SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

GUSTAVE CHOQUET

Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, n° 2 (1961-1962), exp. n° 8, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A3_0>

REMARQUES À PROPOS DE LA DÉMONSTRATION D'UNICITÉ DE P.-A. MEYER

par Gustave CHOQUET

MEYER vient de donner une démonstration simplifiée du théorème d'unicité des représentations intégrales dans les simplexes, en utilisant l'idée de BISHOP et DeLEEUW d'introduire un ordre dans l'ensemble des mesures positives. Son énoncé s'applique aussi bien au cas métrisable qu'au cas non métrisable.

Nous allons structurer ici autrement sa démonstration, ce qui, d'une part , la simplifiera encore un peu, et d'autre part, fournira deux critères simples permettant de reconnaître si un compact convexe est un simplexe.

Suivant la présentation de BISHOP et DeLEEUW, de nombreux auteurs étudient la question des représentations intégrales dans le cadre suivant : On part d'un espace topologique compact X , d'un sous-espace vectoriel B de $C(X)$ tel que B sépare X , et toutes les définitions et démonstrations sont données en termes de X et B . Or si ce point de départ peut être commode pour la découverte, ou dans le cas où B a une structure supplémentaire telle qu'une structure d'algèbre, il nous semble que l'exposé des résultats est plus agréable si l'on choisit le cadre équivalent au premier, dans lequel X' est un convexe compact d'un espace vectoriel topologique (e. v. t.) localement convexe séparé, et B' l'espace vectoriel des fonctions affines continues sur X' ; on dispose alors d'un langage géométrique qui manque dans l'autre mode d'exposition.

On passe du premier cadre au second en plongeant X dans l'espace R^B par l'application

$$x \to (f(x))_{f\in B} \quad .$$

On peut alors identifier B à l'ensemble des traces, sur X , des formes linéaires continues sur B . On prend enfin pour X' l'enveloppe convexe fermée de X dans R^B , et pour B' l'espace vectoriel des fonctions affines continues sur X' .

Les points frontière de X ne sont autres alors que les points extrémaux de X' (qui appartiennent tous à X).

Notations. - E est un e. v. t. localement convexe séparé ; $\mathfrak{X}$ un cône convexe de E à base compacte X. Soient $\mathfrak{A}$ l'ensemble des fonctions affines continues sur X ; $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions affines continues sur X (éventuellement prolongées à $\mathfrak{X}$ en une fonction positivement homogène).

Pour toute $f \in \mathcal{C}$, on pose :

$$\hat{f} = \inf_{\substack{\ell \in \mathfrak{A} \\ \ell \geq f}} \ell \quad .$$

Alors $\hat{f}$ est concave semi-continue supérieurement et l'on a, pour tout $x \in X$, (utiliser Hahn-Banach dans $X \times R$)

$$(1) \qquad \hat{f}(x) = \sup_{\substack{x_i \in \mathfrak{X} \\ \sum x_i = x}} \sum f(x_i) = \sup \int f \, d\mu \quad \text{pour} \quad \mu \geq 0 \quad \text{de résultante} \quad x \quad .$$

Il résulte en particulier de (1) que si x est extrémal, $\hat{f}(x) = f(x)$. Plus précisément l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux est l'intersection des $\{x : \hat{f}(x) = f(x)\}$ (ce sont des G_δ que nous appellerons ensembles bordants).

Notons aussi la relation évidente :

$$(2) \qquad \widehat{f + g} \leq \hat{f} + \hat{g} \quad .$$

LEMME 1. - *Si $\mathfrak{X}$ est réticulé (X simplexe), l'application $f \to \hat{f}$ est positivement linéaire.*

Comme $\widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f}$ pour tout $\lambda > 0$, il suffit de montrer que $\widehat{f + g} = \hat{f} + \hat{g}$ pour tous f, $g \in \mathcal{C}$.

Or d'après (1), pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(x_i)_{i \in I}$ et $(x_j)_{j \in J}$ (où x_i, $x_j \in \mathfrak{X}$ et I, J finis ; avec $\sum x_i = \sum x_j = x$) tels que

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \sum f(x_i) + \theta\varepsilon \\ \hat{g}(x) &= \sum g(x_j) + \theta'\varepsilon \end{aligned}\right. \qquad (\text{où} \quad 0 \leq \theta, \quad \theta' \leq 1) \quad .$$

Comme $\mathfrak{X}$ est réticulé, il existe $(x_{i,j})_{i,j \in I \times J}$ avec $x_{ij} \in \mathfrak{X}$ et $x_i = \sum_j x_{ij}$, $x_j = \sum_i x_{ij}$.

On a donc, compte tenu que f, g sont convexes :

$$\hat{f}(x) = \sum f(x_{ij}) + \theta''\varepsilon$$

$$\hat{g}(x) = \sum g(x_{ij}) + \theta'''\varepsilon \quad .$$

D'où

$$\hat{f}(x) + \hat{g}(x) = \sum (f + g)(x_{ij}) + (\theta'' + \theta''')\ \varepsilon \leqslant \widehat{(f + g)}(x) + 2\varepsilon$$

autrement dit

$$\hat{f} + \hat{g} \leqslant \widehat{f + g} \quad . \tag{3}$$

Des relations (2) et (3) résulte la relation cherchée.

LEMME 2. - <u>Si</u> $\mathfrak{X}$ <u>est réticulé, pour tout</u> $f \in \mathcal{C}$, $\hat{f}$ <u>est affine</u>.

En effet, d'après la relation (1), pour tous x, $y \in \mathfrak{X}$, et tout $\varepsilon > 0$,

$$\hat{f}(x + y) = \sum_{\substack{\sum u_i = x+y \\ u_i \in \mathfrak{X}}} f(u_i) + \theta\varepsilon \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1) \quad .$$

Or $\mathfrak{X}$ étant réticulé, la relation $x + y = \sum u_i$ entraîne l'existence de (x_i) et (y_i) où x_i et $y_i \in \mathfrak{X}$, avec

$$\sum x_i = x \quad \text{et} \quad \sum y_i = y \quad ,$$

d'où :

$$\hat{f}(x + y) = \sum f(u_i) + \theta\varepsilon \leqslant \sum f(x_i) + \sum f(y_i) + \varepsilon \leqslant \hat{f}(x) + \hat{f}(y) + \varepsilon \quad .$$

Donc

$$\hat{f}(x + y) \leqslant \hat{f}(x) + \hat{f}(y) \quad .$$

La fonction $\hat{f}$ est positivement homogène, concave et convexe, donc ~~linéaire sur~~ $\mathfrak{X}$, donc affine sur X.

PROPOSITION 3. - <u>Dans l'ensemble</u> $\mathfrak{M}_+^1(X)$ <u>ordonné par la relation</u> :

$\mu \prec \nu$ <u>si</u> $\int f\,d\mu \leq \int f\,d\nu$ <u>pour toute</u> $f \in \mathcal{C}$, <u>avec égalité si</u> $f \in \mathfrak{a}$,

<u>toute</u> ε_a <u>est majorée par une mesure maximale unique</u> μ_a .

<u>Pour qu'une</u> μ <u>de</u> $\mathfrak{M}_+^1(X)$ <u>de barycentre</u> a <u>soit égale à</u> μ_a <u>il faut et il suffit qu'elle soit portée par chacun des ensembles bordants de</u> X .

Soit en effet $a \in X$. L'application $f \to \hat{f}(a)$ de $\mathcal{C}$ dans R est, d'après le lemme 1, positivement linéaire et croissante. Donc comme $\mathcal{C}$ est total dans $C(X)$ (d'après STONE-WEIERSTRASS) cette application définit une mesure de Radon $\mu_a \geq 0$ sur X , telle que $\int f\,d\mu_a = \hat{f}(a)$ pour toute $f \in \mathcal{C}$.

Si $f \in \mathfrak{a}$, on a $\hat{f} = f$, d'où $\hat{f}(a) = f(a)$; donc μ_a a pour norme 1 et pour barycentre a .

La mesure μ_a est évidemment le plus grand élément de $\mathfrak{M}_+^1(X)$ qui domine ε_a puisque, pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a d'après (1) :

$$\int f\,d\mu_a = \hat{f}(a) = \sup \int f\,d\mu \text{ pour les } \mu \text{ dominant } \varepsilon_a \quad .$$

D'autre part, on a :

$$\hat{f}(a) = \int f\,d\mu_a \leq \int \hat{f}\,d\mu_a \leq \int_{\substack{\ell\in\mathfrak{a}\\ \ell\geq f}} \ell\,d\mu_a = \ell(a) \quad .$$

Comme $\hat{f}(a)$ et $\ell(a)$ sont arbitrairement voisines, on a

$$\int f\,d\mu_a = \int \hat{f}\,d\mu_a \quad .$$

Donc, pour toute $f \in \mathcal{C}$, μ_a est portée par l'ensemble bordant $\{x : \hat{f}(x) = f(x)\}$.

<u>Inversement</u>, si une $\mu \in \mathfrak{M}_+^1(X)$ a pour barycentre ε_a et est portée par chacun des ensembles bordant X , on a

$$\int f\,d\mu = \int \hat{f}\,d\mu \text{ pour toute } f \in \mathcal{C} \quad .$$

Or $\hat{f}$ est affine et s. c. s. donc d'après une propriété indiquée par MOKOBODZKI, les $\ell \in \mathfrak{a}$ telles que $\hat{f} \leq \ell$ constituent un ordonné filtrant décroissant qui converge vers $\hat{f}$ (utiliser les graphes de $\hat{f}$ et des ℓ dans $X \times R$ et Hahn-Banach) ; donc $\int \hat{f}\, d\mu = \hat{f}(a)$.

On a donc

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_a \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{C} \qquad ,$$

d'où

$$\mu = \mu_a \qquad .$$

<u>Cas particulier</u>. - Si X est métrisable, il existe (HERVÉ) une $f \in \mathcal{C}$ strictement convexe ; on a alors $\mathcal{E}(X) = \{x : \hat{f}(x) = f(x)\}$; autrement dit $\mathcal{E}(X)$ est lui-même un ensemble bordant. <u>Donc</u> μ_a <u>est la seule mesure</u> μ <u>de barycentre</u> a <u>et portée par</u> $\mathcal{E}(X)$.

REMARQUE 1. - Dans tout ce qui précède on pourrait remplacer $\mathcal{C}$ par n'importe quel sous-cône convexe $\mathcal{C}'$ total dans $C(X)$; par exemple (MEYER) par l'ensemble des f qui sont enveloppe supérieure d'une famille finie (f_i) d'éléments de $\mathfrak{A}$.

Or, dire qu'une $\mu \geq 0$ est portée par tout ensemble bordant équivaut à dire qu'elle ne charge aucun des ensembles :

$$\{x : \hat{f}(x) \geq f(x) + \varepsilon\} \qquad (\text{où } \varepsilon > 0 \text{ et } f \in \mathcal{C}') \qquad .$$

Si $f = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n$ (où $\ell_i \in \mathfrak{A}$), cet ensemble K est l'intersection des compacts convexes $K_i = \{x : \hat{f}(x) \geq \ell_i(x) + \varepsilon\}$. Ce compact K_i a dans X un complémentaire convexe.

Il serait utile d'avoir sur ces compacts K des renseignements précis, sans quoi, lorsque X n'est pas métrisable, la proposition 3, affirmant l'unicité de la mesure μ de barycentre a et portée par tout ensemble bordant X , ne sera pas pleinement utilisable.

REMARQUE 2. - Pour tout compact convexe X , l'ensemble des $\mu \geq 0$ portées par tout ensemble bordant X est évidemment réticulé et complètement réticulé. Or d'après un résultat important de MOKOBODZKI qui précise celui de BISHOP-DeLEEUW, tout $a \in X$ est barycentre d'au moins une mesure $\mu \in \mathfrak{M}_+^1$ portée par tout ensemble bordant X .

Il en résulte aussitôt, comme réciproque de la proposition 3, que si X est tel que tout $a \in X$ est barycentre d'au plus une μ portée par tout ensemble bordant X, $\mathfrak{X}$ est réticulé (donc X un simplexe).

Rappelons que MOKOBODZKI montre aussi que toute μ portée par chacun des ensembles bordant X est pseudo-portée par $\mathcal{E}(X)$, c'est-à-dire ne charge aucun compact de Baire (compact et G_δ) de X disjoint de $\mathcal{E}(X)$.

<u>Mesurabilité</u>. - Supposons à nouveau $\mathfrak{X}$ réticulé.

Pour toute $f \in \mathcal{C}$, l'application $a \to \int f \, d\mu_a = \int \hat{f} \, d\mu_a = \hat{f}(a)$ est s. c. s. Or toute $\varphi \in C(X)$ est limite uniforme de différences de fonctions de $\mathcal{C}$.

Donc pour toute $\varphi \in C(X)$, l'application $a \to \int \varphi \, d\mu_a$ est limite uniforme de différences de deux fonctions s. c. s ; c'est donc une application de 1re classe.

<u>L'application $a \to \mu_a$ de X dans $\mathfrak{M}_+(X)$ est donc faiblement de 1re classe, donc universellement mesurable,</u> (MEYER).

1. Deux propriétés caractéristiques des simplexes.

1.1. - Les lemmes 1 et 2 énoncent des propriétés des simplexes ; la question se pose de savoir si elles sont caractéristiques. Nous allons le démontrer pour le lemme 2.

PROPOSITION 4. - <u>Soit X un convexe compact ; et désignons par $\mathcal{C}'$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ total dans</u> $C(X)$.

$$(X \text{ est un simplexe}) \iff (\forall \ f \in \mathcal{C}' , \ \hat{f} \text{ est affine}) .$$

Le lemme 2 démontre $\Longrightarrow$. Démontrons maintenant $\Longleftarrow$.

Soient μ et $\nu \in \mathfrak{M}_+^1(X)$, de barycentre a et portées par tout ensemble bordant X. Si $f \in \mathcal{C}'$, on a $\hat{f}$ affine, donc

$$\int f \, d\mu = \int \hat{f} \, d\mu = \hat{f}(a) = \int \hat{f} \, d\nu = \int f \, d\nu .$$

On a $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu$ pour toute $f \in \mathcal{C}'$, d'où $\mu = \nu$.

Donc l'application $\mu \to \int t \, d\mu(t)$ de M dans $\mathfrak{X}$, où M désigne le cône des mesures positives portées par tout ensemble bordant X, est injective.

D'après le résultat de MOKOBODZKI rappelé plus haut, elle est surjective ; elle est donc bijective.

Or $\mathcal{M}$ est réticulé, donc $\mathfrak{X}$ l'est aussi.

1.2. - Nous allons maintenant démontrer une propriété caractéristique des simplexes qui est, dans le cas général, l'analogue de la propriété démontrée par BAUER pour les convexes compacts X tels que $\mathcal{E}(X)$ soit compact. Rappelons l'énoncé de BAUER :

$$(\mathfrak{a} \text{ ordonné par } \mathfrak{a}_+ \text{ est réticulé}) \Longleftrightarrow (X \text{ est un simplexe et } \mathcal{E}(X) \text{ est compact}) .$$

X désignant toujours un convexe compact de E, désignons par $\mathcal{C}_s$ le cône des applications convexes et s. c. s. de X dans $[-\infty, +\infty[$, et par $\mathfrak{a}_s$ le sous-cône de $\mathcal{C}_s$ constitué par les fonctions affines (au sens large).

Continuons à poser, pour toute $f \in \mathcal{C}_s$:

$$\hat{f} = \inf_{\substack{\ell \in \mathfrak{a} \\ \ell \geq f}} \ell .$$

Évidemment $\hat{f}$ est concave et s. c. s., et la relation $f = \hat{f}$ équivaut à dire que $f \in \mathfrak{a}_s$.

D'autre part, compte tenu de la semi-continuité supérieure de f, on montre aisément que si x est extrémal, $\hat{f}(x) = f(x)$.

PROPOSITION 5. - <u>Si</u> $\mathfrak{X}$ <u>est réticulé, pour toute</u> $f \in \mathcal{C}_s$, <u>on a</u> $\hat{f} \in \mathfrak{a}_s$ <u>et pour tout</u> $a \in X$,

$$\hat{f}(a) = \int f \, d\mu_a .$$

<u>Il en résulte que l'application</u> $f \to \hat{f}$ <u>de</u> $\mathcal{C}_s$ <u>sur</u> $\mathfrak{a}_s$ <u>est positivement linéaire</u>.

Si pour toute $f \in \mathcal{C}_s$ la relation (1) du début de cet exposé était encore vraie, la démonstration des lemmes 1 et 2 s'appliquerait mot pour mot à celle de la proposition 5. Mais cette relation est fausse, comme le montre l'exemple suivant : $X = \mathcal{M}_+^1([0, 1])$ et f est la fonction qui vaut 1 sur $\mathcal{E}(X) = [0, 1]$ et 0 partout ailleurs. On a bien $f \in \mathcal{C}_s$, et la relation (1) n'est visiblement pas vérifiée.

Voici la démonstration ; rappelons que μ_a désigne la mesure de barycentre a canoniquement associée au point a (proposition 3). Soit $f \in \mathcal{C}_s$.

Si (ℓ_i) désigne une famille finie d'éléments de $\mathfrak{A}$ avec $\ell_i \geq f$, posons $\varphi = \inf(\ell_i)$. Comme φ est concave et continue, la fonction $\check{\varphi} = -\widehat{(-\varphi)}$ est affine s. c. i., et égale à φ sur un ensemble bordant X. On a donc, pour tout $a \in X$:

$$\check{\varphi}(a) = \int \check{\varphi}\, d\mu_a = \int \varphi\, d\mu_a \geq \int f\, d\mu_a \quad .$$

Or f étant à la fois convexe et s. c. s., il est immédiat que $\int f\, d\mu_a \geq f(a)$.

On a donc $\check{\varphi} \geq f$ dans X.

Or, de la semi-continuité supérieure de f résulte que, pour tout $a \in X$, il existe $\mu \in \mathfrak{M}_+^1(X)$ de barycentre a, telle que $\hat{f}(a) = \int f\, d\mu$ (utiliser dans $X \times R$ l'ensemble des points en dessous du graphe de f).

On a donc :

$$\hat{f}(a) = \int f\, d\mu \leq \int \check{\varphi}\, d\mu = \check{\varphi}(a)$$

d'où

$$\hat{f} \leq \check{\varphi} \quad .$$

Donc les $\check{\varphi}$ constituent, comme les φ, un ensemble filtrant décroissant qui converge vers $\hat{f}$. Comme les $\check{\varphi}$ sont affines, $\hat{f}$ l'est donc aussi.

Donc, pour tout $a \in X$,

$$\hat{f}(a) = \int \hat{f}\, d\mu_a = \int f\, d\mu_a \quad .$$

Le reste de la proposition 5 en résulte.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> X <u>un convexe compact.</u>

($\mathfrak{X}$ <u>est réticulé</u>) $\Longleftrightarrow$ (<u>le cône</u> $\mathfrak{A}_s$ <u>est semi-réticulé supérieurement</u>) .

Supposons $\mathfrak{X}$ réticulé. Si $f, g \in \mathfrak{A}_s$, posons $h = \sup(f, g)$. On a $h \in \mathcal{C}_s$, d'où $\hat{h} \in \mathfrak{A}_s$ d'après la proposition 5.

La relation $\hat{h}(a) = \int h \, d\mu_a$ montre que $\hat{h}$ est le plus petit élément de $\mathfrak{A}_s$ qui majore h, autrement dit f et g ; donc dans $\mathfrak{A}_s$, $f \vee g = \widehat{\sup(f, g)}$.

Inversement, supposons $\mathfrak{A}_s$ semi-réticulé supérieurement (opération notée $\vee$). Soit (ℓ_i) une famille finie d'éléments de $\mathfrak{A}$, et posons

$$f = \sup_i (\ell_i) , \qquad f' = \bigvee_i f_i \qquad .$$

Par hypothèse, pour toute $\ell \in \mathfrak{A}$ telle que $\ell \geq \ell_i$ pour tout i, on a $\ell \geq f'$, donc

$$\hat{f} = \inf_{\ell \geq f} \ell \geq f' \qquad .$$

Mais on sait d'autre part que

$$f' = \inf \text{ des } \ell \text{ telles que } \ell \in \mathfrak{A} \text{ et } \ell \geq f' \qquad .$$

Donc $f' \geq \hat{f}$; autrement dit $\hat{f} = f'$.

Donc $\hat{f}$ est affine pour toute f appartenant au sous-cône $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ constitué par les $\sup(\ell_i)$; comme $\mathcal{C}'$ est total dans $C(X)$, la proposition 4 montre que X est un simplexe.

2. Problèmes.

1° Si X est un convexe compact tel que $f \to \hat{f}$ (où $f \in \mathcal{C}$) soit additive, montrer que X est un simplexe (réciproque du lemme 1).

2° Les démonstrations du texte, en particulier celles des propositions 5 et 6 montrent l'intérêt qu'il y aurait à déterminer si, pour toute fonction affine borélienne g sur un X convexe compact, on a toujours

$$\int g \, d\mu = g(a) \qquad ,$$

où a désigne la résultante de la mesure $\mu \in \mathfrak{M}_+(X)$.

3° Trouver un exemple de X convexe compact (éventuellement un simplexe) où "pseudo-portée par $\mathcal{E}(X)$" n'équivaut pas à "portée par les ensembles bordant X".

4° Trouver une propriété intéressante des exemples $\{x : \hat{f}(x) \geq f(x) + \varepsilon\}$, lorsque par exemple $f = \sup(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ avec $\varphi_i \in \mathfrak{A}$.

Remarque. - Noter que si X est un espace compact et B un e. v. $\subset C(X)$ séparant X, le fait que toute ε_x (où $x \in X$) soit équivalente à une mesure unique portée par la frontière fine de X n'entraîne nullement qu'on soit dans le cas réticulé : Il suffit pour le voir de prendre pour X la frontière d'un carré de R^2 et pour B l'ensemble des traces sur X des frontières affines sur R^2.

3. Démonstration d'existence (d'après BONSALL).

Nous indiquons ici, à titre d'information, l'essentiel de la démonstration du théorème d'existence des représentations intégrales dans le cas métrisable, d'après BONSALL. Avec celle d'HERVÉ, c'est actuellement la plus simple connue. Les notations restent les mêmes que précédemment, c'est-à-dire que X est pour l'instant un convexe compact quelconque de E.

Pour toute $f \in C(X)$ on pose

$$\hat{f} = \inf_{\substack{\ell \in \mathfrak{A} \\ \ell \geq f}} \ell \quad .$$

Si alors $a \in X$, la fonctionnelle $f \to \hat{f}(a)$ est sous-linéaire. Donc d'après le théorème de Hahn-Banach sous sa forme classique, il existe une forme linéaire μ sur $C(X)$ telle que

$$\mu(f) \leq \hat{f}(a) \quad \text{pour toute} \quad f \in C(X) \quad . \tag{4}$$

Lorsque $f \in \mathfrak{A}$, $\hat{f} = f$. Donc d'après (4), et compte tenu que $\mathfrak{A}$ est un espace vectoriel, on a

$$\mu(f) = f(a) \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathfrak{A} \quad . \tag{5}$$

Comme $\hat{f} \leq 0$ pour toute $f \leq 0$, on a $\mu(f) \leq 0$ si $f \leq 0$, donc μ est une mesure de Radon positive sur X. La relation (5) montre que sa norme est 1 et son barycentre a.

Si X est métrisable, il existe une $f_0 \in \mathcal{C}$ qui soit strictement convexe (prendre $f_0 = \sum \ell_n^2$, où $\ell_n \in \mathfrak{A}$ et où les ℓ_x séparent X, leurs normes sur X décroissant assez vite).

Revenons en arrière : D'après Hahn-Banach nous pouvions imposer à μ de vérifier aussi la condition.

$$\mu(f_0) = \hat{f}_0(a) \qquad (6)$$

Supposons cette condition vérifiée.

Comme $\hat{f}_0$ est concave s. c. s., et que a est barycentre de μ, on a :

$$\mu(\hat{f}_0) \leqslant \hat{f}_0(a)$$

(utiliser par exemple la définition de $\hat{f}_0$ et la relation (5)). On a donc

$$\hat{f}_0(a) = \mu(f_0) \leqslant \mu(\hat{f}_0) \leqslant \hat{f}_0(a) \quad .$$

Donc $\mu(f_0) = \mu(\hat{f}_0)$, donc comme $f_0 \leqslant \hat{f}_0$, μ est portée par l'ensemble $\{x : \hat{f}_0(x) = f_0(x)\}$, donc est portée par $\mathcal{E}(X)$.

<u>On a donc bien montré que, si</u> X <u>est métrisable, tout</u> $a \in X$ <u>est barycentre d'une</u> $\mu \geqslant 0$ <u>portée par</u> $\mathcal{E}(X)$.

Post-scriptum. - Depuis la rédaction de cet exposé, les problèmes 1, 2, 3 posés ci-dessus ont été résolus.

1. Ce premier problème a reçu de MEYER une réponse positive (voir l'exposé n° 7 de MEYER).

2. Nous allons voir que la réponse est positive pour les fonctions de 1re classe, mais négative à partir de la 2e classe.

PROPOSITION 7. - <u>Toute</u> f <u>numérique convexe sur un convexe quelconque</u> X <u>d'un</u> e. v. t. E , <u>ou bien n'est localement bornée inférieurement autour d'aucun point, ou bien l'est autour de tout point.</u>

COROLLAIRE. - <u>Si</u> X <u>est compact, toute</u> f <u>convexe sur</u> X <u>est bornée inférieurement sur</u> X , <u>ou bien n'est bornée inférieurement autour d'aucun point.</u>

Application évidente au cas où f est affine et de 1re classe.

LEMME. - Soient E un e. v. t. localement convexe séparé, X un convexe compact de E, et f une fonction affine de 1re classe sur X. Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_+(X)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\mu_n \in \mathfrak{M}_+(X)$ telle que :

1° Toute μ_n soit portée par un sous-convexe compact de X sur lequel f oscille de moins de ε ;

2° $\sum \mu_n = \mu$.

La démonstration utilise le fait que la restriction de f à tout fermé de X admet au moins un point de continuité. On en déduit aussitôt le résultat suivant :

PROPOSITION 8. - Toute fonction affine de 1re classe sur un X convexe compact est bornée et, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_+^1(X)$ on a : $\int f\, d\mu = f(a)$, où a est le barycentre de μ.

Nous allons voir par un exemple que ce résultat ne s'étend pas à toutes les f affines de 2e classe.

Prenons $X = \mathfrak{M}_+^1([0, 1])$ et pour toute $\nu \in X$, posons :

$$g(\nu) = \text{masse totale de la partie discrète de } \nu .$$

La fonction g est affine et c'est la limite des g_n, où $g_n(\nu)$ = borne supérieure des $\nu(A)$ par tous les sous-ensembles A de $[0, 1]$ ayant au plus n points.

Il est immédiat que g_n est s. c. s., donc g est de 2e classe. Or la relation $\int g\, d\mu = g(a)$ n'est pas vérifiée lorsque μ est une mesure diffuse portée par $[0, 1]$, sous-ensemble de X.

Nous allons voir que cependant les fonctions boréliennes affines sur X convexe compact ont par ailleurs un comportement assez régulier.

PROPOSITION 9. - Toute fonction affine borélienne sur X convexe compact est bornée.

Si une suite (f_n) de fonctions affines bornées sur cet X converge simplement, les f_n sont uniformément bornées sur X.

Il résulte évidemment de là et du théorème de Lebesgue que la fonction affine g de 2e classe construite ci-dessus n'est pas limite simple de fonctions affines de 1re classe, puisque sinon, d'après la proposition 8, elle vérifierait les relations $\int g\, d\mu = g(a)$.

La proposition 9 résulte immédiatement d'un théorème connu affirmant que dans un espace de Banach toute forme linéaire borélienne est continue.

3. Un exemple imagé par MOKOBODZKI établit de façon définitive que la bonne notion n'est pas celle de "mesure pseudo-portée par $\mathcal{E}(X)$ ", mais celle de "mesure portée par le bord de X ", et que ces deux notions sont distinctes, même lorsque X est un simplexe.

Voici l'exemple : Soit K un espace topologique compact contenant un point a n'ayant pas une base dénombrable de voisinages, et portant une mesure diffuse $\mu \geq 0$ de masse 1 (par exemple $K = [0 , 1]^I$ avec I non dénombrable). Soit B le sous-espace vectoriel de $C(K)$ constitué par les f telles que $f(a) = \int f \, d\mu$. Il est immédiat que la frontière de K relative à B est K diminué du point a . Or a n'est pas un compact de Baire, donc ε_a est pseudo-portée par la frontière de K . Or ε_a n'est pas portée par le bord de K , dont on montre aisément qu'il est identique à la frontière (autrement dit, cette frontière est l'un des ensembles bordant K).

On vérifie par ailleurs que le dual de B est réticulé.

Si l'on préfère un exemple analogue en termes de formes affines sur un convexe compact X , il suffit d'utiliser le plongement canonique de K dans R^B et de prendre pour X son enveloppe convexe compacte, qui sera ici un simplexe. Les mesures maximales sur X sont, non pas celles pseudo-portées par $\mathcal{E}(X)$, mais celles portées par les ensembles bordant X .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (E.) and DeLEEUW (K.). - The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 305-331.

[2] BONSALL (F. F.). - On the representation of the points of a convex set, J. London math. Soc. (à paraître).

[3] CHOQUET (Gustave). - Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 10, 1960, p. 333-344.

[4] HERVÉ (Michel). - Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 253, 1961, p. 366-368.

[5] MEYER (Paul-André). - Sur les démonstrations nouvelles du théorème de Choquet, Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 6, 1962, n° 7, p. 9.

[6] MOKOBODZKI (Gabriel). - Balayage défini par un cône convexe de fonctions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 803-805.