Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Paul-André Meyer

La propriété de Markov forte

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. nº 5, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A6_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
5e année, 1960/61, n° 5

LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV FORTE

par Paul-André MEYER

I. Propriétés de régularité des trajectoires.

A. Hypothèses et notations.

Dans tout cet exposé, à l'exception du n° IV, X désigne un espace compact métrisable, d une distance compatible avec sa topologie, B sa tribu borélienne, $V_x(r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r, $G(X)$ l'espace des fonctions boréliennes bornées, $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X, tous deux munis de la norme de la convergence uniforme.

$\{P_t\}$ est un semi-groupe d'opérateurs positifs sur $C(X)$, fortement continu (c'est-à-dire tel que $\forall\ f \in C(X)$, $\lim_{t\to 0}\|P_t f - f\| = 0$), tel que l'on ait $P_t 1 = 1$ pour tout t. Les résolvantes du semi-groupe seront notées U^λ $(\lambda > 0)$, de sorte que $U^\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f\, dt$.

THÉORÈME 1.1. - Il existe une fonction de transition de Markov et une seule sur (X, B), notée $P_t(x, A)$, telle que l'on ait, pour toute $f \in C(X)$, la relation $P_t f(x) = \int_X P_t(x, dy) f(y)$.

Cette fonction de transition vérifie la condition :

(U) $$\forall\ r > 0,\ \lim_{t\to 0} P_t(x, V_x(r)) = 1 \text{ \underline{uniformément sur} } X.$$

DÉMONSTRATION. - L'application $x \to P_t f(x)$ est une forme linéaire positive sur $C(X)$, donc une mesure de Radon que nous noterons $P_t(x, dy)$. Soit H l'espace vectoriel des fonctions $h \in G(X)$ telles que l'application

$$(t, x) \to P_t(x, g) = \int_X P_t(x, dy)\, g(y)$$

soit mesurable sur $X \times R_+$ (muni de sa tribu borélienne). Il est immédiat que H contient $C(X)$, l'application ci-dessus étant, si $g \in C(X)$, séparément continue (et même continue). Un raisonnement analogue à celui du théorème 5, exposé 1, p. 4 montre que $H = G(X)$. Soit $P_t g$ l'application $x \to P_t(x, g)$: on voit de même que les applications $g \to P_t\, g$ forment un semi-groupe sur $G(X)$ qui prolonge le semi-groupe P_t défini sur $C(X)$. Aussi garderons-nous la même notation pour le semi-groupe prolongé. La première phrase de l'énoncé est alors immédiate (théorème 5, exposé 1, p. 6). Signalons que la mesurabilité de l'application $t \to P_t(x\, ,\, g)$ permet de prolonger les U^λ à $G(X)$.

Soit h_x une fonction continue comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur $V_x(r/2)$, à 0 hors de $V_x(r)$: comme $P_t\, h_x \to h_x$ uniformément lorsque $t \to 0$, dès que t est assez petit, $P_t(y\, ,\, V_x(r)) \geqslant P_t(y\, ,\, h_x)$ est très voisin de 1 sur la boule $V_x(r/2)$. Couvrons alors X avec un nombre fini de boules $V_{x_i}(r/4)$ $(i = 1\, , \dots ,\, n)$, choisissons un t_0 tel que pour $t < t_0$ chaque $P_t(y\, ,\, V_{x_i}(r/2))$ soit $> 1 - \varepsilon$ sur $V_{x_i}(r/4)$; soit un x quelconque, et $t < t_0$: x appartient à une boule $V_{x_i}(r/4)$, $V_x(r)$ contient $V_{x_i}(r/2)$, et la condition (U) est vérifiée.

La démonstration des théorèmes de ce numéro peut se faire en n'utilisant que la condition (U) (cf. [9]).

B. Construction d'un processus provisoire.

Soit ν une loi de probabilité sur X : il existe un processus de Markov admettant $P_t(x\, ,\, A)$ comme probabilité de transition, ν comme loi initiale (théorème 4, exposé 3, p. 7). Soit Ω l'espace compact X^{R_+}, soient X_t les applications coordonnées. Désignons par P^ν la loi de Radon sur Ω associée au second processus canonique (exposé 2, p. 5). La tribu $M(P^\nu)$ contient la tribu F construite dans l'exposé 3, p. 7, et les calculs de l'exposé 3 sont valables pour les évènements de F.

LEMME 1.2. - Pour toute mesure initiale ν, tout temps t, toute fonction continue f, le processus $f \circ X_t$ est "continu en probabilité" à l'instant t : autrement dit : $\forall\ \varepsilon > 0$:

$$\lim_{s \to t} P^\nu[|f \circ X_s(\omega) - f \circ X_t(\omega)| > \varepsilon] = 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prouver la continuité en probabilité à droite et à gauche ; raisonnons par exemple sur le côté gauche :

$$P^\nu[|f \circ X_t - f \circ X_{t-s}| > a] = \int_X P^x[|f \circ X_s - f \circ X_0| > a]\, d\nu_{t-s}(x)$$

(cf. exposé 3, p. 9, théorème 6)

où ν_{t-s} est la répartition de X_{t-s} pour la mesure initiale ν : il suffit donc de montrer que $P^x[|f \circ X_s - f \circ X_0| > a]$ tend vers 0 uniformément en x lorsque $s \to 0$; or la fonction f, étant continue, est uniformément continue ; soit r un nombre, tel que $d(x, y) \leq r \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < a$,

$$P^x[|f \circ X_s - f \circ X_0| > a] \leq 1 - P_s(x, V_x(r)) \quad .$$

Il suffit alors d'appliquer la condition (U).

THÉORÈME 1.3. - Pour toute loi initiale ν :

1° P^ν-presque toutes les trajectoires du processus admettant en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

2° Pour chaque t, la limite à droite et la limite à gauche sont P^ν-presque sûrement (p. s.) égales à X_t.

DÉMONSTRATION : la seconde phrase de l'énoncé est une conséquence immédiate de la première et du théorème précédent, car soit f_n une suite de fonctions continues qui sépare les points de X ; si la limite à droite X_{t_+} existe presque sûrement, $f_n \circ X_s \underset{s \to t_+}{\longrightarrow} f_n \circ X_{t_+}$ p. s., donc aussi en probabilité. Donc, $f_n \circ X_{t_+} = f_n \circ X_t$ p. s., et enfin $X_{t_+} = X_t$ p. s. On raisonne de même du côté gauche.

Pour démontrer la première phrase, on voit de même qu'il suffit de montrer que les applications $t \to f_n \circ X_t(\omega)$ ne possèdent presque sûrement pas de discontinuités de seconde espèce. En ajoutant une constante au besoin, on peut supposer les f_n positives. Comme, lorsque $\lambda \to \infty$, $\lambda U^\lambda f_n \to f_n$ uniformément sur X, il suffit de montrer que chaque $\lambda U^\lambda f_n$ ne présente presque sûrement pas de discontinuité de seconde espèce sur les trajectoires du processus, pour λ-entier, par exemple. Or le processus $\{e^{-\lambda t} \lambda U^\lambda f_n \circ X_t\}$ est une supermartingale positive séparable. On conclut alors par le théorème 2.2 (exposé 4, p. 8).

REMARQUE. - 1° Cette démonstration très simple est due à LOÈVE ; elle ne dépend qu'en apparence du fait que les U^λ sont continues ; dans LOÈVE [9], on pourra remarquer que seule l'hypothèse (U) est utilisée.

2° Ce qui vient d'être prouvé pour le second processus canonique est, bien entendu, vrai pour un processus séparable quelconque.

C. Construction du processus définitif.

(Définitif à une très petite modification près, relative au cas sous-markovien ; voir n° IV de cet exposé).

Soit maintenant Ω l'ensemble de toutes les applications de R_+ dans X qui sont **continues à droite** et pourvues de limites à gauche. Ω est une partie de X^{R_+}. Soit X_t la restriction à Ω de la coordonnée d'indice t. Soit $\overset{\circ}{F}$ (resp. $\overset{\circ}{F}_t$) la tribu engendrée par les X_t (resp. par les X_s, $s \leq t$).

D'après le théorème précédent et le théorème 4.5 (exposé 2, p. 8), il existe, pour toute mesure initiale ν, une mesure P^ν sur $\overset{\circ}{F}$, pour laquelle le processus $\{X_t\}$ est de Markov par rapport aux $\overset{\circ}{F}_t$, admet $P_t(x, A)$ comme probabilité de transition, et ν comme mesure initiale.

Soit maintenant F (resp. F_t) la famille définie de la manière suivante : $A \in F$ (resp. $A \in F_t$) si, et seulement si, pour toute loi initiale ν, il existe un ensemble A_ν de F (resp. F_t) qui ne diffère de A que par un sous-ensemble d'une partie P^ν-négligeable de F. C'est un résultat classique en théorie de la mesure que F, F_t sont des tribus, et que la mesure P^ν se prolonge à F de manière unique. Enfin, il est immédiat que le processus $\{X_t\}$ est markovien par rapport aux F_t, qui forment une famille de tribus adaptée au processus.

Désormais, $(\Omega, F, X_t, P^\nu, F_t)$ désigneront les éléments canoniques qui viennent d'être construits. Les calculs de l'exposé 3 restent valables pour ces processus.

D. La "loi de tout ou rien".

LEMME 1.4. - Le processus canonique $\{X_t\}$ est markovien par rapport aux tribus F_{t_+}.

DÉMONSTRATION. - Il nous suffit évidemment (cf. théorème 2, exposé 3, p. 11) de montrer que, pour toute fonction continue f, pour tout t, le processus $P_{t-s}(X_s(\omega), f)$, défini pour $0 \leq s \leq t$, est une martingale par rapport aux F_{t_+}. D'après le théorème 2.3 (exposé 4, p. 9), il suffit de montrer que ses trajectoires sont continues à droite, Or :

$$P_{t-s}(X_s(\omega), f) - P_{t-s-\varepsilon}(X_{s+\varepsilon}(\omega), f)|$$

$$\leq |P_{t-s}(X_s, f) - P_{t-s}(X_{s+\varepsilon}, f)| + |P_{t-s}(X_{s+\varepsilon}, f) - P_{t-s-\varepsilon}(X_{s+\varepsilon}, f)|$$

Le second terme tend vers 0 avec ε, du fait que $\|P_{t-s} f - P_{t-s-\varepsilon} f\| \to 0$; le premier terme est égal, si g désigne la fonction continue $P_{t-s} f$, à $|g \circ X_s(\omega) - g \circ X_{s+\varepsilon}(\omega)|$: il tend presque sûrement vers 0 en vertu de la continuité à droite presque sûre des trajectoires.

COROLLAIRE 1.5. - ("Loi de tout ou rien").

Soit A un évènement de F_{0_+} (c'est-à-dire, rappelons-le, mesurable sur $B(X_s , s \leq a)$, pour tout a) : si la mesure initiale est la masse unité au point x, $P^x(A) = 0$ ou 1.

DÉMONSTRATION. - Le processus $\{X_t\}$ et F_{0_+} sont conditionnellement indépendants. X_0 étant donnée. Or A est mesurable sur le processus, et appartient à F_{0_+} : il en résulte (exposé 2, p. 2, relation (1)) que $P(A|X_0) = P(A|X_0)^2$; cette probabilité conditionnelle est donc égale à 0 ou 1 p. s. Or, si la mesure initiale est ponctuelle, la tribu engendrée par X_0 ne comporte que des ensembles de mesure 0 ou 1 : donc $P(A|X_0) = P^x(A)$.

THÉORÈME 1.6. - Les tribus F_t et F_{t^+} sont identiques.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prouver que pour toute variable aléatoire $f(\omega)$, intégrable, F-mesurable, on a presque sûrement pour toute mesure initiale $E[f|F_t] = E[f|F_{t^+}]$ p. s. : en effet, cela s'applique à une variable f qui est mesurable sur F_{t^+}, et devient $f = E[f|F_t]$ p. s. ; comme ceci a lieu pour toute mesure initiale, f est F_t-mesurable par définition de F_t.

Or l'ensemble des fonctions f bornées qui satisfont à la relation $E[f|F_t] = E[f|F_{t^+}]$ p. s., et qui sont F-mesurables, est un espace vectoriel, H, qui satisfait à la condition du théorème 5 (Exposé 1, p. 4), et qui contient les produits $f_1 f_2$, où f_1 est F_t-mesurable, et où f_2 est mesurable sur $B(X_s , t \leq s \leq \infty)$, ceci en vertu du lemme 1.4, suivant lequel $E[f_2|F_{t^+}] = E[f_2|X_t]$ p. s. Une application du raisonnement du théorème 5 cité permet de conclure.

II. Théorèmes fondamentaux.

A. La propriété de Markov forte.

LEMME 2.1. - L'application $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ de $R_+ \times \Omega$ dans X est mesurable. En particulier, si S est une variable aléatoire définie sur Ω, à valeurs dans $\overline{R}_+$, l'application $X_S = [\omega \to X_{S(\omega)}(\omega)]$ est une variable aléatoire [Rappelons (cf. exposé 3, p. 2) que $X_S(\omega) = \partial$ si $S(\omega) = \infty$].

DÉMONSTRATION. - Elle est immédiate. Posons $t_n^+ = (k+1)/2^n$ si $k/2^n \leqslant t < (k+1)/2^n$ ($k \in N$). D'après la continuité à droite, $X_S(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{S_n^+}(\omega)$, et cette dernière fonction est évidemment mesurable par rapport à (t, ω).

THÉORÈME 2.2 ("propriété de Markov forte"). - Soit T un temps d'arrêt, et soit S une variable aléatoire F_T-mesurable, à valeurs dans R_+, et telle que $T \leqslant S$. Pour toute fonction f sur X, borélienne et bornée, on a la relation :

$$(1) \qquad E[f \circ X_S | F_T] = P_{S(\omega)-T(\omega)}(X_T(\omega), f) \quad \text{p. s.}$$

valable pour toute mesure initiale, et en convenant que le second membre a la valeur 0 lorsque $S(\omega) = \infty$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit évidemment de raisonner dans le cas où f est une fonction de $C(X)$. D'autre part, il suffit de prouver (1) pour une variable aléatoire S ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs ; car alors, si f est continue, et U un évènement antérieur à T :

$$\int_U f \circ X_{S_n} \, dP^\nu = \int_U P_{S_n(\omega)-T(\omega)}(X_{T(\omega)}, f) \, dP^\nu$$

où $S_n(\omega) = [S(\omega)]_n^+$ (cf. la démonstration du lemme précédent) ; faisons tendre n vers ∞, nous obtenons la relation (1) dans le cas général.

Supposons que nous ayons démontré (1) dans le cas particulier suivant : S est un temps constant t, T un temps d'arrêt $\leqslant t$; montrons que le cas général en résulte. Soit T un temps d'arrêt quelconque, U un évènement antérieur à T ; S une variable aléatoire ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs s_i ($i = 1, 2 \ldots$) ; nous avons :

$$\int_U f \circ X_S \, dP^\nu = \sum_i \int_{U\cap\{S=s_i\}} f \circ X_{s_i} \, dP^\nu \quad .$$

Posons $T_i = T$ sur $U \cap \{S = s_i\}$, $T_i = s_i$ sur le complémentaire de cet ensemble : il est facile de voir que T_i est un temps d'arrêt $\leq s_i$, et $U \cap \{S = s_i\}$ un évènement de F_{T_i} . D'après le cas particulier :

$$\int_{U\cap\{S=s_i\}} f \circ X_{s_i} \, dP^\nu = \int_{U\cap\{S=s_i\}} P_{s_i - T_i}(X_{T_i} , f) \, dP^\nu$$

$$= \int_{U\cap\{S=s_i\}} P_{s_i - T}(X_T , f) \, dP^\nu \quad .$$

Il suffit alors d'ajouter ces égalités.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer ce cas particulier. Or le processus $\{P_{t-s}(X_s(\omega) , f)\}_{s\in[0,t]}$ est une martingale uniformément intégrable (exposé 3, p. 11) par rapport aux F_s , et ses trajectoires sont continues à droite (cf. lemme 1.4 du présent exposé) ; il résulte alors du théorème 2.4 (exposé 4, p. 9) appliqué au système de temps d'arrêt $\{T , t\}$, que le processus (qui ne comporte que deux variables aléatoires) $\{P_{t-T}(X_T , f) , f \circ X_t = P_0(X_t , f)\}$ est une martingale par rapport aux tribus $\{F_T , F_t\}$, ce qui est le résultat cherché.

COROLLAIRE 2.3. - Soit T un temps d'arrêt : le processus $\{X_{T+t}\}_{t\in R_+}$ est un processus de Markov par rapport aux tribus F_{T+t} , qui admet pour mesure initiale la répartition de X_T , pour fonction de transition la fonction $P_t(x , A)$.

DÉMONSTRATION. - En vertu de la formule précédente, appliquée aux temps d'arrêt $T + s$, $T + t$ ($s < t$) le seul point à démontrer est le fait que la famille de tribus F_{T+t} est adaptée aux processus $\{X_{T+t}\}$, ou encore que, pour tout temps d'arrêt T , X_T est F_T-mesurable. Posons $T_n(\omega) = [T(\omega)]_n^+$ (notations du lemme 2.1) : il est immédiat que X_{T_n} est F_{T_n}-mesurable ; donc $X_T = \lim X_{T_n}$ est mesurable sur $\bigcap_n F_{T_n}$: or un ensemble A de cette tribu est tel que, pour tout $a > 0$, $A \cap \{T < a\} \in F_a$, donc $A \cap \{T \leq a\} \in F_{a^+} = F_a$ (théorème 1.6). Donc $A \in F_T$.

C. Q. F. D.

B. Le théorème de Blumenthal.

Les trajectoires du processus ayant été rendues continues à droite, toutes les difficultés de la théorie ont été se réfugier du côté gauche. Le théorème suivant est l'outil essentiel pour leur étude.

THÉORÈME 2.4 (Théorème de Blumenthal). - Soit T_n une suite de temps d'arrêt qui tend en croissant vers un temps d'arrêt T : quelle que soit la mesure initiale ν, on a P^ν - p. s. $X_T(\omega) = \lim X_{T_n}(\omega)$, sur l'ensemble des ω tels que $T(\omega) < \infty$.

DÉMONSTRATION. - En remplaçant au besoin les T_n par $\inf(T_n, a)$, on peut se ramener au cas où les T_n et T sont bornés. Soit g une fonction continue, Y la limite des X_{T_n}, qui existe d'après la construction même de Ω, soient U un évènement antérieur à T_n, ε un nombre positif, et $S_p = \sup(T_p + \varepsilon, T)$: S_p est F_T-mesurable. Prenons $p \geq n$; dès que p est assez grand, $\int_U g \circ X_{S_p} \, dP^\nu$ diffère très peu de $\int_U g \circ X_{T_p + \varepsilon} \, dP^\nu$ (car S_p et $T_p + \varepsilon$ ne diffèrent que sur un ensemble de mesure très petite). D'après le théorème 2.2, cette intégrale est égale à $\int_U P_\varepsilon(X_{T_p}, g) \, dP^\nu$ (car U est antérieur à T_p) et, dès que ε est assez petit, cela diffère très peu, indépendamment de p, de $\int_U g \circ X_{T_p} \, dP^\nu$. D'autre part,

$$\int_U g \circ X_{S_p} \, dP^\nu = \int_U P_{S_p - T}(X_T , g) \, dP^\nu \qquad ;$$

comme $S_p - T \leq \varepsilon$, cela diffère très peu, indépendamment de p, de $\int_U g \circ X_T \, dP^\nu$ Le résultat est donc le suivant : lorsque $p \to \infty$, si U est antérieur à un T_n donné, $\int_U g \circ X_{T_p} \, dP^\nu \to \int_U g \circ X_T \, dP^\nu$, on a donc, si U est maintenant un ensemble mesurable sur la tribu engendrée par la réunion des F_{T_n}

$$\int_U g \circ Y \, dP^\nu = \int_U g \circ X_T \, dP^\nu \qquad .$$

Si l'on n'avait pas presque sûrement $Y(\omega) = X_T(\omega)$, on pourrait trouver une boule $V_x(r)$ telle que

$$P^\nu[Y(\omega) \in V_x(r) \, , \, X_T(\omega) \notin V_x(2r)] > 0 \qquad ;$$

prenons pour g une fonction continue égale à 1 sur $V_x(r)$, à 0 hors de $V_x(2r)$, comprise entre 0 et 1 partout, et pour U l'évènement $\{Y(\omega) \in V_x(r)\}$: la première des deux intégrales est égale à $P^{\nu}[Y \in V_x(r)]$, la seconde majorée par $P^{\nu}[Y \in V_x(r)\ ,\ X_T \in V_x(2r)]$. On aboutit à une contradiction.

III. La mesurabilité des temps d'entrée.

A. Définition des temps d'entrée.

DÉFINITION. - Soit A une partie quelconque de X ; on appelle temps d'entrée (resp. pseudo-temps d'entrée) de la trajectoire $\omega \in \Omega$ dans A, et on note $T_A(\omega)$ (resp. $\overset{\circ}{T}_A(\omega)$), la borne inférieure de l'ensemble des $t > 0$ (resp. des $t \geqslant 0$) pour lesquels $X_t(\omega) \in A$.

NOTATION. - Soit I un intervalle $[0\ ,\ a]$; l'ensemble des trajectoires ω telles que $\overset{\circ}{T}_A(\omega) \leq a$ (resp. $\overset{\circ}{T}_A < \infty$) sera noté $R_I(A)$ (resp. $R(A)$).

Notre but dans ce paragraphe est de démontrer que $\overset{\circ}{T}_A$ et T_A sont des variables aléatoires (et même des temps d'arrêt) lorsque A est choisi de manière convenable ; il suffit pour cela de prouver que, pour tout $I = [0\ ,\ a]$, $R_I(a)$ appartient à F_a ; cela entraîne bien évidemment que $\overset{\circ}{T}_A$ est un temps d'arrêt, et la relation $T_A(\omega) = \lim\limits_{t>0} \overset{\circ}{T}_A(\theta_t\ \omega)$ montre qu'il en est de même pour T_A.

B. Mesurabilité des temps d'entrée dans les ensembles analytiques.

THÉORÈME 3.1. - Le temps d'entrée T_A dans tout ensemble analytique A (et en particulier dans tout ensemble borélien) est un temps d'arrêt.

La démonstration comporte plusieurs lemmes :

LEMME 1. - Si A est un ouvert, $R_I(A)$ appartient à F_a.

DÉMONSTRATION. - $R_I(A) = \bigcup_{r \in Q_a} \{\omega : X_r(\omega) \in A\}$ où Q_a est l'ensemble constitué de a, et des rationnels de l'intervalle $I = [0\ ,\ a]$.

LEMME 2. - Soit A un compact, et soient A_n des ouverts décroissants tels que $\bigcap_n \overline{A}_n = A$; quelle que soit la mesure initiale ν, les $\overset{\circ}{T}_{A_n}$ tendent P^{ν}-presque sûrement vers $\overset{\circ}{T}_A$. En particulier, pour tout intervalle $I = [0\ ,\ a]$, $R_I(A) \in F_a$.

DÉMONSTRATION. - Il est clair que les $\overset{\circ}{T}_{A_n}$ croissent, et restent plus petits que T^c_A ; soit $T = \sup_n \overset{\circ}{T}_{A_n}$: comme $X_{\overset{\circ}{T}_{A_n}} \to X_T$ presque sûrement en vertu du théorème de Blumenthal, et comme $X_{\overset{\circ}{T}_{A_n}} \in \overline{A}_n$ d'après la continuité à droite des trajectoires, $X_t \in A$ presque sûrement, et donc $T = T^c_A$ presque sûrement.

LEMME 3. - Soit K un compact, I un intervalle $[0 , a]$, ν une mesure initiale. Posons $W_I(K) = P^\nu[R_I(K)]$. La fonction d'ensemble $W_I(K)$ est une capacité de Choquet. (Elle est même alternée d'ordre infini, mais nous n'en aurons pas besoin).

DÉMONSTRATION.

1° Montrons que si A est une partie ouverte de X , la capacité intérieure $W^*_I(A)$ est égale à $P^\nu[R_I(A)]$: elle est égale par définition à $\sup_{K \subset A} W_I(K)$, et par conséquent majorée par $P^\nu[R_I(A)]$. Soit d'autre part K_n une suite croissante de compacts de A dont la réunion est A ; il est évident, d'après la continuité à droite des trajectoires, que les $\overset{\circ}{T}_{K_n}$ tendent vers $\overset{\circ}{T}_A$ en décroissant, et que $R_I(A) = \bigcup_n R_I(K_n)$. L'égalité de $W^*_I(A)$ et de $P^\nu[R_I(A)]$ en résulte bien.

2° Le lemme 3.2 exprime alors la continuité à droite de la fonction d'ensemble $W_I(K)$.

3° Soient A , A' , K , trois compacts. Il est clair que :

$$R_I(K \cup A \cup A') \subset R_I(K \cup A) \cup [R_I(K \cup A') - R_I(K)] \quad .$$

(Une trajectoire qui rencontre $K \cup A \cup A'$, mais non $K \cup A$, rencontre $K \cup A'$, mais non K). On peut déduire de là (cf. [2], p. 55) que $K \to W_I(K)$ est bien fortement sous-additive, et une capacité de Choquet.

DÉMONSTRATION du théorème. - Il résulte alors du théorème de capacitabilité de Choquet (voir [2], p. 61) que, pour toute partie analytique A de X , et tout intervalle I , on peut trouver un compact K contenu dans A , un ouvert G contenant A , tels que la différence $W_I(G) - W_I(K)$ soit aussi petite que l'on veut ; mais cela signifie que $R_I(A)$ peut être, quelle que soit la mesure initiale ν , encadré entre deux ensembles F_a-mesurables dont les mesures diffèrent très peu. Cela entraîne que $R_I(A) \in F_a$.

COROLLAIRE 3.2. - Soit A un sous-ensemble analytique de X ; il existe pour toute mesure initiale ν une suite croissante de compacts $K_n \subset A$, une suite décroissante d'ouverts $G_n \supset A$, tels que les temps d'arrêt T_{K_n} tendent vers $\overset{\circ}{T}_A$ en décroissant et que les $\overset{\circ}{T}_{G_n}$ tendent vers $\overset{\circ}{T}_A$ en croissant, presque sûrement pour la mesure P^ν sur Ω . Plus généralement, on peut trouver deux telles suites K_n , G_n , de sorte que ces propriétés aient lieu aussi pour les temps d'arrêt $\overset{\circ}{T}_{K_n}(\theta_{u_k}\omega)$, $\overset{\circ}{T}_{G_n}(\theta_{u_k}\omega)$, $\overset{\circ}{T}_A(\theta_{u_k}\omega)$, où $\{u_k\}_{k\in N}$ est une suite quelconque de nombres positifs.

DÉMONSTRATION. - Pour tout p rationnel positif, soit $I_p = [0 , p]$, $\{K^p_n\}_{n\in N}$ une suite croissante de compacts, telle que $P^\nu[R_{I_p}(A) - R_{I_p}(K_n)] \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Rangeons les rationnels en une suite, et soit K_n la réunion des K^p_n correspondant aux n premiers rationnels. Elle répond manifestement à la question. Dans le cas plus général envisagé à la fin de l'énoncé, soit $\{K_{n,k}\}_{n\in N}$ une suite associée de la manière qui précède à la mesure initiale νP_{u_k} : on prend pour K_n la réunion des n premiers $K_{n,k}$. On procéderait de même pour la construction de la suite des ouverts. Il importe de remarquer que ces suites dépendent de la mesure initiale.

Le théorème suivant est important en particulier dans les questions où l'on a besoin de "retourner le sens du temps".

THÉORÈME 3.3. - Soit A une partie analytique de E , et $R'_I(A)$ l'ensemble des trajectoires ω pour lesquelles il existe un point t de l'intervalle I tel que, soit $X_t(\omega)$, soit la limite à gauche $X_{t-}(\omega)$, appartienne à A . L'ensemble $R'_I(A) - R_I(A)$ est négligeable pour toute mesure P^ν .

DÉMONSTRATION. - Il clair que $R'_I(A)$ contient $R_I(A)$, et que si G est un ouvert qui contient A , $R'_I(A) \subset R_I(G)$. Comme on peut choisir G de manière telle que $P^\nu[R_I(G) - R_I(A)]$ soit très petit, le théorème est démontré.

C. Extension aux ensembles presque analytiques.

DÉFINITION 3.2. - Soit A une partie de X . On dit que A est presque borélienne (presque-analytique) si, pour toute mesure initiale ν , il existe deux ensembles boréliens (analytiques) A' et A'' , tels que $A' \subset A \subset A''$, et que $P^\nu[R(A'' - A')] = 0$.

REMARQUES.

1° La probabilité d'une rencontre à l'instant 0 étant nulle d'après cette définition, $\nu(A'' - A') = 0$. Il en résulte que l'ensemble A est mesurable pour toute mesure de Radon sur X .

2° Les ensembles presque-boréliens forment une tribu. Une fonction mesurable sur cette tribu est dite presque borélienne.

3° Tout ce qui vient d'être dit sur les temps d'entrée s'étend évidemment aux ensembles presque analytiques.

D. Définition de la topologie fine.

DÉFINITION 3.3. - Soit A une partie quelconque de X . On dit que A est effilée en un point x , ou que x est irrégulier pour A , si A est contenue dans une partie presque analytique B telle que $P^x[T_B = 0] = 0$. On dit que x est régulier pour A si A contient une partie presque analytique C telle que $P^x[T_C = 0] = 1$.

REMARQUES.

1° Il n'est pas évident (ni, peut-être, vrai sans hypothèses supplémentaires) que si A est une partie quelconque de E , tout point x soit ou régulier, ou irrégulier pour A . On peut démontrer qu'il en est bien ainsi dans le cas du mouvement brownien, par exemple. Montrons qu'il en est ainsi en tout cas lorsque A est presque analytique : l'évènement $\{T_A = 0\}$ est alors mesurable, et sa probabilité est donc 0 ou 1 si la mesure initiale est ε_x , en vertu de la "loi de tout ou rien".

2° En vertu de la continuité à droite des trajectoires, un ensemble est effilé en tout point qui ne lui est pas adhérent. Il est facile de voir que la réunion de deux ensembles effilés en x est encore effilée en x .

3° Le lecteur déduira aisément de la discussion de (B) que la généralité obtenue par l'usage des ensembles presque analytiques n'est qu'apparente : on peut remplacer en fait B par un G_δ , C par un K_σ .

4° L'évènement $[T_A = 0]$ étant F-mesurable si A est presque analytique, la fonction $P^x[T_A = 0]$ est mesurable pour toute mesure de Radon sur X . Il en est donc de même pour l'ensemble des points où A est effilée. On verra plus loin que cet ensemble est même presque-borélien.

DÉFINITION 3.4. - Une partie A de X est dite finement ouverte si $X - A$ est effilé en tout point de A. Il existe une topologie dont les ouverts sont les parties finement ouvertes de X : on l'appelle topologie fine sur X.

Nous démontrerons plus loin que les fonctions λ-excessives sont finement continues, et qu'un ensemble A est un voisinage fin du point x, si et seulement si $x \in A$ et $X - A$ est effilé en x.

DÉFINITION 3.5. - Une partie A de X est dite polaire si elle est contenue dans une partie B presque-analytique telle que l'on ait, pour tout x, $P^x[T_B < \infty] = 0$. (Autrement dit, presque aucune trajectoire ne rencontre B après l'instant 0). Une partie A de X est dite semi-polaire si elle est contenue dans une réunion dénombrable de parties presque-analytiques de X, effilées en tout point de x.

Un ensemble polaire est semi-polaire, mais la réciproque, vraie dans le cas du mouvement brownien, ne l'est pas en général.

Les deux théorèmes suivants continuent la discussion de (B), mais font intervenir la notion de point régulier.

THÉORÈME 3.4. - Soit A un ensemble presque analytique.

1° Pour toute mesure initiale ν, il existe une suite croissante de compacts $K_n \subset A$, telle que T_{K_n} tende P^ν-presque sûrement vers T_A en décroissant.

2° Si la mesure initiale ν ne charge pas l'ensemble des points de A irréguliers pour A, il existe une suite décroissante d'ouverts $G_n \supset A$ telle que T_{G_n} tende P^ν-presque sûrement vers T_A en croissant.

DÉMONSTRATION.

1° Soit u_k une suite de nombres positifs qui tend vers 0. Il est facile de voir que $T_A(\omega) = \inf_k [u_k + \overset{\circ}{T}_A(\theta_{u_k} \omega)]$. Choisissons (corollaire 3.2) une suite de compacts K_n croissante et telle que l'on ait pour tout k
$\overset{\circ}{T}_A(\theta_{u_k} \omega) = \inf_n \overset{\circ}{T}_{K_n} (\theta_{u_k} \omega)$ P^ν-presque sûrement. Cette suite répond aux conditions de l'énoncé.

2° Si la mesure ν ne charge pas l'ensemble des points de A irréguliers pour A, on a :

$$P^{\nu}[T_A \neq T_A^{\circ}] = \int_X P^x[T_A \neq T_A^{\circ}]\, d\nu(x) = 0$$

car $P^x[T_A \neq T_A^{\circ}] > 0$ si et seulement si x appartient à A et est irrégulier pour A. Il suffit alors de choisir la suite G_n envisagée dans l'énoncé du corollaire 3.2 (pour un ouvert G, on a $T_G = T_G^{\circ}$).

THÉORÈME 3.5. - Soit A un ensemble presque analytique : quelle que soit la mesure initiale, la répartition de X_{T_A} est portée par la réunion de A et de l'ensemble de ses points réguliers.

DÉMONSTRATION. - Soit en effet S le temps d'arrêt égal à T_A si X_{T_A} n'appartient ni à A, ni à l'ensemble des points réguliers pour A, égal à $+\infty$ sur le complémentaire de cet évènement. Par définition du temps d'entrée T_A, les trajectoires du processus $\{X_{S+t}\}$ entrent dans A à l'instant 0. D'autre part, la mesure initiale de ce processus est concentrée sur l'ensemble des points irréguliers pour A, et qui n'appartiennent pas à A ; si cette mesure initiale n'est pas nulle, le temps d'entrée est donc presque sûrement strictement positif, et il y a contradiction.

IV. Extension au cas sous-markovien.

Supposons maintenant que X soit un espace LCD, et que $X' = X \cup \{\partial\}$ soit son compactifié d'Alexandrov. Soit $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X qui tendent vers 0 à l'infini, espace qui est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme de la convergence uniforme ; identifions $C_0(X)$ à un sous-espace de $C(X')$ de la manière évidente. Soit alors $\{P_t\}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs de norme ≤ 1 sur $C_0(X)$: nous pouvons le prolonger à $C(X')$ par la formule :

$$P'_t f = P_t(f - f(\partial)) + f(\partial) \quad .$$

Le semi-groupe $\{P'_t\}$ vérifie sur X' les hypothèses de l'exposé 5, p. 1 : on peut d'ailleurs remarquer que la fonction de transition $P'_t(x, A)$ est celle qui est définie à la page 5, exposé 3. Nous allons ici simplement préciser un peu la construction du processus canonique.

L'espace Ω étant celui que l'on a construit précédemment, la fonction de transition étant $P'_t(x, A)$, soit $S(\omega)$ la borne inférieure des t tels que l'on ait, soit $X_t(\omega) = \partial$, soit $X_{t-}(\omega) = \partial$ il résulte du théorème 3.3 que, pour toute mesure initiale, on a P^ν - p. s. $X_S(\omega) = \partial$. D'autre part, la propriété forte de Markov, appliquée au processus $\{X_{S+t}\}_{t\in R_+}$, et compte tenu de la relation $P_t(\partial , \{\partial\}) = 1$, $\forall$ t , montre que pour tout rationnel, donc pour tout t d'après la continuité à droite, on a presque sûrement $X_{S+t}(\omega) = \partial$. Autrement dit : on peut restreindre l'espace Ω à l'ensemble des trajectoires ω qui restent au point ∂ à partir du premier instant $S(\omega)$ où elles l'atteignent, et qui sont telles que pour tout $a < S(\omega)$, l'ensemble des valeurs de $X_t(\omega)$ sur l'intervalle $[0 , a]$ soit relativement compact dans X .

Si $P_t(x , X) = 1$ pour tout t , on voit immédiatement que $S(\omega) = \infty$ p. s. : le résultat qui vient d'être énoncé n'est cependant pas évident, il exprime que les trajectoires ne vont pas osciller entre le point à l'infini, et des points à distance finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL (R. M.). - An extended Markov property, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 52-72.

[2] BRELOT (Marcel). - Eléments de la théorie classique du potentiel. - Paris, Centre de Documentation Universitaire, 1959 ("Les cours de Sorbonne", 3e cycle).

[3] DOOB (J. L.). - Markoff chains-denumerable case, Trans. Amer. math. Soc., t. 58, 1945, p. 455-473.

[4] DYNKIN (E. B.) et JUŠKEVIČ (A. A.). - Processus fortement markoviens (en russe), Teorija Veroj. primen., t. 1, 1956, p. 149-155.

[5] DYNKIN (E. B.). - Fondements de la théorie des processus de Markov (en russe). - Moscou, 1959.

[6] HUNT (G. A.). - Some theorems concerning Brownian motion, Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 294-319.

[7] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials, Illinois J. Math., t. 1, 1957, p. 44-93.

[8] KINNEY (J. R.). - Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. Amer. math. Soc., t. 74, 1953, p. 280-302.

[9] LOÈVE (Michel). - Probability theory, 2nd ed. - Princeton, New York, D. Van Nostrand, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

APPENDICE.

Nous avons défini les opérateurs de translation θ_t , où t est une constante, au cours de l'exposé n° 3 (p. 8). Lorsqu'on cherche à définir la translation θ_T par un temps d'arrêt quelconque T , on voit apparaître quelques difficultés de mesurabilité. Comme ces opérateurs θ_T sont d'un emploi extrêmement commode, nous avons groupé leurs propriétés ci-dessous. Les notations sont celles de l'exposé n° 5.

DÉFINITION. - Soit T un temps d'arrêt quelconque (fini ou non). La translation par T est l'application de Ω dans lui-même, qui associe à la trajectoire ω la trajectoire $\theta_T\,\omega$ définie par la relation :

$$\forall \;s\;,\quad X_s(\theta_T\,\omega) = X_{T(\omega)+s}(\omega)$$

où le second membre, conformément à nos conventions (exposé n° 3, p. 2) a la valeur ∂ si $T(\omega) = +\infty$.

Il est clair que la trajectoire $\theta_T\,\omega$ possède les mêmes propriétés de régularité que ω , et, en particulier, appartient bien à Ω .

THÉORÈME 1. - Si Ω est muni de la tribu F , et si T désigne un temps d'arrêt, l'application θ_T est mesurable.

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que l'image réciproque, par θ_T , d'un ensemble de F^o , appartient à F . Il suffit de le vérifier pour un ensemble de la forme

$\{X_{t_1} \in A_1 \,,\, \dots \,,\, X_{t_n} \in A_n\}$, où $A_1 \dots A_n$ sont des parties boréliennes de X' ; l'image réciproque d'un tel ensemble est l'ensemble $\{X_{T+t_1} \in A_1 \,,\, \dots \,,\, X_{T+t_n} \in A_n\}$, qui est bien F-mesurable, d'après le corollaire 2.3 (exposé n° 5, p. 7). Il résulte aussi de ce corollaire que, si ν désigne une mesure initiale, l'image par θ_T de la mesure P^ν sur $(\Omega\,,\,F)$ est la mesure $P^{\nu P_T}$ (il suffit encore de considérer les ensembles du type ci-dessus). Soit alors A un ensemble F-mesurable : il existe, par définition de F , deux ensembles F^o-mesurables A_1 et A_2 , tels que $A_1 \subset A \subset A_2$, et que $A_2 - A_1$ soit $P^{\nu P_T}$-négligeable ; l'ensemble $\theta_T^{-1}(A_2 - A_1)$ est donc P^ν-négligeable, et il résulte alors de ce qui précède que $\theta_T^{-1}(A)$ est F-mesurable.

THÉORÈME 2. - Soient $\varphi(\omega)$ une fonction F-mesurable, bornée, sur Ω , et $\Phi(x)$ la fonction $x \to E^x[\varphi]$ sur X ; on a la relation :

$$E^{\nu}[\varphi \circ \theta_T \mid F_T] = \Phi \circ X_T(\omega)$$

P^{ν}-presque sûrement, pour toute mesure initiale ν et tout temps d'arrêt T .

DÉMONSTRATION. - Voir la démonstration de cette propriété, pour les temps d'arrêt constants, dans l'exposé n° 4 : il n'y a aucune difficulté à l'étendre au cas plus général ci-dessus.