Marcel Brelot

Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 1 (1961-1962), exp. nº 1c, p. 27-40

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_1_A3_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 1c

29 mars 1962

QUELQUES PROPRIÉTÉS ET APPLICATIONS NOUVELLES DE L'EFFILEMENT (1)

par Marcel BRELOT

1. – Je vais d'abord compléter des recherches axiomatiques très générales exposées l'an dernier et publiées dans [4], puis je donnerai des démonstrations ou résultats nouveaux, d'ailleurs en partie inspirés ou suggérés par DOOB, concernant l'effilement classique ou l'effilement à la frontière de Martin, avec certaines extensions à des cas axiomatiques beaucoup plus généraux.

I

2. – Reprenons une famille U de fonctions réelles $\geqslant 0$ quelconques, dans un espace topologique quelconque Ω , comprenant les fonctions 0 et $+\infty$ et satisfaisant à la condition

$$u \in U \implies \lambda u \in U \qquad (\lambda > 0) \quad .$$

On appelle réduite relative à l'ensemble $e \subset \Omega$ et à la fonction $\varphi \geqslant 0$ (donnée au moins sur l'ensemble $e \subset \Omega$)

$$R_\varphi^e = \inf u \qquad (u \in U \; , \; u \geqslant \varphi \; \text{ sur } \; e) \quad .$$

La régularisée (inférieure) $\hat{f}$ d'une fonction réelle f est la lim inf de f en chaque point.

<u>Effilement faible</u>. – On avait précédemment dit que e est effilé en $x_0 \notin e$ si $\inf\limits_\sigma R_1^{e\cap\sigma}(x_0) < 1$ (σ voisinage variable de x_0). Une notion plus faible, qui sera considérée même si $x_0 \in e$ sera celle d'<u>effilement faible</u> de e en x_0 par la condition $\inf\limits_\sigma \hat{R}_1^{e\cap\sigma}(x_0) < 1$ (σ voisinage variable de x_0).

Naturellement comme pour l'effilement, on note que

---

(1) Cette rédaction comporte quelques améliorations et compléments sur la conférence du Séminaire d'ailleurs reprise à Bombay et Tokyo.

$$\inf_{\sigma} \hat{R}_{\varphi}^{e\cap\sigma}(x_0) = \varphi(x_0) \inf_{\sigma} \hat{R}_{1}^{e\cap\sigma}(x_0)$$

si φ est finie continue et > 0 en x_0.

Voici deux raisons justifiant cette notion :

(A) Dans l'axiomatique (α) que j'ai développée ([3] et [4]), en y prenant seulement les axiomes 1, 2, 3 et l'existence d'un potentiel > 0, la notion de point-frontière irrégulier x_0 d'un ouvert ω relativement compact est équivalente à l'effilement faible en x_0 de $\complement\omega$ au sens précédent, en prenant pour U la famille des fonctions hyperharmoniques ≥ 0 dans l'espace de base de l'axiomatique (2).

Cela est, d'après la dernière remarque, conséquence immédiate d'un critère de régularité (théorème 21, [4], p. 117).

D'ailleurs dans cette axiomatique l'effilement faible devient équivalent à l'effilement si l'on ajoute l'existence d'une base dénombrable et l'axiome D, comme il résulte d'un critère général d'effilement ([4], théorème 29, p. 137) de e en $x_0 \notin e$.

(B) Dans la théorie classique du potentiel ou dans l'axiomatique rappelée (avec axiomes 1, 2, 3, potentiel > 0) mais pourvue d'une base dénombrable d'ouverts et de l'axiome de domination (D), on sait que, pour une famille de fonctions hyperharmoniques $u_i \geq 0$, l'ensemble "exceptionnel", où $\widehat{\inf}\, u_i < \inf u_i$ est polaire, et qu'il y a identité des ensembles polaires et des ensembles effilés en tout point. Sans l'axiome (D) et même en renforçant l'axiome (3) selon (3'), on n'obtient que des résultats bien plus faibles (voir thèse HERVÉ [7]). Dans des axiomatiques plus larges ou théories probabilistes parallèles, DOOB m'a signalé des résultats faibles inspirant le théorème suivant relatif à notre famille très générale U.

---

(2) On a la même équivalence, si l'on prend l'axiomatique de Bauer [1] exposée dans une conférence précédente, avec (K_1) mais renforcée par l'axiome T^+ au lieu de T (c'est-à-dire avec la séparation au moyen de fonctions hyper-h-harmoniques ≥ 0) et si on prend pour U la famille des fonctions hyperharmoniques ≥ 0. Les démonstrations s'adaptent aisément.

De même par conséquent en adoptant la dernière axiomatique proposée dans la dernière conférence, si l'on prend l'hypothèse globale finale faite dans tout l'espace, qu'il existe une fonction harmonique > 0 et d'autre part un potentiel qui est > 0 en tout point donné à l'avance.

THÉORÈME 1. - Pour toute famille $\{u_i \in U\}$, l'ensemble e , où $\widehat{\inf}\, u_i < \inf u_i$, est une réunion dénombrable d'ensembles faiblement effilés en tout point.

On voit que e est réunion des ensembles

$$e_n = \{x\ ,\ \widehat{\inf\, u_i} < \inf(n\ ,\ (\inf u_i) - \tfrac{1}{n})\} \quad .$$

Montrons donc que e_n est faiblement effilé en tout point x_0 .

Si $\widehat{\inf}\ u_i(x_0)$ est fini, on a, dans un voisinage σ de x_0 ,

$$\widehat{\inf\ u_i} > \widehat{\inf\ u_i}(x_0) - \frac{1}{2n}$$

d'où

$$\inf u_i > \widehat{\inf\ u_i}(x_0) + \frac{1}{2n} \quad \text{sur} \quad \sigma \cap e_n \quad .$$

Donc si $K_n = \widehat{\inf\ u_i}(x_0) + \frac{1}{2n}$,

$$\frac{u_i}{K_n} \geqslant R_1^{e_n \cap \sigma} \ , \ \frac{\widehat{\inf\ u_i}}{K_n} \geqslant \hat{R}_1^{e_n \cap \sigma} \quad .$$

Le membre de gauche est < 1 en x_0 , d'où

$$\hat{R}_1^{e_n \cap \sigma}\ (x_0) < 1 \quad .$$

Si maintenant $\widehat{\inf}\ u_i(x_0) = +\infty$, on a $\widehat{\inf\ u_i} > n$ dans un voisinage σ' de x_0 , d'où

$$e_n \cap \sigma' = \emptyset \qquad \text{et} \quad R_1^{e_n \cap \sigma'} = 0 \quad .$$

II

3. - Voici maintenant des résultats nouveaux sur l'effilement ordinaire, d'abord le plus classique dans R^n et sur la notion connexe de topologie fine.

THÉORÈME 2. - Soient Ω ouvert borné dans R^n , F une fonction quelconque donnée et bornée supérieurement dans Ω (puis prolongée arbitrairement), et

$\{\Omega_i\}$ une famille d'ouverts partiels harmoniquement intérieurs [3] et de réunion Ω. Alors en tout point $x_0 \in \partial\Omega$ <u>régulier</u> pour Ω (et où Ω est non effilé),

$$\limsup_{x\in\Omega,\ x\to x_0} \text{fine}\ (\sup_i \overline{H}_F^{\Omega_i}(x)) \leqslant \limsup_{x\in\Omega\ ,\ x\to x_0} \text{fine}\ F(x) \qquad [4] \quad .$$

On se ramène à voir que le premier membre est $\leqslant 0$ si le membre de droite est < 0. Il existe un ensemble e effilé en x_0 hors duquel F dans Ω est $\leqslant 0$ dans un voisinage δ de x_0.

Si F' vaut F sur $\partial\Omega$ et $\overline{H}_F^{\Omega_i}$ dans Ω_i, notons que $\overline{H}_F^{\Omega_i} = \overline{H}_{F^1}^{\Omega_i\cap\delta}$ dans $\Omega_i \cap \delta$. Cette fonction est majorée par $\overline{H}_{\varphi_1}^{\Omega_i\cap\delta} + \overline{H}_{\varphi_2}^{\Omega_i\cap\delta}$ où

1. $\varphi_1 = 0$ sauf sur $\partial\delta$ où $\varphi_1 = \text{Cte}\ \lambda \geqslant 0$ majorant $\sup F$,

2. $\varphi_2 = 0$ sauf sur e où φ_2 vaut λ.

Or

$$\overline{H}_{\varphi_1}^{\Omega_i\cap\delta}(x) \leqslant \overline{H}_{\varphi_1}^{\Omega\cap\delta}(x)$$

qui tend vers 0 quand $x \in \Omega \cap \delta$ tend vers x_0 et dans $\Omega_i \cap \delta$,

$$\overline{H}_{\varphi_2}^{\Omega_i\cap\delta} = (R_\lambda^{e\cap\partial\Omega_i\cap\overline{\delta}})_{\delta_0} = (\hat{R}_\lambda^{e\cap\partial\Omega_i\cap\overline{\delta}})_{\delta_0} \leqslant (\hat{R}_\lambda^{e\cap\overline{\delta}})_{\delta_0}$$

ces réduites et régularisées étant prises relativement à un domaine $\delta_0 \supset \overline{\delta}$. Or l'effilement de e entraîne que $(\hat{R}_\lambda^{e\cap\overline{\delta}})_{\delta_0}$ soit en x_0 arbitrairement petit pour δ convenable. Comme $(\hat{R}_\lambda^{e\cap\overline{\delta}})_{\delta_0}$ est finement continue en x_0,

---

[3] C'est-à-dire que le point d'Alexandroff $\mathfrak{a}$ de Ω doit former un ensemble négligeable pour le problème de Dirichlet relatif à Ω_i et à la topologie de $\Omega \cup \{\mathfrak{a}\}$, ce qui équivaut à dire dans R^n que $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$ est négligeable dans la théorie classique, pour Ω_i. Rappelons que dans un problème de Dirichlet l'ensemble de la frontière est négligeable (resp. faiblement négligeable) si pour sa fonction caractéristique ψ, le $\overline{H}_\psi$ (resp. $\underline{H}_\psi$) correspondant est nul.

[4] Pour chaque x, on considère les i tels que $\Omega_i \ni x$ et le $\sup \overline{H}_F^{\Omega_i}(x)$ pour ces i.

$\overline{H}_{\varphi_1}^{\Omega\cap\delta} + (\hat{R}_{\lambda}^{e\cap\overline{\delta}})_{\delta_0}$ a dans Ω une limite fine arbitrairement petite en x_0 pour un choix convenable de δ, δ_0, d'où le résultat.

Extensions :

- Cas (E_1) d'un ouvert Ω de $\overline{R^n}$ (espace R^n compactifié par le point d'Alexandroff) en supposant seulement $\complement\Omega$ non localement polaire. On raisonne de même en utilisant les notions classiques étendues au voisinage du point à l'infini.

- Cas (E_2) de l'axiomatique (α) (Axiomes 1, 2, 3, potentiel >0) en prenant pour Ω un ouvert relativement compact de l'espace fondamental. Mêmes énoncé et démonstration [5], mais il faut prendre δ_0 assez petit en même temps que δ, pour obtenir $(\hat{R}_{\lambda}^{e\cap\overline{\delta}})_{\delta_0}$ arbitrairement petit en x_0. Cela dérivera de la propriété que $(R_1^{e\cap\delta})_{\delta}(x_0)$ tend vers 0 selon l'ordonné filtrant des voisinages ouverts δ [6].

On désignera par E_2' le cas de E_2 restreint par l'adjonction de l'axiome D et d'une base dénombrable d'ouverts et par E_2'' le cas E_2' encore restreint par l'hypothèse de l'axiome (3') au lieu de (3).

4. Applications.

THÉORÈME 3. - Soit dans les cas E_1 ou E_2'' une fonction F donnée et bornée supérieurement dans Ω (prolongée arbitrairement) et un ordonné filtrant croissant d'ouverts Ω_i harmoniquement intérieur de réunion Ω. Alors

$$\limsup_i \overline{H}_F^{\Omega_i} \leq \underline{H}_{\varphi}^{\Omega} \qquad (2)$$

---

[5] Il semble y avoir là (et de même dans le théorème 4) extension aux axiomatiques plus larges du type de Bauer mentionnées plus haut.

[6] On se ramène au cas des constantes harmoniques. Il existe alors au voisinage de x_0 une fonction surharmonique $u > 0$ telle que

$$\liminf_{x\in\Omega,\ x\to x_0} v - v(x_0) > 2 ,$$

(pour tout effilé en $x_0 \notin e$) donc $v - v(x_0) + \varepsilon$ est >0 dans un voisinage assez petit, de x_0 et >1 sur e dans un autre voisinage, d'où le résultat.

où φ vaut la lim sup fine [7] de F dans Ω au point x de la frontière fine. Résultat analogue dans E_2' pour une suite croissante $\{\Omega_n\}$.

En effet $\limsup_i \overline{H}_F^{\Omega_i}$ est hypoharmonique (et dans E_2', $\limsup_{n\infty} \overline{H}_F^{\Omega_n}$ est majorée par sa régularisée supérieure qui est hypoharmonique, et admet même lim sup fine à la frontière) et de lim sup fine à la frontière $\leqslant \varphi$. D'où la majoration par $\underline{H}_\varphi^\Omega$. Cela vient de l'identité des enveloppes relatives aux limites ordinaires ou fines, dérivant d'un principe de minimum pour limites fines (voir mon exposé n° 1 dans ce volume).

COROLLAIRE 1. - Si F est bornée et admet dans Ω une limite fine φ en tout point de la frontière fine, p. p. (c'est-à-dire sauf sur un ensemble négligeable pour Ω) [8], alors $\overline{H}_F^{\Omega_i}$, $\underline{H}_F^{\Omega_i}$ (ou resp. dans E_2', $\overline{H}_F^{\Omega_n}$, $\underline{H}_F^{\Omega_n}$) convergent vers H_φ^Ω (qui existe).

Extension. - Supposons F mesurable pour toute mesure harmonique. On peut alors dans les énoncés précédents (théorème 3 et corollaire) remplacer la condition que F soit bornée supérieurement (resp. bornée) par celle que F^+ (resp. F) satisfasse à l'intégrabilité uniforme relative aux mesures $d\mu_{y_0}^{\Omega_i}$ (pour tout y_0 dans le cas (E_2', Ω_n) ou seulement pour un seul si Ω est connexe dans les cas E_1, E_2'').

C'est là une remarque de DOOB dans des cas analogues. On décompose l'intégrale

$$\int F\, d\mu_{y_0}^{\Omega_i} = \int \inf(F, A)\, d\mu_{y_0}^{\Omega_i} + \int_{F\geq A} (F - A)\, d\mu_{y_0}^{\Omega_i}$$

où

$$\int_{F\geq A} (F - A)\, d\mu_{y_0}^{\Omega_i} < \varepsilon$$

---

[7] La fonction des lim sup fines à la frontière fine de Ω (qui est un G_δ) y est finement s. c. s. Elle est mesurable pour toute mesure ne chargeant pas les ensembles polaires (en particulier pour la mesure harmonique en tout point, parce que dans R^n ou E_2' un ouvert fin e est à un ensemble polaire près, le lieu E des points où $\complement e$ est effilé et un tel E est défini par une inégalité entre deux fonctions surharmoniques.

[8] De sorte qu'elle est mesurable pour la mesure harmonique.

pour $A \geq A_0$ convenable, indépendamment de i et

$$\limsup_i \int \inf(F\ ,\ A)\ d\mu_{y_0}^{\Omega_i} \leq \int \varphi\ d\mu_{y_0}^{\Omega} \qquad \text{d'après (2)}$$

d'où

$$\limsup_i \int F\ d\mu_{y_0}^{\Omega_i} \leq \int \varphi\ d\mu_{y_0}^{\Omega} \quad .$$

Quant au corollaire, on se ramène au cas de $F \geq 0$. D'abord

$$\int \inf(F\ ,\ A)\ d\mu_{y_0}^{\Omega_i} \xrightarrow[i]{} \int \inf(\varphi\ ,\ A)\ d\mu_{y_0}^{\Omega} \quad .$$

Comme le premier membre est borné (A et i variables), le second membre est borné (A variable) donc $\int \varphi\ d\mu_{y_0}^{\Omega}$ est fini, et la première égalité montre aisément que

$$\int F\ d\mu_{y_0}^{\Omega_i} \xrightarrow[i]{} \int \varphi\ d\mu_{y_0}^{\Omega} \quad .$$

COROLLAIRE 2. - Si dans E_1 ou E_2' , F est dans l'espace ou dans $\overline{\Omega}$, quasi-continue c'est-à-dire quasi-partout finement continue (9) de plus bornée dans Ω ou y satisfaisant aux conditions d'intégrabilité uniforme précédentes, le remplacement dans Ω de F par H_F^{Ω} (qui existe) donne une fonction quasi-continue.

Cela généralise le cas particulier connu, dans un espace de Green, d'une fonction (BLD) que le remplacement par H_F^{Ω} dans Ω laisse de type (BLD).

<u>Remarque</u>. - Dans les cas E_1 , E_2 , l'intégrabilité uniforme de u harmonique dans Ω connexe relativement à une famille $d\mu_{y_0}^{\Omega_i}$ pour <u>un</u> point y_0 et une famille ordonnée filtrante croissante de $\Omega_i \subset \overline{\Omega_i} \subset \Omega$ entraînent la même propriété pour tout point $y_1 \in \Omega$ et la même famille $\{\Omega_i\}$ (sans qu'il soit donc nécessaire de supposer (3')).

Car $u_A = \inf(u\ ,\ A)$ est surharmonique et, pour A fixé, $H_{u_A}^{\Omega_i}$ décroît.

Comme

$$H_{u_A}^{\Omega_i}(y_0) = u(y_0) - \int_{u \geq A} (u - A)\ d\mu_{y_0}^{\Omega_i} \quad ,$$

(9) Donc mesurable pour toute mesure harmonique.

$H_{u_A}^{\Omega_i}(y_0)$ a une limite finie ; $H_{u_A}^{\Omega_i} \xrightarrow[i]{} v_A$, plus grande minorante harmonique de u_A et $v_A \to u$ $(A \to +\infty)$. De

$$\int (u - A)\ d\mu_{y_1}^{\Omega_i} \leqslant u(y_1) - v_A(y_1)$$

résulte que le premier membre tend vers 0 pour $A \to +\infty$ (indépendamment de i). Même propriété pour $-u$. Il en résulte [10] l'intégrabilité uniforme relative au point y_1 .

COROLLAIRE 3. - Soit, dans les cas E_1 , E_2' , u harmonique dans le domaine Ω , satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour $d\mu_{y_0}^{\Omega_i}$ (un point y_0 , et une famille de $\Omega_i \subset \overline{\Omega_i} \subset \Omega$) et admettant une limite fine p. p. à la frontière. C'est une solution de problème de Dirichlet (celle de la fonction des limites fines).

Nous retrouvons un théorème démontré autrement (voir mon exposé n° 1 de ce volume).

5. Cela nous ramène à étudier directement à la frontière en topologie fine les solutions de problème de Dirichlet et les fonctions surharmoniques, ce par quoi nous aurions pu aussi bien commencer :

THÉORÈME 4. - Soient, dans les cas E_1 ou E_2 , une fonction φ bornée supérieurement dans Ω et e négligeable [11] de $\partial\Omega$. Alors pour le point-frontière x_0 régulier (où Ω est non effilé)

---

[10] Noter que l'intégrabilité uniforme relative à (X_i (espace), f_i (fonction réelle), μ_i mesure $\geqslant 0$) et définie (souvent pour $\|\mu_i\|$ bornée) par la condition

$$\int_{|f_i| \geq A} |f_i|\ d\mu_i \xrightarrow[(A \to +\infty)]{} 0 \qquad \text{(indépendamment de } i\text{)}$$

équivaut à

$$\int_{f_i \geq A} (f_i - A)\ d\mu_i \xrightarrow[(A \to +\infty)]{} 0 \qquad \text{(indépendamment de } i\text{)}$$

avec même condition pour $-f_i$. Cela résulte de

$$\int_{f_i \geq 2A} f_i\ d\mu_i \leqslant \int_{f_i \geq 2A} (f_i - 2A)\ d\mu_i + 2 \int_{f_i \geq A} (f_i - A)\ d\mu_i \qquad (A > 0) .$$

[11] On a une extension à e "faiblement négligeable" en remplaçant $\overline{H}$ par $\underline{H}$ et supposant par exemple l'espace à base dénombrable.

$$\text{(3)} \qquad \limsup_{x\to x_0} \text{fine}\ \overline{H}^{\Omega}_{\varphi} \leq \limsup_{y\in\partial\Omega-e,\ y\to x_0} \text{fine}\ \varphi(y) \quad .$$

Démonstration analogue à celle du théorème 2, mais plus simple.

COROLLAIRE. - Si φ est bornée, $\overline{H}_{\varphi}$, $\underline{H}_{\varphi}$ admettent la limite fine $\varphi(x_0)$ en tout x_0 régulier (de la frontière fine) où φ est finement continue (continuité de φ prise même hors d'un ensemble négligeable).

THÉORÈME 5 (déjà connu dans E_1[2] et valable aussi dans $E_2^!$). - Soit, dans ces cas, u hyperharmonique bornée inférieurement dans Ω. Au point-frontière régulier x_0 :

$$\text{(4)} \quad \liminf_{x\in\Omega,\ x\to x_0} u = \liminf_{\substack{y\to x_0 \\ y\in\partial'\Omega\setminus e}} \left[\liminf_{z\in\Omega,\ z\to y} \text{fine}\ u(z)\right] = \liminf_{\substack{y\to x_0 \\ y\in\partial\Omega\setminus e}} \left[\liminf_{z\in\Omega, z\to y} u(z)\right] \quad ,$$

$$\text{(5)} \qquad \liminf_{x\in\Omega, x\to x_0} \text{fine}\ u = \liminf_{\substack{y\to x_0 \\ y\in\partial'\Omega\setminus e}} \text{fine}\left[\liminf_{z\to y} \text{fine}\ u(z)\right]$$

où e est négligeable [12] sur $\partial\Omega$ et $\partial'\Omega$ la frontière fine de Ω.

Les inégalités $\geq$ sont seules difficiles.

On sait que u majore $\underline{H}_{\psi}$ et même $\overline{H}_{\psi}$, où ψ est la lim inf fine de u à la frontière et on applique le résultat banal que

$$\liminf_{x\to x_0} \underline{H}_{\psi} \geq \liminf_{y\in\partial\Omega-e, y\to x_0} \psi(y)$$

ou la majoration (3), à $\overline{H}_{-\psi}$ ou $\underline{H}_{-\psi}$. On peut procéder directement pour (4) par une étude locale et le principe du minimum pour limites fines, et passer à (5) comme dans le cas connu de E_1.

---

[12] Ou même faiblement négligeable.

III

6. - Passons à des questions analogues pour l'espace de Green, la frontière de Martin et les limites fines à cette frontière. Nous partirons d'un lemme de Doob qui a suggéré les recherches de ces sections II et III.

DOOB considère une fonction bornée F dans l'espace de Martin $\hat{\Omega}$ (espace de Green Ω compactifié par sa frontière de Martin Δ) ; il suppose qu'elle est borélienne dans Ω , mesurable sur Δ (pour la mesure $d\mu^1$ de Martin associée à 1) et admet la limite fine F (au sens de NAÏM) à la frontière, p. p.-$d\mu^1$. Soit Ω_n une suite d'ouverts emboités, de réunion Ω , enfin relativement compacts dans Ω ou seulement "harmoniquement intérieurs". Alors

$$\int F \, d\mu_y^{\Omega_n} \to \int F \, d\mu_y^{\Omega}$$

$d\mu_y^{\Omega_n}$ étant la mesure harmonique (classique) pour Ω_n au point y et $d\mu_y^{\Omega}$ la mesure harmonique du problème de Dirichlet-Martin (qui, pour y_0 , vaut $d\mu^1$).

La démonstration originale de DOOB [6] est probabiliste ; aussi en ai-je donné une autre en théorie pure du potentiel, débarrassée de restrictions du type "mesurabilité". Généralisons un peu en harmonisant le langage selon une suggestion de Doob avec celui des axiomatiques générales :

h étant une fonction harmonique > 0 <u>fixée</u> dans Ω , appelons fonction h-harmonique, hyperharmonique le quotient par h d'une fonction harmonique, hyperharmonique. On peut traiter un problème de Dirichlet dans un ouvert partiel ω avec la frontière prise dans l'espace $\overline{\Omega}$ compactifié d'Alexandroff, ou bien pour Ω avec la frontière de Martin et dans les deux cas en utilisant les fonctions h-harmoniques, h-hyperharmoniques.

On notera $\overline{H}_f^{\omega}$, dans le premier cas, l'enveloppe inférieure des fonctions h-hyperharmoniques satisfaisant dans ω à $\liminf v \geq f$ $\underset{> -\infty}{}$ à la frontière ; on posera $\underline{H}_f^{\omega} = - \overline{H}_{-f}^{\omega}$ d'ailleurs $\leq \overline{H}_f^{\omega}$. En cas d'égalité avec une fonction finie (alors h-harmonique) notée H_f^{ω} (ce qui a lieu en particulier si f est finie continue), on a

$$H_f^{\omega}(y) = \int f \, d\mu_y^{\omega}$$

(cas dit de résolutivité ; mesure harmonique correspondante $d\mu_y^{\omega}$).

De même dans le second cas ; notations $\underline{\mathcal{H}}_f^\Omega$, $\overline{\mathcal{H}}_f^\Omega$,

$$\mathcal{H}_f = \int f \, d\mu_y^\Omega \quad .$$

On sait que si $d\mu^h$ est la mesure canonique de Martin associée à h

$$d\mu_y^\Omega(x) = \frac{K(x , y)}{h(y)} \, d\mu^h(x)$$

où $K(x , y)$ est la fonction de Green normalisée en un point y_0 ; de sorte que

$$d\mu_{y_0}^\Omega = \frac{d\mu^h}{h(y_0)} \quad .$$

LEMME 1. - Soit F réelle quelconque dans l'espace de Green Ω , mais bornée supérieurement et admettant à la frontière de Martin une lim sup fine ≤ 0 sauf aux points d'un ensemble faiblement négligeable c'est-à-dire de mesure intérieure $- d\mu_y^\Omega$ (ou $d\mu^h$) nulle.

Alors si $\{\Omega_i\}$ est un ordonné filtrant croissant d'ouverts harmoniquement intérieurs, de réunion Ω ,

$$\lim_i \sup \overline{\int} F \, d\mu_y^{\Omega_i} \leq 0 \quad .$$

Soit E_ε l'ensemble de Ω où $F \geq \varepsilon > 0$. Les points d'effilement sur Δ de tout ensemble forment un K_σ ([8], n° 14). De sorte que E_ε est effilé à la frontière p. p.-$d\mu^h$. Par suite ([8], théorème 20, corollaire), $\hat{R}_h^{E_\varepsilon}$ (ordinaire ou $\hat{R}_1'^{E_\varepsilon}$ relative aux fonctions h-hyperharmoniques) est un potentiel (resp. h-potentiel) et $\hat{R}_1'^{E_\varepsilon \setminus \Omega_i} \xrightarrow[i]{} 0$ (car le premier membre converge vers une fonction h-harmonique).

Or $$\overline{\int} F \, d\mu_y^{\Omega_i} \leq \varepsilon + \lambda \overline{\int}_{F \geq \varepsilon} d\mu_y^{\Omega_i} \qquad (\lambda \geq \sup F)$$

avec

$$\overline{\int}_{F \geq \varepsilon} d\mu_y^{\Omega_i} \leq \hat{R}_1'^{E_\varepsilon \setminus \Omega_i}(y) \qquad (y \in \Omega_i)$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 6. - Soient F bornée supérieurement, φ la fonction des lim sup fines aux points de Δ_1, et la même famille $\{\Omega_i\}$; alors

$$\lim_i \sup \overline{\int} F \, d\mu^{\Omega_i} \leqslant \underline{\int} \varphi \, d\mu_y^{\Omega} \quad .$$

En remarquant que

$$\underline{\int} \sup(\varphi \, , \, - n) \, d\mu_y^{\Omega} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \underline{\int} \varphi \, d\mu_y^{\Omega} \quad ,$$

on se ramène au cas de F borné. Il existe alors $\varphi' \leqslant \varphi$, sommable $- d\mu^h$ telle que

$$\int \varphi' \, d\mu_y^{\Omega} = \underline{\int} \varphi \, d\mu_y^{\Omega} \quad ,$$

et ne différant de φ que sur un ensemble faiblement négligeable. La fonction h-harmonique bornée $u(y) = \int \varphi' \, d\mu_y^{\Omega}$ admet à la frontière la limite fine φ', p. p.-$d\mu$, et vaut $\int u \, d\mu_y^{\Omega_i}$ dans tout Ω_i. Donc $F - u$ admet une lim sup fine $\leqslant 0$ sauf aux points d'un ensemble faiblement négligeable. Donc

$$\lim_i \sup \overline{\int} (F - u) \, d\mu_y^{\Omega_i} \leqslant 0$$

$$\lim_i \sup \overline{\int} F \, d\mu_y^{\Omega_i} \leqslant u(y) = \underline{\int} \varphi \, d\mu_y^{\Omega} \quad .$$

COROLLAIRE. - Si F est bornée et admet à la frontière une limite fine p. p.-$d\mu^h$, cette fonction limite φ est sommable-$d\mu^h$ et

$$\overline{\int} F \, d\mu_y^{\Omega_i} \, , \, \underline{\int} F \, d\mu_y^{\Omega_i} \text{ tendent vers } \int \varphi \, d\mu_y^{\Omega} \quad .$$

<u>Extension</u>. - Si F est mesurable pour les mesures harmoniques, on peut dans ce théorème et son corollaire remplacer la condition de F bornée supérieurement (resp. bornée) par celle que F^+ (resp. F) satisfait à la condition d'intégrabilité uniforme pour les $d\mu_{y_0}^{\Omega_i}$ (un seul point y_0).

Même démonstration que pour le théorème 3 et corollaire.

Remarques.

1. Il n'y a pas d'analogue du théorème 2 pour les limites fines à la frontière de Martin. On le voit en prenant pour Ω un disque, pour F la fonction caractéristique du complémentaire d'un disque intérieur tangent en un point x_0, pour Ω_i les disques concentriques à Ω. Au point x_0, identifiable à un point de la frontière de Martin, F a la limite fine 0 et cependant $H_F^{\Omega_i}$ tend évidemment vers 1 dans Ω.

2. Par contre certaines parties de III s'adaptent à l'étude II. D'abord le lemme 1 s'adapte selon le

LEMME 1'. - Dans les cas E_1, E_2', si F dans Ω admet à la frontière une lim sup fine $\leqslant 0$ sauf aux points d'un ensemble faiblement négligeable, et si $\{\Omega_i\}$ est un ordonné filtrant croissant d'ouverts harmoniquement intérieurs à Ω, de réunion Ω

$$\limsup_i \overline{H}_F^{\Omega_i} \leqslant 0 \quad .$$

Cet énoncé (contenu dans le théorème 3, mais avec une amélioration d'hypothèses) résulte de ce que si E est dans Ω un ensemble effilé en tout point de $\partial\Omega$ sauf sur un ensemble négligeable, $R_1^{E\setminus K} \to 0$ en tout point selon l'ordonné filtrant des compacts $K \subset \Omega$.

La démonstration se fait à l'aide de deux ouverts contenant l'ensemble négligeable de l'énoncé et l'ensemble des points de $\partial\Omega$ où E est effilé, en utilisant la proposition établie dans la note de bas de page ([11]) de mon exposé n° 1 de ce volume.

De ce lemme (1') résulte grâce au théorème 4, le corollaire du théorème 3 (donc sans utiliser l'axiome 3' dans le cas d'une famille générale $\{\Omega_i\}$, avantage qui se conserve dans l'extension de l'intégrabilité uniforme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problem für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 1-59.

[2] BRELOT (Marcel). - Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière, Math. Nachr., t. 4, 1950/51, p. 298-307.

[3] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire de théorie du potentiel [Séminaire Brelot-Choquet-Deny], t. 2, 1958, n° 1, 40 pages.

[4] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[5] BRELOT (Marcel). - Introduction axiomatique de l'effilement, Annali di Matematica, Série 4, t. 57, 1962, p. 77-95.

[6] DOOB (J. L.). - Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 573-621.

[7] HERVE (Mme Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[8] [Mme LUMER]-NAÏM (Linda). - Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 183-281 (Thèse Sc. math. Paris. 1957).