Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Jacques Deny

Éléments extrémaux et balayage, d'après Matsushita

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 2, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-

7 janvier 1959

ÉLÉMENTS EXTRÉMAUX ET BALAYAGE, D'APRÈS MATSUSHITA

par Jacques DENY

Dans une étude récente [3] MATSUSHITA a cherché à édifier la théorie du balayage en potentiel newtonien en se basant sur le théorème de Krein et Milman ; il faut surtout retenir de son étude une interprétation des points de non-effilement d'un ensemble comme éléments extrémaux d'un convexe compact convenable, interprétation qu'on va donner brièvement.

Pour éviter des complications techniques, on considèrera seulement les potentiels newtoniens dans R^m $(m \geqslant 3)$, et le balayage <u>sur un ouvert</u> ω de R^m .

NOTATIONS. - On notera M l'ensemble des mesures de Radon réelles de masse totale finie sur R^m , muni de la topologie du dual faible de C_0 (espace des fonctions continues réelles tendant vers 0 à l'infini).

On notera N_ω l'ensemble des mesures μ de M dont le potentiel U^μ est nul en tout point de ω en lequel il est défini ; c'est une variété linéaire fermée de M , qui n'est autre que la variété orthogonale à P_ω , sous-espace de C_0 engendré par les potentiels newtoniens continus dont les masses associées ont leur support compact dans ω .

Deux mesures de M sont dites <u>équivalentes</u> si leurs potentiels ont mêmes valeurs en tout point de ω en lequel ils sont définis. L'ensemble des classes d'équivalences $\hat{M} = M/N_\omega$ est un espace vectoriel séparé localement convexe (isomorphe au dual faible de P_ω).

L'ensemble $\hat{M}_1^+$, image de l'ensemble M_1^+ des mesures $\geqslant 0$ de masse totale $\leqslant 1$ par l'application canonique $M \to \hat{M}$ est un convexe compact métrisable, contenant la classe $\hat{0}$ de la mesure nulle. On se propose d'étudier les éléments extrémaux de $\hat{M}_1^+$ autres que $\hat{0}$.

LEMME 1. - <u>Si le support de</u> $\mu \in M_1^+$ <u>a plus d'un point,</u> $\hat{\mu}$ <u>n'est pas un élément extrémal de</u> $\hat{M}_1^+$.

On peut en effet supposer μ de masse totale 1 . Soient x_1 et x_2 deux points du support de μ . Soit $a \neq x_i$ $(i = 1 , 2)$ un point de ω situé à des distances inégales de x_1 et x_2 (il en existe si ω n'est pas vide). Soit σ la distribution homogène de la masse $+ 1$ sur une petite boule S intérieure à ω , de centre a , ne contenant ni x_1 ni x_2 . Soient S_1 et S_2 deux boules de centre x_1 et x_2 , de même rayon r assez petit pour qu'elles soient disjointes l'une de l'autre et disjointes de S . Soient μ_1 et μ_2 les restrictions de μ à S_1 et S_2 . Posons

$$\mu_3 = \mu - \mu_1 - \mu_2 \ ; \qquad \alpha_i = \int d\mu_i \qquad (i = 1 , 2) \quad .$$

Par définition, on a : $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1 , 2)$. Posons enfin $\nu_i = \mu_i/\alpha_i$ $(i = 1 , 2)$.

Pour r assez petit, on a $\hat{\nu}_1 \neq \hat{\nu}_2$: en effet U^σ est un élément de P_ω , d'où (propriété de moyenne des fonctions harmoniques)

$$< U^\sigma , \hat{\nu}_i > = \int U^\sigma \, d\nu_i = U^{\nu_i}(a) \qquad (i = 1 , 2)$$

et, lorsque r tend vers 0 , ces deux nombres tendent vers les limites différentes $|x_1 - a|^{2-m}$ et $|x_2 - a|^{2-m}$.

Finalement les relations $\hat{\mu} = \alpha_1 \hat{\nu}_1 + \alpha_2 \hat{\nu}_2 + \hat{\mu}_3$, $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1 , 2)$ et $\hat{\nu}_1 \neq \hat{\nu}_2$ prouvent que $\hat{\mu}$ n'est pas un élément extrémal de $\widehat{M_1^+}$.

LEMME 2. - <u>Les éléments extrémaux de</u> $\widehat{M_1^+}$ <u>différents de</u> $\hat{o}$ <u>sont de la forme</u> $\hat{\varepsilon}_x$, <u>où</u> ε_x <u>désigne la masse</u> $+ 1$ <u>en</u> $x \in \overline{\omega}$; <u>si</u> $x \in \omega$, $\hat{\varepsilon}_x$ <u>est extrémal</u>.

En effet si $\hat{\mu}$ est extrémal, μ est de masse totale 0 ou 1 , donc (lemme 1) $\mu = 0$ ou bien $\mu = \varepsilon_x$ avec $x \in R^m$.

Si $x \notin \overline{\omega}$, $\hat{\varepsilon}_x = \hat{\sigma}$, où σ est la distribution homogène de la masse $+ 1$ sur une boule de centre x disjointe de ω (car $U^{\varepsilon_x} = U^\sigma$ en tout point de ω) donc $\hat{\varepsilon}_x$ n'est pas extrémal, d'après le lemme 1.

Si $x \in \omega$ et si $\hat{\varepsilon}_x = \hat{\mu}$ avec $\mu \in M_1^+$ on a $U^{\varepsilon_x} = U^\mu$ en tout point de ω , d'où nécessairement $\varepsilon_x = \mu$ (propriétés élémentaires des fonctions harmoniques), donc $\hat{\varepsilon}_x$ est extrémal.

DÉFINITION. - On notera $\mathcal{E}(\omega)$ l'ensemble des points $x \in R^m$ tels que $\hat{\varepsilon}_x$ soit élément extrémal de $\widehat{M_1^+}$. Le lemme 2 s'énonce :

$$\omega \subset \mathcal{E}(\omega) \subset \overline{\omega} \quad .$$

Cet ensemble $\mathcal{E}(\omega)$ est un G_δ, car c'est l'image réciproque de l'ensemble des éléments extrémaux non nuls de $\widehat{M_1^+}$ (qui est un G_δ) relative à l'application continue $x \to \hat{\varepsilon}_x$ de R^m dans $\hat{M}$. Mais en général $\mathcal{E}(\omega)$ n'est pas fermé.

THÉORÈME. - Les points de $\mathcal{E}(\omega)$ sont ceux en lesquels ω n'est pas effilé.

Rappelons à cet effet les résultats essentiels de la théorie, développée par BRELOT (voir par exemple [1]), du balayage sur un ouvert ω (extrémisation sur le complémentaire de ω, selon la terminonogie de BRELOT) : parmi les mesures $\geqslant 0$ équivalentes à $\mu \in M^+$ il en existe une et une seule, soit μ', dont le potentiel est minimum ; cette mesure "extrémisée" est portée par l'ensemble des points en lesquels ω n'est pas effilé ; pour que ω ne soit pas effilé en x, il faut et il suffit que $\varepsilon_x' = \varepsilon_x$.

Le théorème est alors une conséquence immédiate du lemme 1 : si ω est effilé en x, le support de $\varepsilon_x' \neq \varepsilon_x$ a plus d'un point, donc $\hat{\varepsilon}_x$ n'est pas extrémal et x n'appartient pas à $\mathcal{E}(\omega)$; si au contraire ω n'est pas effilé en x, toute mesure $\geqslant 0$ équivalente à ε_x est égale à ε_x, donc $\hat{\varepsilon}_x$ est extrémal et $x \in \mathcal{E}(\omega)$.

Méthode de balayage de MATSUSHITA. - Du très élémentaire lemme 2 et du théorème de Krein et Milman, MATSUSHITA déduit simplement l'existence d'au moins une balayée sur ω de toute mesure $\mu \in M_1^+$, c'est-à-dire l'existence d'une mesure $\mu' \in M_1^+$ équivalente à μ et portée par $\overline{\omega}$: en effet d'après KREIN et MILMAN $\hat{\mu}$ est limite d'éléments de la forme $\sum \alpha_i \hat{\varepsilon}_{x_i}$ ($\alpha_i \geqslant 0$, $\sum \alpha_i < 1$, $x_i \in \mathcal{E}(\omega)$), donc μ est équivalente à toute limite vague des mesures $\sum \alpha_i \varepsilon_{x_i}$; une telle limite existe, d'après la compacité, et est portée par l'adhérence de $\mathcal{E}(\omega)$, donc par $\overline{\omega}$, mais elle n'est pas nécessairement portée par $\mathcal{E}(\omega)$, et n'est pas nécessairement unique.

Le théorème de Choquet sur la représentation des compacts convexes métrisables [2] permet d'aller plus loin et d'affirmer l'existence d'une mesure balayée portée par $\mathcal{E}(\omega)$. On prouverait même l'unicité d'une telle mesure si l'on montrait que $\widehat{M_1^+}$ est un simplexe ; malheureusement ce dernier point fait appel à beaucoup plus de technique de théorie du potentiel que le lemme 2, pour lequel on n'a guère utilisé que le théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques (1).

(1) On pourrait utiliser le balayage de Matsushita pour retrouver, grâce à quelques résultats simples comme le théorème sur les suites croissantes de potentiels, le balayage extrémal de Brelot. Une tentative dans ce sens, faite par MATSUSHITA, est d'un intérêt douteux, car elle fait appel (souvent inutilement, parfois incorrectement) à une foule de résultats techniques.

Cas d'un compact. - Soit K un compact de R^m. On notera P_K le sous-espace de C_0 engendré par les potentiels continus dont les masses associées sont portées par K, N_K l'orthogonal de P_K (c'est aussi l'ensemble des mesures de M dont le potentiel est nul quasi-partout sur K) et on posera $\hat{M}_K = M/N_K$.

Alors les points extrémaux de l'image de M_1^+ par l'application canonique $M \to \hat{M}_K$ sont les images de la mesure nulle et des mesures ε_x, où x est un point régulier de K (point en lequel K n'est pas effilé).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (Marcel). - Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités, J. Math. pures et appl., t. 24, 1945, p. 1-32.

[2] CHOQUET (Gustave). - Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956, n° 139, 15 p.

[3] MATSUSHITA (S.). - Théorème de Krein et Milman et le balayage des mesures dans la théorie du potentiel, Proc. Jap. Acad., t. 31, 1955, p. 643-647 ; t. 32, 1956, p. 29-34 et 125-130.