Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Paul-André Meyer

Théorie des martingales et des semi-martingales

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. nº 4, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A5_0>

THÉORIE DES MARTINGALES ET DES SEMI-MARTINGALES

par Paul-André MEYER

(d'après J. L. DOOB)

I. Ensemble d'indices discret.

A. Le théorème fondamental sur les systèmes de temps d'arrêt.

THÉORÈME 1.1. - Soit $(\Omega , F , p , \{X_n\}_{n\in N})$ une super-martingale adaptée à une famille de sous-tribus F_n de F. Soit $\{T_k\}_{k\in N}$ une suite de temps d'arrêt relatifs aux F_n, tels que $\forall\ k$, $T_k \leqslant T_{k+1}$. Pour que le processus $\{X_{T_k}\}_{k\in N}$ soit une super-martingale relativement aux tribus $\{F_{T_k}\}_{k\in N}$, il suffit que l'une des trois conditions suivantes soit réalisée :

1° Les X_n sont des variables aléatoires positives ;

2° Les $\{X_n\}_{n\in N}$ sont uniformément intégrables ;

3° Chaque T_k est borné p. s. (cas des processus "arrêtés" cf. page 3, exposé 3)

Si l'une de ces conditions est réalisée, on a la relation

$$E(X_{T_k}) \leqslant E(X_1) \quad .$$

Si en outre, pour un temps d'arrêt T_k, l'inégalité :

4° $\lim_n \inf \int_{\{T_k > n\}} X_n \, dp \leqslant 0$

qui est impliquée par (2) et (3) est vérifiée, on a :

$$\inf_n E(X_n) \leqslant E(X_{T_k}) \quad .$$

Si le processus $\{X_n\}$ est une martingale, et si les conditions (1) et (4) pour tout k, ou (2), ou (3) sont vérifiées, le processus $\{X_{T_k}\}$ est une martingale, et $E(X_{T_k}) = E(X_T)$.

Enfin, si la condition (2) est réalisée, et si $\{T_i\}_{i\in I}$ est la famille de tous les temps d'arrêt relatifs aux tribus F_n, toutes les variables aléatoires X_{T_i}

sont uniformément intégrables.

DÉMONSTRATION.

a. Sous les conditions 1°, 2°, 3°, si T est un temps d'arrêt, X_T est intégrable :

Supposons d'abord que T soit borné par un entier k : on a alors $E(|X_T|) \leq \sum_1^k E(|X_n|) < \infty$. Ecrivons alors :

$$E(X_T) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\{T=j\}} X_j \, dp = \int_{\{T=k\}} X_k \, dp + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\{T=j\}} X_j \, dp \quad .$$

Comme l'ensemble $\{T = k\}$ est le complémentaire de l'ensemble $\{T \leq k-1\}$, il appartient à F_{k-1} : donc, on a, d'après l'inégalité des super-martingales :

$$\int_{\{T=k\}} X_k \, dp \leq \int_{\{T=k\}} X_{k-1} \, dp \quad .$$

Soit alors T^1 le temps d'arrêt $\inf[k-1 \, , T]$: le résultat que nous venons d'obtenir s'écrit : $E(X_T) \leq E(X_{T^1})$. En recommençant ce procédé, il vient : $E(X_T) \leq E(X_1)$.

Etablissons une autre inégalité, toujours en supposant T borné par k : nous avons : $E(|X_T|) = E(X_T) + 2E(X_T^-)$. Nous avons déjà majoré $E(X_T)$. Le processus $\{\inf[X_n \, , 0]\}$ est une super-martingale, donc le processus $\{X_n^-\}$ est une sous-martingale. Par conséquent, d'après le même raisonnement que plus haut (mais en commençant par isoler les ensembles $\{T=1\}$, $\{T=2\}$, etc.)

$$E(X_T^-) \leq E(X_k^-) = \sup_{n \leq k} E(X_n^-) \quad .$$

Par conséquent, pour tout temps d'arrêt borné :

$$E(|X_T|) \leq E(X_1) + \sup_n E(X_n^-) \qquad \text{(inégalité 1)} \quad .$$

Cette inégalité est alors vraie pour un temps d'arrêt T quelconque, d'après le lemme de Fatou appliqué aux temps d'arrêt $T_k = \inf[T \, , k]$.

Il est alors clair que si (3) est réalisée, X_T est intégrable. Si (2) est réalisée, $\sup E(X_n^-) < \infty$. Enfin, si (1) est réalisée, $\forall \; n, E(X_n^-) = 0$.

b. Vérification de l'inégalité des super-martingales.

Soit A un évènement de F_T : nous avons à vérifier que :

$$\int_A X_{T_n}\, dp \geq \int_A X_{T_{n+1}}\, dp \quad .$$

Décomposons X_{T_n} suivant les valeurs de T_n, en admettant que l'une des trois conditions a lieu, ce qui assure l'intégrabilité :

$$\int_{A\cap\{T_n=j\}} X_j\, dp = \int_{A\cap\{T_n=j\}\cap\{T_{n+1}=j\}} X_j\, dp + \int_{A\cap\{T_n=j\}\cap\{T_{n+1}>j\}} X_j\, dp \quad .$$

Comme l'ensemble d'intégration de la dernière intégrale appartient à F_j, d'après l'inégalité des super-martingales :

$$\int_{A\cap\{T_n=j\}} X_j\, dp \geq \int_{A\cap\{T_n=j\}\cap\{T_{n+1}=j\}} X_j\, dp + \int_{A\cap\{T_n=j\}\cap\{T_{n+1}>j\}} X_{j+1}\, dp \quad .$$

Poursuivons le raisonnement sur le dernier terme, en isolant l'ensemble où $T_{n+1} = j+1$, et celui où il est $> j+1$ ... au bout de $k-j$ transformations. on parvient à l'inégalité :

$$\int_{A\cap\{T_n=j\}} X_j\, dp \geq \int_{A\cap\{T_n=j\}\cap\{T_{n+1}\leq k\}} X_{T_{n+1}}\, dp + \int_{A\cap\{T_n=j\}\cap\{T_{n+1}>k\}} X_k\, dp \quad .$$

Sommons sur j, de 0 à k, et passons à la limite en k :

$$\int_A X_{T_n}\, dp \geq \int_A X_{T_{n+1}}\, dp + \limsup_{k\to\infty} \int_{A\cap[T_{n+1}>k]} X_k\, dp \quad .$$

L'inégalité des martingales est donc vraie au moins :

1° Si les X_n sont positives (terme complémentaire ≥ 0) ;

2° Si les X_n sont uniformément intégrables (le terme complémentaire tend vers 0) ;

3° Si T_{n+1} est p. s. borné (ensemble d'intégration complémentaire vide).

c. <u>Vérification des inégalités</u> $E(X_1) \geq E(X_T) \geq \inf_n E(X_n)$.

La première inégalité est triviale : soit X_0 une variable aléatoire égale à la constante $E(X_1)$, T_0 un temps d'arrêt égal à 0.

Le processus $X_0, X_1 \ldots X_n$ est une super-martingale. Appliquons (b) au système formé des deux temps d'arrêt T_0 et T : il vient

$$E(X_T) \leq E(X_{T_0}) = E(X_1) \quad .$$

Il est immédiat aussi que (2) et (3) impliquent (4). Supposons donc (1) et (4) pour un temps d'arrêt T , ou (2), ou (3) : il vient :

$$E(X_T) = \sum_1^n \int_{\{T=j\}} X_j \, dp + \int_{\{T>n\}} X_T \, dp \geqslant \sum_1^n \int_{\{T=j\}} X_n \, dp + \int_{\{T>n\}} X_T \, dp$$

d'après une décomposition analogue à celle qui a été utilisée pour (a) : on isole l'ensemble où $T = 1$, et celui où $T > 1$, etc. Alors :

$$E(X_T) \geqslant E(X_n) + \int_{\{T>n\}} X_T \, dp - \int_{\{T>n\}} X_n \, dp \quad .$$

Faisons tendre n vers ∞ le long d'une suite convenablement choisie : $E(X_n) \to \inf_n E(X_n)$; le second terme tend vers 0 puisque X_T est intégrable. Enfin, le dernier terme a une limite $\geqslant 0$ d'après (4).

d. Cas des martingales : pour le traiter au moyen des inégalités précédentes, il suffit de remarquer que : pour qu'une super-martingale $\{X_n\}$ soit une martingale, il faut et il suffit que $E(X_n)$ soit constante.

e. Nous remettrons la démonstration de l'intégrabilité uniforme à plus tard, après les théorèmes de convergence (cf. p. 7).

THÉORÈME 1.2. - Soit $\{X_i\}_{i=1,2...n}$ une super-martingale, et h une constante positive : on a les inégalités :

$$h.P\{\sup_i X_i \geqslant h\} \leqslant E(X_1) - \int_{\{\sup_i X_i < h\}} X_n \, dP \leqslant E(X_1) + 2\,E(X_n^-)$$

$$h.P\{\inf_i X_i \leqslant -h\} \leqslant \int_{\{\inf_i X_i \leqslant -h\}} X_n \, dp \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit $T(\omega)$ le premier des indices i tels que $X_i(\omega) \geqslant h$ (resp. $\leqslant -h$) , ou n s'il n'existe pas de tel indice. On a, comme T est un temps d'arrêt, la relation

$$E(X_1) \geqslant E(X_T) \geqslant hP\{\sup_i X_i \geqslant h\} + \int_{\{\sup_i X_i < h\}} X_n \, dp$$

$$(\text{resp. } E(X_n) \leqslant E(X_T) \leqslant -hP\{\inf X_i \leqslant -h\} + \int_{\{\inf_i X_i > h\}} X_n \, dp) \, .$$

Le théorème s'en déduit immédiatement.

<u>Exemple d'application</u>. - Soit $X_1 \dots X_n$ une martingale, et supposons que les

X_n soient de carré sommable. Le processus X_i^2 est alors une sous-martingale, et les inégalités ci-dessus donnent :

$$h^2 P\{\sup_i |X_i| \geq h\} \leq E(X_n^2) \quad .$$

Cette inégalité est bien connue dans le cas où les X_n sont les sommes partielles d'une série de variables aléatoires indépendantes d'espérance mathématique nulle, sous le nom d'inégalité de Kolmogorov.

B. L'inégalité de Doob.

THÉORÈME 1.3 (Inégalité de Doob). - Soit $\{X_i\}_{i=1\ldots n}$ une sous-martingale. Soit $\overline{N}(\omega)$ le nombre des passages montants de la trajectoire associée à ω sur un intervalle $]a\,,\,b[$ (voir l'exposé n° 2, p. 7). On a l'inégalité :

$$E(\overline{N}) \leq \frac{1}{b-a}\,[E(X_n - a)^+ - E(X_1 - a)^+] \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Posons $Y_i = (X_i - a)^+$, et $b - a = r$; nous sommes ramenés à l'évaluation du nombre des passages montants d'une sous-martingale positive sur l'intervalle $]0\,,\,r[$. Définissons par récurrence des temps d'arrêt de la manière suivante : $T_1(\omega) = 1$; $T_2(\omega)$ est le premier indice $i > 1$ tel que $Y_i(\omega) = 0$, ou n s'il n'existe pas de tel indice ; $T_3(\omega)$ est le premier indice $i > T_2(\omega)$ tel que $Y_i(\omega) \geq r$, ou n s'il n'en existe pas ; on continue en alternant ainsi jusqu'à $T_n(\omega) = n$. Ecrivons :

$$Y_n - Y_1 = (Y_{T_2} - Y_{T_1}) + (Y_{T_3} - Y_{T_2}) + \ldots + (Y_{T_n} - Y_{T_{n-1}}) \quad .$$

Les termes de rang pair non nuls correspondent à des passages montants, sauf peut-être le dernier de ces termes, qui est en tout cas positif, puisque les Y_i le sont. La contribution des termes de rang pair est donc au moins égale à $\overline{N}(\omega).r$. Intégrons, et tenons compte de ce que, le processus $\{Y_{T_i}\}$ étant une sous-martingale les espérances mathématiques des termes de rang impair sont positives. Il vient :

$$E(Y_n - Y_1) \geq r.E(\overline{N})$$

qui est l'inégalité demandée. Cette démonstration est due à HUNT.

COROLLAIRE (inégalité de Doob). - Soit $\{Y_i\}_{i=1\ldots n}$ une sous-martingale. Appliquons le résultat précédent à la sous-martingale $\{(Y_i - a)^+\}$ et à l'intervalle $(0\,,\,b - a)$: il vient :

$$E(\bar{N}) \leq [E(Y_n - a)^+ - E(Y_1 - a)^+]/(b - a)$$
$$\leq E(Y_n - a)^+/(b - a) \leq [E(|Y_n|) + |a|]/(b - a) \quad .$$

C. Théorèmes de convergence.

THÉORÈME 1.4. - Soit $\{X_n\}_{n\in N}$ une super-martingale relative à des tribus F_n. Si $\sup_n E(|X_n|) \leq \infty$, $X_\infty(\omega) = \lim_n X_n(\omega)$ existe et est finie p. s. Cette condition est toujours réalisée si les X_n sont uniformément intégrables ou positives. Dans ce dernier cas, on a $E(X_\infty) \leq \lim E(X_n)$, avec égalité si et seulement si les X_n sont uniformément intégrables. Dans les deux cas ci-dessus, le processus $\{X_n\}_{n\leq\infty}$ est une super-martingale.

DÉMONSTRATION. - Soit ω une trajectoire telle que $X_n(\omega)$ n'ait pas de limite lorsque $n \to \infty$: il existe un couple de nombres rationnels a, b, $a < b$, tels que le nombre des passages descendants de la trajectoire sur l'intervalle (a, b) soit infini. Or ce nombre de passages ne peut être infini avec une probabilité positive si $E(|X_n|)$ est bornée, d'après le théorème 1.3.

Si les $\{X_n\}$ sont uniformément intégrables, tous les passages à la limite sous le signe somme sont permis (exposé 1, Appendice). Si les X_n sont positives, on peut appliquer le lemme de Fatou, et conclure par le théorème 7, exposé 1, p. 9.

COROLLAIRE ("Décomposition de Riesz"). - Soit $\{X_n\}_{n\in N}$ une super-martingale uniformément intégrable : on peut la décomposer en : une martingale $\{Y_n\}$ uniformément intégrable, (une "solution de Dirichlet") et une super-martingale $\{Z_n\}$ uniformément intégrable telle que $\lim_n Z_n = 0$ p. s. (un "potentiel").

DÉMONSTRATION. - Poser $Y_n = E[X_\infty | F_n]$, $Z_n = X_n - Y_n$, et consulter l'Appendice à la fin de l'exposé.

THÉORÈME 1.5. - Soit $\{X_{-n}\}_{-n\in -N}$ une super-martingale relative à des tribus F_{-n}. Soit $F_{-\infty}$ la tribu intersection des F_{-n}, et supposons que $\lim_n E(X_{-n}) < +\infty$: $X_{-\infty}(\omega) = \lim_n X_{-n}(\omega)$ existe et est finie p. s. Elle est intégrable, la convergence a lieu au sens de L^1, les X_{-n} sont uniformément intégrables, et le processus $\{X_{-n}\}_{-n\in\{-\infty\}\cup -N}$ est une super-martingale par rapport aux tribus $F_{-\infty}$, F_{-n}.

DÉMONSTRATION. - Commençons par prouver l'uniforme intégrabilité des X_n : il nous sera plus commode de considérer une sous-martingale $\{Y_n\}$ telle que

$\lim E(Y_{-n}) > -\infty$; soit h une constante positive :

$$\int_{\{|Y_{-n}|>h\}} |Y_{-n}|\, dp = \int_{\{Y_{-n}>h\}} Y_{-n}\, dp + \int_{\{Y_{-n}\geq -h\}} Y_{-n}\, dp - E(Y_{-n}) \quad .$$

Choisissons un k assez grand pour que $E(Y_{-k})$ diffère très peu de $\lim\limits_n E(Y_{-n})$, et supposons $n > k$. Appliquons l'inégalité des sous-martingales :

$$\leqslant \int_{\{Y_{-n}>h\}} Y_{-k}\, dp + (\int_{\{Y_{-n}\geq h\}} Y_{-k}\, dp - \lim_n E(Y_{-n})) \quad .$$

D'après le théorème 1.2, la probabilité du premier ensemble d'intégration tend vers 0 lorsque $h \to \infty$, celle du second ensemble tend vers 1 , uniformément en n . Il résulte une convergence vers 0 uniforme en n pour le premier membre.

Maintenant que l'uniforme intégrabilité est prouvée, remarquons que l'inégalité de Doob implique, comme dans le théorème précédent, l'existence p. s. de $\lim X_{-n}$, même sans l'hypothèse $\sup E(X_{-n}) < \infty$. Le reste du théorème est alors immédiat.

D. Démonstration de la dernière partie du théorème 1.1.

D'après le "théorème de décomposition de Riesz", il nous suffit de raisonner sur une martingale uniformément intégrable $\{Y_n\}$ et sur une super-martingale positive $\{Z_n\}$ telle que $\lim\limits_n E[Z_n] = 0$.

Premier cas : Nous savons (théorème 1.4) qu'il existe une variable aléatoire $X_\infty = \lim\limits_n X_n$ telle que le processus $\{X_n\}_{n\leqslant\infty}$ soit une martingale. Le processus $\{|X_n|\}_{n\leqslant\infty}$ est alors une sous-martingale. Il en résulte que, pour tout temps d'arrêt T :

$$\int_{\{|X_T|>h\}} |X_T|\, dp \leqslant \int_{\{|X_T|>h\}} |X_\infty|\, dp \quad .$$

Or

$$p[|X_T| > h] \leqslant p[\sup_n |X_n| > h] \leqslant E[|X_\infty|]/h \quad ;$$

l'intégrale du second membre tend donc vers 0 lorsque $h \to \infty$, uniformément en T .

Deuxième cas : Soit $\{S_n\}$ une suite de temps d'arrêt : l'intégrabilité uniforme des Z_{S_n} équivaut à la convergence vers 0 , uniforme en n , des $\int_{\{Z_{S_n}>h\}} Z_{S_n}\, dp$

lorsque $h \to \infty$. Soit $R_n^h(\omega) = S_n(\omega)$ si $Z_{S_n}(\omega) > h$, $R_n^h(\omega) = \infty$ sinon. Les $R_n^h(\omega)$ sont des temps d'arrêt. Soit $T^h(\omega)$ le premier indice k tel que $Z_k(\omega) > h$, ou ∞ s'il n'y a pas de tel indice : l'intégrale ci-dessus est égale à $E[Z_{R^h}] \leqslant E[Z_{T^h}]$ d'après le théorème 1.1., car $T^h \leqslant R_n^h$: il nous suffit donc, comme les T^h tendent p. s. en croissant vers ∞ avec h d'après le théorème 1.2., de montrer que, pour toute suite de temps d'arrêt T_n qui tendent en croissant vers $+\infty$ p. s., $E(Z_{T_n}) \to 0$. Soit T un temps d'arrêt ; on a :

$$E(Z_T) = \int_{[T\leqslant k]} Z_T \, dp + \int_{[T>k]} Z_T \, dp \quad .$$

Pour la seconde intégrale, posons $U(\omega) = T(\omega)$ si $T(\omega) > k$, ∞ sinon ; $V(\omega) = k$ si $T(\omega) > k$, ∞ sinon : U et V sont des temps d'arrêt, $U > V$; donc $E(Z_U) \leqslant E(Z_V)$: la seconde intégrale est donc majorée par $E(Z_k)$. Choisissons k tel que $E(Z_k) < \varepsilon$, remplaçons T par T_n, choisissons n_0 assez grand pour que $\sum_1^k \int_{\{T_n\leqslant k\}} Z_i \, dp < \varepsilon$ pour $n > n_0$: nous avons rendu le premier membre arbitrairement petit.

II. Ensemble d'indices continu.

Nous supposerons ici que l'ensemble d'indices est un intervalle admettant 0 comme premier élément. Cette restriction n'est pas nécessaire (cf. DOOB, [1], p. 360). Nous ne donnons ici que quelques théorèmes, ceux qui seront utiles dans la suite.

THÉORÈME 2.1. - Soit $\{X_t\}$ une super-martingale séparable : presque toutes les trajectoires sont bornées sur tout intervalle compact de R_+.

DÉMONSTRATION. - Application immédiate du théorème 1.2 et de la définition de la séparabilité.

THÉORÈME 2.2. - Soit $\{X_t\}$ une super-martingale séparable : pour presque toute trajectoire ω, il existe en tout point t une limite à droite $X_{td}(\omega)$, une limite à gauche $X_{tg}(\omega)$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de reprendre la discussion du théorème 4.4, exposé 2, p. 7 : pour tout couple de rationnels r_1, r_2, et tout intervalle compact I le nombre des passages $n(\omega, I, r_1, r_2)$ est p. s. fini d'après l'inégalité de Doob.

Les deux théorèmes suivants sont relatifs à des super-martingales dont les trajectoires sont p. s. continues à droite :

THÉORÈME 2.3. - Soit $\{X_t\}$ une super-martingale relative à une famille de tribus F_t, et dont les trajectoires sont p. s. continues à droite : le processus $\{X_t\}$ est alors une super-martingale relativement aux tribus F_{t+}.

DÉMONSTRATION. - Soit U un événement de F_{s+}, t un nombre $> s$. On a pour une suite $\varepsilon_n \to 0$: $\int_U X_{s+\varepsilon_n} dp \geq \int_U X_t dp$. Or, d'après le théorème 1.5 les $X_{s+\varepsilon_n}$ sont uniformément intégrables. On peut donc passer à la limite.

THÉORÈME 2. 4 (généralisation au cas continu du théorème 1.1). - Soit $\{X_t\}$ une super-martingale relative à une famille de tribus F_t, dont les trajectoires sont p. s. continues à droite : soit $\{T_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ une famille de temps d'arrêts relatifs aux F_t, où $\mathfrak{J}$ est un ensemble ordonné, telle que, si $i < j$, on ait p. s. $T_i \leq T_j$. Pour que le processus $\{X_{T_i}\}_{i\in\mathfrak{J}}$ soit une super-martingale relativement aux tribus F_{T_i} (complétées), et que l'on ait l'inégalité $E(X_{T_i}) \leq E(X_0)$ pour tout i, il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisées :

1° Les X_t sont positives.

2° Les X_t sont uniformément intégrables.

3° Chaque T_i est p. s. borné (cas des processus "arrêtés").

Dans les cas (2) et (3), en outre, on a l'inégalité :

$$E(X_{T_i}) \geq \inf_t E(X_t) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Pour tout temps d'arrêt T, posons $T^n(\omega) = (k+1)/2^n$ si $k/2^n \leq T(\omega) < (k+1)/2^n$ (k, n, entiers); les T^n sont des temps d'arrêt, ils tendent en décroissant vers T, tout événement antérieur à T est antérieur à T^n, et enfin, si S est un temps d'arrêt, $S \leq T$ p. s., alors $S^n \leq T^n$ p. s.

Suivons alors la démonstration du théorème 1.1.

a. <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt,</u> X_T <u>est mesurable et intégrable</u> : La mesurabilité résulte de ce que $X_T = \lim X_{T^n}$. L'intégrabilité de ce que, si (1), (2), ou (3) est vérifiée, chaque X_{T^n} est intégrable, et $E(X_{T^n}) \leq E(X_0)$ (théorème 1.1 appliqué à la super-martingale discrète $\{X_{k/2^n}\}$). Il est immédiat, que le processus $\{X_{T^n}\}_{n\in N}$ est une super-martingale, N étant muni de l'ordre opposé (théorème 1.1). Il résulte alors du théorème 1.5 que les X_{T^n} sont uniformément intégrables. X_T est donc bien intégrable.

b. Vérification de l'inégalité des super-martingales : soient S et T deux temps d'arrêt, $S \leq T$, U un événement de F_S : nous avons à vérifier que $\int_U X_S\, dp \geq \int_U X_T\, dp$. Or $U \in F_{S^n}$, et $S^n \leq T^n$; d'après le théorème 1.1, sous les conditions (1), (2), (3), l'inégalité ci-dessus a lieu pour les temps d'arrêt S^n , T^n : on passe à la limite grâce à l'uniforme intégrabilité démontrée plus haut.

c. Inégalité $E(X_T) \geq \inf_t E(X_t)$: (si (2) ou (3) a lieu) : triviale d'après l'intégrabilité uniforme des X_{T^n} .

d. Cas des martingales : il se traite comme dans le théorème 1.1 ; si (2) ou (3) a lieu, et si X_t est une martingale, $\inf_t E(X_t) = E(X_1)$, donc $E(X_T) = E(X_1)$.

REMARQUE. - Soit T un temps d'arrêt : X_T n'est pas forcément F_T-mesurable. Mais soit F_{T+} la tribu des évènements A tels que, pour tout t , $A \cap \{T < t\} \in F_t$: il est facile de voir que F_{T+} est l'intersection des tribus F_{T^n} ; comme X_{T^n} est F_{T^n}-mesurable, X_T est F_{T+}-mesurable. La famille des tribus F_{T_i+} est donc adaptée au processus X_{T_i} , et la démonstration ci-dessus s'applique aux F_{T_i+} .

BIBLIOGRAPHIE

De nombreuses applications de la théorie des martingales ont été laissées de côté ici. Voir :

[1] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley, 1953.

[2] DOOB (J. L.). - Probability methods applied to the first boundary value problem, Proceedings of the 3rd Berkeley symposium on mathematical statistics and probability [3. 1954-1955. Berkeley] ; Vol. 2, p. 49-80. - Berkeley, Los Angeles, University of California Press, 1956.

[3] DOOB (J. L.). - Probability theory and the first boundary value problem. Illinois J. of Math., t. 2, 1958, p. 19-36.

APPENDICE

La démonstration du corollaire du théorème 1.4 (décomposition de Riesz) exige que l'énoncé de ce théorème soit un peu précisé.

THÉORÈME 1.4 (Cas des martingales). - Les notations étant celles de la page 4-06, supposons que $\{X_n\}$ soit une martingale uniformément intégrable. Le processus $\{X_n\}_{n\leq\infty}$ est alors une martingale. Réciproquement, si X_∞ désigne une variable aléatoire quelconque, intégrable, F_∞-mesurable, le processus $X_n = E[X_\infty|F_n]$ est une martingale uniformément intégrable, et l'on a p. s. $X_\infty = \lim_n X_n$.

DÉMONSTRATION. - Si les X_n sont uniformément intégrables, tous les passages à la limite sous le signe "somme" sont permis, et la première assertion de l'énoncé en résulte immédiatement. En ce qui concerne la réciproque, nous n'établirons pas ici l'intégrabilité uniforme du processus $X_n = E[X_\infty|F_n]$, car cela a été fait, sous une forme plus générale, à la page 4-07 (démonstration de D, premier cas). Soit enfin Y la limite des X_n ; d'après la partie directe du théorème, Y est F_∞-mesurable, et $X_n = E[Y|F_n]$ p. s., du fait que les X_n sont uniformément intégrables. Il en résulte que Y et X_∞ ont même intégrale sur tout ensemble de toute tribu F_n, donc sur tout ensemble de la tribu F_∞ qu'elles engendrent. Comme Y et X_∞ sont F_∞-mesurables, elles sont égales presque sûrement.