs. Cependant le théorème 3 permet d'apporter une réponse partielle à ce problème dans le cas des noyaux de convolution. Sans vouloir développer ici ces considérations, nous nous bornerons à signaler que le "quotient" de deux noyaux de Hunt (voir § 1) satisfait au principe du maximum. D'une façon précise :

THÉORÈME 4. - Si V est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini, et s'il existe deux noyaux de Hunt V' et V'' permutables et tels que $V'V = V''$, alors V satisfait au principe du maximum.

Voici une démonstration sommaire : Soit P'_t le semi-groupe associé à V', et soit

$$R'_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P'_t \, dt$$

la résolvante associée $(\lambda > 0)$; d'après la relation élémentaire $V'(I - \lambda R') = R'_\lambda$ et la permutabilité de V' et V'', on a

$$R'_\lambda V = V''(I - \lambda R'_\lambda) \qquad (2)$$

Soit alors $f \in C_K^+$ et soit $\varepsilon > 0$. Appelons m le maximum de $Vf(x)$ sur le support de f. Pour λ assez grand $(\lambda \geq \lambda_0)$, on a

$$\lambda R'_\lambda Vf(x) \leq m + \varepsilon \qquad \forall \ x \in \operatorname{supp}(f)$$

car $\lambda R'_\lambda$ converge fortement vers l'opérateur identique I lorsque λ tend vers l'infini. Pour ces valeurs de λ, on a donc, d'après (2) :

---

[8] Voir essentiellement la thèse de FROSTMAN, qui a montré aussi qu'un tel noyau satisfait au principe du pseudo-balayage (appelé "balayage imprécis"). On trouvera un exposé récent des principales propriétés de ces noyaux dans : CARLESON (L.). - Selected problems on exceptional sets. - Uppsala, 1961.

[9] CHOQUET (Gustave). - Sur une large classe de noyaux de convolution satisfaisant au principe du maximum, Séminaire de Théorie du Potentiel (Séminaire Brelot-Choquet-Deny), t. 3, 1958/59, exposé n° 14, 9 pages.

$$\lambda V''f(x) \leqslant \lambda^2 V''R'_\lambda f(x) + m + \varepsilon \qquad \forall \quad x \in \mathrm{supp}(f)$$

et la même inégalité a lieu pour tout $x \in X$, car le noyau de Hunt V'' satisfait au principe complet du maximum (ici la fonction $g = \lambda^2 R'_\lambda f$ est un élément de C_0^+ et non de C_K^+, mais le résultat est encore valable). Toujours d'après (2), on a donc :

$$\lambda R'_\lambda Vf(x) \leqslant m + \varepsilon \qquad \forall \quad x \in X \qquad .$$

En faisant tendre λ vers l'infini, puis ε vers 0, il vient finalement $Vf(x) \leqslant m$, ce qui exprime bien que V satisfait au principe du maximum.