Gustave Choquet

Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 4 (1959-1960), exp. n° 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1959-1960__4__A3_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
4e année, 1959/60, n° 3

15 février 1960

LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DANS LES ENSEMBLES CONVEXES COMPACTS

par Gustave CHOQUET

Dans un travail antérieur [2], nous avons démontré le théorème suivant :

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel localement convexe séparé, $\mathcal{B}$ une partie convexe compacte de $\mathcal{V}$, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$. Alors si $\mathcal{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ de $\mathcal{B}$, et tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au moins une mesure de Radon positive portée par $\mathcal{E}$.

Récemment, Errett BISHOP et Karel de LEEUW [1], en utilisant une idée nouvelle fort intéressante, ont pu simplifier notre démonstration et étendre le théorème sous une forme atténuée au cas où $\mathcal{B}$ n'est pas métrisable.

Tout point de $\mathcal{B}$ est alors barycentre d'une mesure de Radon positive sur $\mathcal{B}$, pseudo-portée par $\mathcal{E}$ en ce sens qu'elle ne charge aucun compact de Baire (1) disjoint de $\mathcal{E}$; et il existe des cas où l'expression "pseudo-portée" ne peut être remplacée par "portée".

L'utilisation fréquente, en analyse, du théorème de représentation intégrale, en rend souhaitable pour l'enseignement une démonstration simple.

Nous allons ici reprendre la méthode de Bishop et de Leeuw ; nous la simplifierons, notamment en supposant dès le départ que $\mathcal{B}$ est métrisable ; d'autre part, nous n'utiliserons pas comme eux l'inégalité de Schwarz ; pour cela, nous remplacerons leurs fonctions f^2 (où f est linéaire) par des fonctions convexes quelconques, plus maniables.

Dans une seconde et une troisième partie, nous reviendrons sur quelques points de leur travail, pour en préciser la portée ; cet examen nous amènera à poser quelques problèmes.

---

(1) Un compact de Baire de $\mathcal{B}$ est un compact qui a, dans $\mathcal{B}$, une base dénombrable de voisinages, autrement dit qui est un G_δ.

1. Le théorème de représentation intégrale.

Les outils que nous utiliserons sont :

1° Lemme de Zorn.

2° Théorème élémentaire des sections [2] : Soit E topologique séparé et réunion dénombrable de compacts métrisables, et f une application continue de E sur F topologique séparé ; alors il existe une application g de première classe borélienne [3] de F dans E telle que $f \circ g =$ identité.

3° Intégration des mesures : Soient A et B deux espaces compacts, et φ une application continue de A dans l'espace $\mathcal{M}^+(B)$ des mesures de Radon positives sur B. Nous supposerons connues la définition et les propriétés élémentaires de $\int \varphi d\mu$, où μ est une mesure de Radon positive sur A.

NOTATIONS. - $\mathcal{V}$, espace vectoriel topologique (sur R), séparé et localement convexe.

$\mathcal{B}$ une partie convexe compacte de $\mathcal{V}$.

$\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{M}^+$ (resp. $\mathcal{M}_1$) l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\mathcal{B}$ (resp. positives et de norme 1).

$\mathcal{A}$, ensemble des fonctions affines continues sur $\mathcal{V}$ (linéaire + constante).

$\mathcal{C}$, ensemble des fonctions convexes continues positives sur $\mathcal{B}$.

Nous noterons partout $X \setminus Y$ l'ensemble $X \cap \complement Y$.

Relation d'ordre sur $\mathcal{M}^+$. - Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$; on dira que μ_2 majore μ_1, ce qui se notera $\mu_1 \prec \mu_2$ si

1° $\int f\, d\mu_1 = \int f\, d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{A}$ (cette condition équivaut à dire

---

[2] En vue de l'enseignement, en voici une démonstration simple : l'ensemble triadique de Cantor A est homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, donc aussi à $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$; donc A est homéomorphe à $A^{\mathbb{N}}$.

Comme $[0, 1]$ est image continue de A, il en est alors de même de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ comme tout compact métrisable est plongeable dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, un tel espace est donc image continue d'une partie fermée de A.

Il en résulte aussitôt que l'espace E de l'énoncé est image continue d'un fermé de R^+ : $E = \varphi(B)$ avec φ continue, et B fermé $\subset R^+$.

Posons $h = f \circ \varphi$ et, pour tout $x \in F$, posons $k(x) = \inf(h^{-1}(x))$; l'application k de F dans R^+ est semi-continue inférieurement, donc de première classe borélienne. L'application $g = \varphi \circ k$ de F dans E est la section cherchée

[3] c'est-à-dire que $g^{-1}(\omega)$ est une F_σ pour tout ouvert ω de F.

que μ_1 et μ_2 ont même masse totale et même barycentre).

2° $\int f\, d\mu_1 \leqslant \int f\, d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{C}$.

La réflexivité et la transitivité de la relation sont évidentes ; d'autre part si $\mu_1 \prec \mu_2$ et $\mu_2 \prec \mu_1$, on a $\int f\, d\mu_1 = \int f\, d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{C}$, d'où (4) $\mu_1 = \mu_2$. Donc cette relation est bien une relation d'ordre.

LEMME 1. - L'ensemble $\mathcal{M}^+$ ainsi ordonné est inductif.

En effet, soit X une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}^+$; toutes les $\mu \in X$ ont même masse totale, donc X est relativement compact.

Soit μ_0 une valeur d'adhérence de X suivant le filtre des sections finissantes de X. Evidemment $\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_0$ pour toute $f \in \mathfrak{A}$ et toute $\mu \in X$. D'autre part, pour toute $f \in \mathcal{C}$, les $\int f\, d\mu$ convergent en croissant vers $\int f\, d\mu_0$, d'où

$$\int f\, d\mu \leqslant \int f\, d\mu_0 \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{C} \text{ et toute } \mu \in X \quad .$$

Donc μ_0 majore bien X.

La démonstration montre en outre l'unicité de la valeur d'adhérence μ_0.

COROLLAIRE 1. - Toute $\nu \in \mathcal{M}^+$ est majorée par une mesure maximale.

Ce corollaire s'applique en particulier aux mesures ponctuelles ε_x (où $x \in \mathcal{B}$), d'où le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. - Tout point x de $\mathcal{B}$ est barycentre d'une mesure positive maximale de masse totale 1.

LEMME 2. - La relation $\prec$ sur $\mathcal{M}^+$ est compatible avec l'addition.

C'est évident pour l'addition d'un nombre fini de termes. On en déduit plus généralement que :

$$(\nu_a \prec \nu'_a \quad \text{pour tout } a \in K) \Longrightarrow \left(\int \nu(a)\, d\pi_a \prec \nu'(a)\, d\pi_a\right)$$

où $a \to \nu(a)$ et $a \to \nu'(a)$ sont des applications continues (ce qui suffira ici) d'un espace compact K dans $\mathcal{M}^+$, et où π est une mesure positive sur K.

LEMME 3. - Soient μ et $\nu \in \mathcal{M}^+$ avec $\mu \prec \nu$. Si ν est maximale, μ est aussi maximale.

---

(4) $\mathfrak{A}$ sépare les points de $\mathcal{B}$ donc (STONE-WEIERSTRASS) les polynômes par rapport aux éléments de $\mathfrak{A}$ forment un ensemble total dans $C(\mathcal{B})$; or, un tel polynôme est différence de deux polynômes convexes positifs, donc $\mathcal{C}$ est total dans $C(\mathcal{B})$.

Posons $\nu = \mu + \pi$. S'il existait $\mu' \neq \mu$ telle que $\mu \prec \mu'$, on aurait $\nu \neq \mu' + \pi$ et $\nu \prec \mu' + \pi$, donc ν ne serait pas maximale.

LEMME 4. - Pour tout $x \in \mathcal{B}$, et toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ de barycentre x, on a $\varepsilon_x \prec \mu$.

On sait déjà que $\int f \, d\varepsilon_x = \int f \, d\mu$ pour toute $f \in \mathcal{A}$. D'autre part, on a $\int f \, d\varepsilon_x \leqslant \int f \, d\mu$ pour toute f convexe et continue, car cette inégalité s'écrit : $f(x) \leqslant \int f \, d\mu$; elle est évidente si μ est discrète ; le cas général s'en déduit, puisque toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ est limite faible de mesures discrètes de $\mathcal{M}^1$, de même barycentre.

LEMME 5. - Lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ et toute mesure maximale de $\mathcal{M}^+$ est portée par $\mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION.

1° Soit Δ la diagonale de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ et soit φ l'application $(x_1, x_2) \to \frac{x_1 + x_2}{2}$ de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est métrisable, $(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ est un K_σ ; donc $\varphi(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ aussi ; or, ce n'est autre que l'ensemble des points non extrémaux de $\mathcal{B}$. Son complément $\mathcal{E}$ est donc un G_δ.

2° Soit ψ_0 un relèvement de première classe de l'application φ de $(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ sur $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$; son existence résulte du théorème des sections rappelé au début de 1.

L'application $h : (x_1, x_2) \to \frac{1}{2}(\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})$ de $\mathcal{B}^2$ dans $\mathcal{M}^1$ est une homéomorphie. Donc $\psi = h \circ \psi_0$ est une application de première classe de $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ dans $\mathcal{M}^1$ telle que pour tout $x \in (\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ on ait :

$$\psi(x) \neq \varepsilon_x \quad \text{et} \quad x = \text{barycentre de } \psi(x) \quad .$$

3° Soit $\mu \in \mathcal{M}^1$, μ n'étant pas portée par $\mathcal{E}$; on va montrer que μ n'est pas maximale ; il suffira de montrer pour cela qu'il existe une $\nu \leqslant \mu$ qui n'est pas maximale (lemme 3). Comme $\mathcal{E}$ est μ-mesurable, il existe (théorème de Lusin) un compact K de $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ tel que $\mu(K) \neq 0$ et tel que la restriction de ψ à K soit continue. Désignons par ν la partie de μ portée par K.

Pour toute $f \in \mathcal{C}$, et tout $a \in K$ on sait (lemme 4) que

$$\int f \, d\varepsilon_a \leqslant \int f \, d\psi(a) \quad .$$

Soit x_0 un point du support fermé de ν ; comme $\psi(x_0) \neq \varepsilon_{x_0}$, il existe $f_0 \in \mathcal{C}$ pour laquelle

$$\int f_0 \, d\varepsilon_a < \int f_0 \, d\psi(a) \qquad \text{pour} \quad a = x_0 \quad .$$

Comme les deux membres de cette inégalité sont des fonctions continues de a sur K, on a la même inégalité pour tout point a de K assez voisin de x_0.

On a donc :

$$\int \left(\int f_0 \, d\varepsilon_a\right) d\nu_a < \int \left(\int f_0 \, d\psi(a)\right) d\nu_a \quad ,$$

ou encore :

$$\int f_0 \, d\nu < \int f_0 \, d\nu' \qquad \text{où} \quad \nu' = \int \psi(a) \, d\nu_a \quad .$$

On a donc $\nu \neq \nu'$; et comme $\nu \prec \nu'$ (lemme 2), ν n'est pas maximale.

THÉORÈME. - Soit $\mathcal{B}$ convexe compact métrisable $\subset \mathcal{V}$ (espace **vectoriel** topologique localement convexe séparé). L'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{B}$ est un G_δ et tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au moins une mesure de Radon $\geqslant 0$ portée par $\mathcal{E}$.

C'est la conséquence immédiate du corollaire 2 du lemme 1, et du lemme 5.

Résultats auxiliaires.

1° Le lemme montre que toute $\mu \in \mathfrak{M}^1$ est majorée par une mesure maximale ; nous pouvons préciser la nature de cette relation lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable (donc $\mathfrak{M}^1$ aussi) : soient X_1 et X_2 deux espaces identiques à $\mathfrak{M}^1$ et soit Δ la diagonale de $X_1 \times X_2$. Dans $X_1 \times X_2$, l'ensemble A des couples (μ_1 , μ_2) tels que $\mu_1 \prec \mu_2$ est évidemment fermé ; la projection de $(A \setminus \Delta)$ sur X_1 n'est autre que l'ensemble des μ non maximales de $\mathfrak{M}^1$; cet ensemble est donc un K_σ ; autrement dit, l'ensemble des éléments maximaux de $\mathfrak{M}^1$ est un G_δ (même résultat dans $\mathfrak{M}^+$).

Il en résulte que dans $X_1 \times X_2$, l'ensemble B des $(\mu_1 , \mu_2) \in A$ avec μ_2 extrémale est un G_δ ; or, d'après le lemme 1, la projection de B dans X_1 est X_1 ; on peut donc relever cette projection en une application analytique [5] $\mu_1 \to (\mu_1 , \mu_2)$ de X_1 dans $X_1 \times X_2$; en la composant avec la projection sur X_2, on obtient une application analytique (donc universellement mesurable) $\mu \to \varphi(\mu)$ de $\mathfrak{M}^1$ dans lui-même telle que $\mu \prec \varphi(\mu)$, avec $\varphi(\mu)$ maximale.

2° Supposons encore $\mathcal{B}$ métrisable ; soit f une application universellement

---

[5] Une application f de E dans F est dite ici analytique si pour tout ouvert ω de F, $f^{-1}(\omega)$ appartient au corps borélien engendré par les ensembles analytiques de E.

mesurable de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{M}^1$ telle que pour tout $x \in \mathcal{B}$, $f(x)$ ait pour barycentre x ; soit T l'application de $\mathcal{M}^1$ dans lui-même définie par $\mu \to \int f(x)\, d\mu_x$. On dit que T est la diffusion associée à f ; on a évidemment $\mu \prec T\mu$. Si, en outre, $f(x) \neq \varepsilon_x$ pour tout $x \notin \mathcal{E}$, le même raisonnement que celui du lemme 5 montre que

$$(\mu = T\mu) \Longleftrightarrow (\mu \text{ est portée par } \mathcal{E}) \quad .$$

Or, soit $\mu_0 \in \mathcal{M}^+$; la suite $\mu_n = T\mu_0^n$ est croissante pour la relation $\prec$, et converge vers une mesure μ_ω. Des exemples simples montrent que l'on peut avoir $\mu_\omega \neq T\mu_\omega$ (6).

Pour tout ordinal α de deuxième classe, on définit alors μ_α par les relations : $\mu_{\alpha+1} = T\mu_\alpha$ et $\mu_\beta = \lim \mu_{\beta_n}$ si $\beta = \lim.$ croissante des β_n.

Comme $\mathcal{B}$ est métrisable, il existe une partie dénombrable de $\mathcal{C}$ qui est totale dans $C(\mathcal{B})$; il en résulte que toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}^+$ (pour l'ordre $\prec$) est cofinale à une suite finie ou dénombrable. En particulier, il existe un ordinal α de deuxième classe tel que $\mu_\alpha = T\mu_\alpha$, c'est-à-dire tel que μ_α soit portée par $\mathcal{E}$.

PROBLÈMES.

1° Supposons $\mathcal{B}$ métrisable. Est-ce que la relation $\mu_1 \prec \mu_2$ entraîne que μ_1 soit l'image de μ_1 par une diffusion du type défini plus haut ?

2° Supposons encore $\mathcal{B}$ métrisable. Est-ce que toute μ positive portée par $\mathcal{E}$ est maximale ? (se ramener au cas suivant : μ_1 et μ_2 étrangères et portées par $\mathcal{E}$; montrer alors que $(\mu_1 \prec \mu_2) \Rightarrow (\mu_1 = \mu_2)$).

3° Soit $\mathcal{B}$ convexe compact quelconque. La somme de deux mesures maximales est-elle maximale ? Plus généralement, est-ce qu'une intégrale $\int \mu(a)\, d\nu_a$ de mesures maximales est maximale (ν mesure positive sur $\mathcal{M}^+$) ?

Les relations entre ces trois problèmes sont évidentes.

2. Sur l'espace dual d'un espace vectoriel de fonctions continues sur X compact.

Le point de départ de BISHOP et de LEEUW est l'étude du dual d'un espace vectoriel de fonctions continues sur un espace X compact. Nous allons montrer, plus explicitement qu'ils ne le font, l'équivalence entre cette étude et celle des

---

(6) Prendre $\mathcal{B} = [0\ ,\ 2]$ et T tel que : support de $T\varepsilon_x \subset]0\ ,\ 1[$ pour tout $x \in]0\ ,\ 1[$.

ensembles convexes compacts.

Soit X un espace compact ; soit $C_r(X)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles continues sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme ; soit $\mathfrak{M}(X)$ son dual, muni de la topologie faible.

Soit B un sous-espace vectoriel de $C_r(X)$ qui sépare les points de X et contient les constantes ; et soit B^* le dual de B, muni de la topologie faible.

Soit φ l'application canonique de $\mathfrak{M}(X)$ dans B^* ; comme, en vertu du théorème de Hahn-Banach toute forme linéaire continue sur $\mathcal{B}$ est la trace d'une forme linéaire continue sur $C_r(X)$, on a $B^* = \varphi(\mathfrak{M}(X))$.

On peut évidemment identifier B^* à l'espace quotient de $\mathfrak{M}(X)$ par la relation d'équivalence :

$$\mu_1 \sim \mu_2 \quad \text{si} \quad \int g d\mu_1 = \int g d\mu_2 \quad \text{pour toute} \quad g \in B \quad .$$

(Notons que $(\mu_1 \sim \mu_2) \Rightarrow (\mu_1(X) = \mu_2(X))$).

Posons :

$$(B^*)^+ = \varphi(\mathfrak{M}^+(X)) \qquad \text{et} \qquad (B^*)^1 = \varphi(\mathfrak{M}^1(X)) \quad .$$

Comme $\mathfrak{M}^+(X)$ engendre $\mathfrak{M}(X)$, $(B^*)^+$ engendre B^* et $(B^*)^1$ est une base affine compacte du cône convexe $(B^*)^+$.

Soit f l'application $x \to \varepsilon_x$ de X dans $\mathfrak{M}(X)$; l'application $\varphi \circ f$ de X dans $(B^*)^1$ est continue, et biunivoque puisque B sépare les points de X ; comme X est compact, c'est donc une homéomorphie.

Disons, avec BISHOP et de LEEUW, qu'un point x de X est <u>frontière</u> si pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$ telle que $\mu \sim \varepsilon_x$ (ce qui entraîne $\mu \in \mathfrak{M}^1(X)$), on a $\mu = \varepsilon_x$. On désignera par $M(B)$ l'ensemble des points frontière de X et par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $(B^*)^+$.

THÉORÈME. - <u>On a</u> $f(M(B)) = \mathfrak{M}^+ \cap \varphi^{-1}(\mathcal{E})$.

Autrement dit, les mesures positives μ sur X, dont l'image $\varphi(\mu)$ est extrémale dans $(B^*)^1$ sont les mesures ε_x, où x est frontière. En effet :

a. $(\mu \in \mathfrak{M}^+$ et $\varphi(\mu) \in \mathcal{E}) \Rightarrow (\mu = \varepsilon_x$, où x est frontière). D'abord μ est dans $\mathfrak{M}^1(X)$; puis l'image μ' de μ par l'homéomorphie $f \circ \varphi$ de X sur $f \circ \varphi(X)$ est une mesure positive sur $(B^*)^+$ de barycentre $\varphi(\mu)$; or $\varphi(\mu)$ est extrémale, donc μ' a un support ponctuel ; les supports de μ et μ' sont homéomorphes, donc μ est de la forme ε_x. Ce point x est frontière, sinon il existerait une seconde mesure $\nu \geqslant 0$, elle aussi de la forme ε_y, telle que $\varphi(\varepsilon_x) = \varphi(\varepsilon_y)$; on aurait alors $\varphi\frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} \in \mathcal{E}$, ce qui est impossible d'après ce qu'on vient de voir.

b. Inversement, soit x un point frontière ; je dis que $\varphi(\varepsilon_x) \in \mathcal{E}$. Sinon $\varphi(\varepsilon_x)$ serait milieu de deux points distincts de $(B^*)^1$, donc $\varphi(\varepsilon_x) = \varphi(\mu)$ où $\mu \in \mathfrak{M}^1(X)$ et $\mu \neq \varepsilon_x$; or ceci est exclu puisque x est frontière.

Conséquence : L'application $f \circ \varphi$ plonge homéomorphiquement X dans le convexe compact $(B^*)^1$ et transforme $M(B)$ en $\mathcal{E}$.

On se pose alors le problème suivant :

α. Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^1(X)$, existe-t-il une mesure $\nu \in \mathfrak{M}^1(X)$ telle que $\mu \sim \nu$ (ou encore $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$) et telle que ν soit portée par $\overline{M(B)}$, et par $M(B)$ en un sens plus ou moins strict.

Remarquons que la condition $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$ se traduit par : $\varphi(\mu)$ est barycentre de ν', image de ν par l'homéomorphie $f \circ \varphi$. La réponse au problème α sera donc positive si la réponse au problème β suivant est positive :

β. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses points extrémaux. Est-ce que tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'une mesure positive ν de masse totale 1, portée par $\overline{\mathcal{E}}$, et par $\mathcal{E}$ en un sens plus ou moins strict ?

Inversement, une réponse positive au problème β entraîne une réponse positive au problème α. En effet, soit B le sous-espace de $C_r(\mathcal{B})$ constitué par les frontières affines continues ; on a ici $\mathcal{E} = M(B)$, donc le problème β apparaît comme un cas particulier du problème α.

3. Etude d'un exemple.

BISHOP et de LEEUW démontrent que les problèles équivalents α et β ont une réponse positive, même si X n'est pas métrisable, à condition de définir l'expression "mesure portée par $\mathcal{E}$" dans un sens très large, que nous traduirons ici dans le langage des mesures de Radon :

DÉFINITION. - Soit X un espace compact, soit $A \subset X$, et soit μ une mesure de Radon positive sur X. On dit que μ est pseudo-portée par A si $\mu(K) = 0$ pour tout compact K de X tel que :

1° $A \cap K = \emptyset$;

2° K est un G_δ de X [7]

---

[7] Si X est tel que tout compact de X soit un G_δ de X, on peut alors affirmer que $\mu_*(\complement A) = 0$.

Cette condition est plus large encore que la condition $\mu_*(CA) = 0$; elle est même compatible avec la relation $\mu^*(A) = 0$.

On pourrait donc être tenté de croire que le résultat de BISHOP et de LEEUW n'est pas le meilleur possible. Nous allons montrer qu'il n'en est rien, en utilisant l'un des exemples construits par ces auteurs :

Soit $X = [0 , 1] \times \{a , b , c\}$; l'ensemble des (t , a) sera désigné par X_a ; on définit de même X_b et X_c . La topologie de X est définie comme la moins fine des topologies telles que

1° Toute partie de $(X_a \cup X_c)$ est ouverte ;

2° Pour toute partie ouverte ω de $[0 , 1]$, $\omega \times \{a , b , c\}$ est ouvert dans X ;

3° Pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est fermé.

On vérifie que X est compact, et que tout compact de $(X_a \cup X_c)$ est fini.

B est l'ensemble des fonctions numériques continues g sur X telles que, pour tout $t \in [0 , 1]$ on ait :

$$g(t_b) = \frac{1}{2}[g(t_a) + g(t_c)] \quad .$$

On vérifie que $M(B) = X_a \cup X_c$, et que les mesures positives pseudo-portées par $M(B)$ sont les mesures qui ne chargent aucun point de X_b ; une telle mesure peut donc charger X_b ; ce paradoxe apparent résulte de ce que tout compact K de X_b qui est un G_δ , est au plus dénombrable.

Il est immédiat que pour toute $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ il existe une mesure <u>unique</u> $\nu \geqslant 0$ pseudo-portée par $M(B)$ et telle que $\nu \sim \mu$ (il résulte de là que $(B^*)^1$ est un simplexe) ; or, la mesure de Lebesgue, par exemple, est portée par X_b et pseudo-portée par $M(B) = X_a \cup X_c$. On ne peut donc pas améliorer le résultat de BISHOP et de LEEUW malgré la circonstance a priori favorable que $M(B)$ est ici ouvert, donc universellement mesurable.

PROBLÈMES.

4° a. Soit X un espace compact métrisable et $A \subset X$ tel que A soit un G_δ infini de X . Existe-t-il un sous-espace B de $C_r(X)$ tel que $A = M(B)$? (Lorsque A est fini, X doit être de dimension finie ; les conditions de possibilité relèvent alors de la topologie algébrique).

Peut-on en outre choisir B de telle sorte que $(B^*)^1$ soit un simplexe, ce qui revient à dire que B^* , ordonné par $(B^*)^+$, soit réticulé ?

b. Que dire des $M(B)$ lorsque X n'est plus métrisable ?

5° Avec les notations initiales, désignons par B^+ le cône convexe des $g \geqslant 0$ de B. Pour tout élément b de B^* qui est $\geqslant 0$ sur B^+, on a : $b \in (B^*)^+$. Sinon, en effet, il existerait une forme linéaire ℓ faiblement continue dans B^*, telle que $\ell(b) < 0$ et $\ell \geqslant 0$ sur $(B^*)^+$. Or, ℓ est identifiable à un élément de B ; dire qu'il est $\geqslant 0$ sur $(B^*)^+$ signifie encore que $\int \ell d\mu \geqslant 0$ pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur X, d'où $\ell \in B^+$. Il est donc impossible que $\ell(b) < 0$.

Ordonnons B par le cône convexe B^+ ; ce qui précède montre que $(B^*)^+$ n'est autre que l'ensemble des formes linéaires continues et positives sur l'espace normé et ordonné B.

Il en résulte, en répétant une démonstration connue dans le cas où B est de la forme $C_r(K)$, que si B, (ordonné par B^+) est réticulé, B^* (ordonné par $(B^*)^+$) l'est aussi.

La réciproque est inexacte ; en effet, quand B et X sont définis comme dans l'exemple précédent $(X = [0\ ,\ 1] \times \{a\ ,\ b\ ,\ c\})$, B^* est réticulé, tandis que B ne l'est pas.

Peut-on mettre la condition " B^* est réticulé" sous la forme " B' est réticulé", où B' serait un espace vectoriel contenant B et associé à B ? (C'est le cas dans l'exemple précédent).

6° Soit $\mathcal{B}$ un convexe compact non métrisable d'un espace vectoriel topologique localement séparé, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses points extrémaux. L'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ qui sont pseudo-portées par $\mathcal{E}$ est un cône convexe réticulé pour son ordre propre. Donc si tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au plus une $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{B})$ pseudo-portée par $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ est un simplexe.

<u>La réciproque est-elle vraie</u> ?

Dans cet ordre d'idées, on peut montrer que si $\mathcal{B}$ est un simplexe, tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au plus une $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{B})$ qui soit <u>quasi-portée</u> par $\mathcal{E}$ en ce sens que $\mu(K) = 0$ pour <u>tout</u> compact K disjoint de $\mathcal{E}$.

La démonstration est presque la même que celle donnée antérieurement pour les mesures portées par $\mathcal{E}$ (CHOQUET [2]).

Ce résultat s'étend d'ailleurs, avec une formulation adaptée auc cônes convexes quelconques, à tout cône convexe saillant $\mathcal{C}$ tel que :

a. Toute suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ converge vers un élément de $\mathcal{C}$ (l'ordre étant celui associé à $\mathcal{C}$ canoniquement).

b. Pour tout ensemble totalement ordonné $A \subset \mathcal{C}$, il existe un sous-ensemble dénombrable de A, co-initial à A.

c. Pour tout élément extrémal δ de $\mathcal{C}$, et tout sous-cône fermé $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}$ ne contenant pas δ, l'enveloppe convexe fermée de $\mathfrak{A}$ ne contient pas δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (Errett) and LEEUW (Karel de). - The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 9, 1959, p. 305-331.

[2] CHOQUET (Gustave). - Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57, exposé n° 139.