GUSTAVE CHOQUET

Étude des encombrements et capacités associés à un noyau

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. nº 13, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A11_0>

-:-:-:-

Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL

Année 1958/59
-:-:-:-

ÉTUDE DES ENCOMBREMENTS ET CAPACITÉS ASSOCIÉS À UN NOYAU

par Gustave CHOQUET

1. Encombrements.

Pour éviter les complications d'énoncé et les hypothèses artificiellement restrictives, nous supposerons que l'espace E où se fait la théorie est compact ; malgré les apparences, cette restriction n'est pas importante car les véritables difficultés de l'étude des capacités sont locales ; on pourra toujours adapter aisément le schéma qui suit aux cas concrets dans lesquels E est seulement localement compact.

1° On se donne donc un espace compact E (et on désigne par $\mathfrak{M}^+$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur E, muni de la topologie faible) et un noyau N sur E, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans $[0, \infty]$, mesurable pour toute mesure de Radon sur $E \times E$.

Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^+$, le potentiel $N\mu$ est défini par

$$N\mu(x) = \int N(x, y)\, d\mu(y) ,$$

qui a toujours un sens.

2° On se donne en outre un ensemble $\mathcal{E}$ de parties de E, appelées négligeables, tel que

$$(A \subset B \text{ et } B \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (A \in \mathcal{E}) \ ; \quad (A_n \in \mathcal{E} \text{ pour tout entier } n) \Longrightarrow (\bigcup A_n \in \mathcal{E})$$

Par exemple, dans la théorie classique, on prend pour ensembles négligeables les ensembles de capacité extérieure nulle.

Soit alors $\mathfrak{F}$ l'ensemble des applications de E dans $[0, \infty]$ (plus généralement on pourrait considérer les fonctions définies hors d'un ensemble négligeable) ; on dira que $f \prec g$ (où $f, g \in \mathfrak{F}$) si $f(x) \leq g(x)$ sauf sur un ensemble négligeable ; c'est évidemment une relation de pré-ordre (on pourra noter $\sim$ la relation d'équivalence correspondante).

De même on dira, dans $\mathfrak{F}$, que $f_n \to f$ si l'ensemble des x tels que $f_n(x) \not\to f(x)$ est négligeable ; cette notion de limite est compatible avec l'ordre sur $\mathfrak{F}$.

3° On se donne une application c de $\mathfrak{M}^+$ dans $[0, \infty]$ qui soit s. c. i. et telle que $(\|\mu_n\| \to \infty)$ entraîne $(c(\mu_n) \to \infty)$.

Par exemple si Φ désigne une application s. c. i. de $E \times E$ dans $[0, \infty]$, on peut lui associer $c(\mu) = \int \Phi \, d(\mu \otimes \mu)$; ou encore si φ désigne une application s. c. i. de E dans $[0, \infty]$ on peut lui associer $c(\mu) = \int \varphi \, d\mu$.

Dans ces deux exemples la condition $c(\mu_n) \to \infty$ sera vérifiée si par exemple $\varphi > 0$ (resp. $\Phi > 0$).

4° Pour toute $f \in \mathfrak{F}$ on pose :

$$C(f) = \infty \text{ s'il n'existe aucune } \mu \in \mathfrak{M}^+ \text{ telle que } \varphi \prec N\mu$$

et sinon

$$C(f) = \inf c(\mu) \qquad (\text{où } \mu \in \mathfrak{M}^+ \text{ et } \varphi \prec N\mu) \quad .$$

Il est immédiat que C est une fonction croissante (sur l'ordonné $\mathfrak{F}$).

En particulier, pour tout $X \subset E$, si f_X désigne la fonction caractéristique de X, on notera en général $C(f_X)$ par $C(X)$. On dit que C est <u>l'encombrement</u> de φ associé à $(E, N, \mathcal{E}, c)$.

THÉORÈME 1. - <u>Supposons que</u> N <u>et</u> $\mathcal{E}$ <u>soient tels que</u>

$$(\mu_n \to \mu) \Longrightarrow (\lim N\mu_n \prec N\mu) \quad .$$

<u>Alors, pour toute suite croissante</u> f_n <u>d'éléments de</u> $\mathfrak{F}$ <u>on a, en posant</u> $f = \lim f_n$:

$$\lim C(f_n) = C(f) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - S'il existe des n tels que $C(f_n) = \infty$, l'égalité est évidente.

Sinon, il existe pour tout n une mesure μ_n telle que

$$f_n \prec N\mu_n \qquad \text{et} \qquad |C(f_n) - c(\mu_n)| < 1/2^n \quad .$$

Si l'ensemble des $\|\mu_n\|$ n'est pas borné, les $c(\mu_n)$ ne le sont pas non plus (d'après (3)), donc $C(f_n) \to \infty$ et l'égalité cherchée est évidente. Sinon on peut se ramener, par extraction, au cas où les μ_n convergent vers une mesure μ ; les relations

$$f_n \prec N\mu_n \ ; \quad \lim \ N\mu_n \prec N\mu$$

montrent que $f = \lim f_n \prec N\mu$.

Or la semi-continuité de C entraîne

$$c(\mu) \leqslant \lim \inf c(\mu_n) = \lim C(f_n) \quad .$$

On a donc

$$C(f) \leqslant c(\mu) \leqslant \lim C(f_n) \quad .$$

Mais comme d'autre part C est croissante, on a aussi

$$\lim C(f_n) \leqslant C(f) \quad ,$$

d'où l'égalité cherchée.

COROLLAIRE. - Pour toute suite croissante (X_n) de parties de E , on a

$$\lim C(X_n) = C(\cup X_n) \quad .$$

<u>Étude de la capacitabilité associée à</u> C .

Nous nous bornerons ici à l'étude de C sur l'ensemble des parties X de E . Nous avons, dans un travail antérieur, [4], énoncé un théorème général d'où résulte ceci :

Si la condition du théorème 1 est satisfaite, et si pour toute suite décroissante (K_n) de compacts de E on a

$$\lim C(K_n) = C(\cap K_n) \quad ,$$

tout ensemble K-borélien ou K-analytique X de E est C-capacitable en ce sens que

$$C(X) = \sup C(K) \quad (\text{pour les compacts } K \subset X) \quad .$$

Nous allons indiquer ici des conditions suffisantes pour que ceci ait lieu :

THÉORÈME 2. - <u>On suppose</u> $(E , N , \mathcal{E} , c)$ <u>tels que</u>

a) N <u>est</u> s. c. i.

b) <u>Pour tout compact</u> $X \in \mathcal{E}$, <u>il existe une</u> $\mu \in \mathfrak{M}^+$ <u>telle que</u>

$$c(\mu) \neq \infty \quad \text{et} \quad N\mu = \infty \ \underline{\text{sur}} \ X .$$

c) <u>Pour tout couple</u> $\mu , \nu \in \mathfrak{M}^+$ <u>tel que</u> $c(\nu) \neq \infty$,

$c(\mu + t\nu) \to c(\mu)$ <u>lorsque le nombre positif</u> $t \to 0$.

<u>Alors pour tout compact</u> $X \subset E$, <u>on a</u>

(1) $$C(X) = \inf C(\omega) \quad \underline{(\text{pour les ouverts}} \ \omega \supset X) .$$

Si $C(X) = \infty$, l'égalité (1) est évidente.

Si $C(X) \neq \infty$, soient h , k deux constantes quelconques telles que $C(X) < h < k$.

Il existe une $\nu \in \mathfrak{M}^+$ telle que

$c(\nu) < h$ et $f_X < N\nu$ (f_X fonction caractéristique de X)

L'ensemble A des points x de X en lesquels $N\nu(x) < 1$ est un K_σ puisque $N\nu$ est s. c. i. ; posons $A = \bigcup K_n$.

Montrons qu'il existe une suite (μ_n) telle que, pour tout n , :

$$N\mu_n = \infty \ \text{sur} \ K_n \ ; \ \|\mu_n\| < 1/2^n \ ; \ c(\nu + \sum_1^n \mu_i) < h .$$

Supposons définies $\mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_p$ vérifiant les n premières conditions ; il existe d'après la condition (b) du théorème une mesure π_p telle que $c(\pi_p) \neq \infty$ et $N\pi_p = \infty$ sur K_{p+1} ; et d'après (c) il existe un t tel que

$$t\|\pi_p\| \leq 1/2^{p+1} \quad \text{et} \quad c(\nu + \sum_1^p \mu_i + t\pi_p) < h .$$

On pose alors $\mu_{p+1} = t\pi_p$; la suite (μ_n) est la suite cherchée.

Posons $\mu = \nu + \sum_1^\infty \mu_i$; on a évidemment

$$f_X \leq N\mu \ \text{partout} , \quad \text{et} \quad c(\mu) \leq h .$$

Il existe d'après (b) un nombre $\varepsilon > 0$ tel que

$$c(\mu') < k \quad \text{où} \quad \mu' = (1 + \varepsilon)\mu .$$

Or $(1+\varepsilon)\, f_X \leq N\mu'$, donc si ω désigne l'ouvert des points x tels que $N\mu'(x) < 1+\varepsilon$, on a $X \subset \omega$ et $f_\omega \leq N\mu'$ partout.

Comme $C(\omega) < k$, on a bien démontré que pour tout k tel que $C(X) < k$, il existe un ouvert ω contenant X tel que $C(\omega) < k$ (continuité à droite).

REMARQUE. - Il est évident que si dans l'énoncé du théorème 2 on renforce la condition (b) en l'étendant à tout ensemble X , la conclusion du théorème s'étend aussi à tout ensemble X ; si en outre E est tel que tout ouvert de E soit un K_σ , C coïncide alors avec la capacité extérieure définie à partir de la restriction de C aux compacts (au moyen de la C-capacité des ouverts).

COROLLAIRE. - Lorsque les conditions des théorèmes 1 et 2 sont toutes satisfaites, tout ensemble K-analytique de E est C-capacitable.

EXEMPLES. - Lorsque N est s. c. i. et lorsque c est définie par $c(\mu) = \mu(E)$ (resp. $\int N\mu \, d\mu$) , on prendra comme ensembles négligeables les ensembles sur lesquels est infini au moins un potentiel $N\mu$ (resp. $N\mu$ avec μ d'énergie finie). Les conditions du théorème 2 sont alors satisfaites (dans le second cas, il faudra supposer en outre que N est de type positif ou satisfait au principe du maximum k-dilaté).

Pour l'étude des cas où la condition du théorème 1 est satisfaite, nous renvoyons aux travaux suivants [2] et [3].

Soulignons que l'intérêt de la notion d'encombrement C qu'on vient d'étudier vient de ce que :

1° Le théorème de capacitabilité est facile à démontrer pour C .

2° Lorsque N satisfait à des conditions particulières (équilibre, énergie, etc.) et que C est adapté à ces conditions, il existe une seconde fonction c' sur $\mathfrak{M}^+$ telle que l'on ait aussi pour tout compact K .

$$C(K) = \sup c'(\mu) \qquad (\text{où } N\mu \leq 1 \text{ sur } K \text{ ou sur } E) \quad .$$

La notion d'encombrement est utilisée pour la première fois, dans un cas particulier, par N. ARONSZAJN et K. T. SMITH [1] pour démontrer le théorème de capacitabilité relatif aux noyaux en $1/r^\alpha$ (qui conduisent à des capacités énergétiques qui ne sont pas nécessairement alternées d'ordre ∞) . Nous l'avons dégagée et étudiée sous sa forme plus générale dans une conférence du Séminaire du potentiel de 1958/59, que résume ce travail.

Depuis, M. KISHI a publié des résultats voisins ([5] et [6]).

2. Capacitabilité.

Dans la théorie du potentiel, la capacité a surtout pour but de préciser quels sont les ensembles négligeables ; pratiquement on n'utilise que les ensembles de capacité extérieure nulle et l'utilisation de la "régularité" des noyaux permet de montrer directement dans les théorèmes de convergence que les ensembles exceptionnels sont effectivement de capacité extérieure nulle, sans avoir à passer d'abord par la capacité intérieure et à utiliser ensuite un théorème de capacitabilité. Il suffit au plus, actuellement, de savoir que tout ensemble K-analytique de capacité intérieure nulle est aussi de capacité extérieure nulle, ce qui peut se démontrer pour les capacités associées à une très vaste classe de noyaux.

Toutefois la question de déterminer, pour une capacité donnée, une catégorie assez vaste d'ensembles capacitables, reste un problème d'analyse fort intéressant, dont la solution peut amener, soit à simplifier des démonstrations antérieures, soit à créer de nouveaux outils intéressants en eux-mêmes.

C'est dans cet esprit que nous essaierons de déterminer une classe aussi vaste que possible de noyaux pour lesquels les ensembles boréliens les plus simples, F_σ, G_δ ou $K_{\sigma\delta}$ soient capacitables ; certains des lemmes utilisés permettraient sans doute d'obtenir des résultats meilleurs que les nôtres.

CONVENTIONS. - L'espace E est localement compact ; le noyau N sur $E \times E$ est ≥ 0 et universellement mesurable. La N-capacité d'un compact $K \subset E$ est le sup des masses totales des mesures ≥ 0 sur K, de potentiel partout ≤ 1 ; on lui associe, pour tout ensemble, les N-capacités intérieure et extérieure.

LEMME 1 (classique). - _Soit_ (A_n) _une suite quelconque de parties de_ E _et désignons par_ f _la capacité associée au noyau_ N.

1° $f_*(\cup A_n) \leq \Sigma f_*(A_n)$

2° _Si_ (A_n) _est croissante_, $f_*(\cup A_n) = \lim f_*(A_n)$.

COROLLAIRE.

1° _Toute réunion dénombrable d'ensembles_ A_n _de capacité intérieure nulle l'est aussi_.

2° _Si_ (A_n) _est croissante et si_ $\cup A_n$ _est capacitable_,

$$f(A) = \lim f_*(A_n) = \lim f^*(A_n) \quad .$$

Démontrons par exemple le 1°.

Il existe une μ sur $\bigcup A_n$ telle que $N\mu \leq 1$ et $\mu(E)$ voisin de $f_*(\bigcup A_n)$.
Or $\mu \leq \Sigma\, \mu_{A_n}$, où μ_{A_n} désigne la restriction de μ à A_n.

Le résultat en résulte aussitôt.

DÉFINITION. - Soit $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble ordonné des compacts de l'espace E localement compact, et soit g une fonction numérique ≥ 0, croissante et continue à droite sur $\mathcal{K}(E)$; on désignera par g_* et g^* les capacités, intérieure et extérieure associées à g pour tout ensemble de E. On dira que g possède (respectivement) les propriétés α et β si :

α) Pour toute suite croissante X_n de parties de E, on a

$$g^*(\bigcup X_n) = \lim g^*(X_n) \quad .$$

β) Pour tout $A \subset E$ et tout compact $K \subset E$,

$$g_*(A) = \inf g_*(A \cup \omega) \qquad (\text{pour les ouverts } \omega \supset K) \quad .$$

LEMME 2. - <u>Si</u>, g <u>a la propriété</u> (β), <u>tout</u> K_σ <u>de</u> E <u>est</u> g-<u>capacitable</u>.

En effet soit $A = \bigcup K_n$ où les K_n sont compacts ; on définit par récurrence une suite d'ouverts ω_n tels que, pour tout n :

$$K_n \subset \omega_n \qquad \text{et} \quad g_*(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_n \cup A) < g_*(A) + \varepsilon \quad .$$

L'ensemble $\Omega = \bigcup \omega_n$ contient A et est limite croissante de $(\bigcup_1^n \omega_i)$, donc $g(\Omega) < g_*(A) + \varepsilon$; d'où l'énoncé.

LEMME 3. - <u>Si</u> N <u>est</u> s. c. i. <u>sur</u> E <u>compact et continu hors de la diagonale</u> Δ <u>de</u> $E \times E$, <u>la</u> N-<u>capacité possède la propriété</u> (β).

Soit donc $A \subset E$ et $K \subset A$; l'inégalité à obtenir est évidente si $f_*(A) = \infty$; on supposera donc $f_*(A) = h < \infty$.

Posons

$$\inf f_*(A \cup \omega) = k \qquad (\text{pour les } \omega \supset K) \quad .$$

On veut montrer qu'on ne peut avoir $h < k$ (on supposera k fini, sinon la suite se simplifie encore). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant K et deux familles de mesures positives portées par A, (μ_i) et (ν_i) (où $i \in I$ muni d'un filtre $\mathfrak{F}$) telles que $S\nu_i$ ne rencontre pas U et que $\lim_{\mathfrak{F}} S\mu_i = K$, avec $\|\mu_i + \nu_i\| = k$ à ε près et $N(\mu_i + \nu_i) \leqslant 1$ partout.

Il existe alors des valeurs d'adhérence (μ, ν) des couples (μ_i, ν_i) telles que $S\mu \subset K$; plus précisement, on supposera que (μ_i, ν_i) converge vers (μ, ν) suivant $\mathfrak{F}$.

Or comme N est s. c. i., on a

$$N(\mu + \nu) \leqslant 1 \quad .$$

Soit alors V un voisinage compact de K contenu dans U. Comme N est continu hors de Δ, $N\nu_i$ converge uniformément vers $N\nu$ sur V lorsque $\nu_i \to \nu$; donc $N(\mu + \nu_i)$ dépasse arbitrairement peu 1 sur V.

De même $N\mu_i$ converge uniformément vers $N\mu$ sur $\complement V$ lorsque $\mu_i \to \mu$; donc $N(\mu + \nu_i)$ dépasse arbitrairement peu 1 sur $\complement V$.

Donc il existe des i, tels que $N(\mu + \nu_i)$ dépasse arbitrairement peu 1 sur E tout entier ; donc, la N-capacité intérieure de A est au moins égale à $\|\mu + \nu_i\|$, à ε près, donc au moins égale à k à ε près, ce qui rend impossible $h < k$.

REMARQUE. - Lorsque E est localement compact, on a les mêmes conclusions à condition de supposer que $N \to 0$ à l' ∞, en un sens facile à préciser.

COROLLAIRE (des lemmes 2 et 3). - Si N est s. c. i. sur E (compact ou bien tel que $N \to 0$ à l' ∞) et continu hors de la diagonale, tout K_σ de E est capacitable pour la N-capacité.

La propriété (β) vient de s'avérer très utile ; on pourrait essayer d'établir des énoncés analogues avec l'espoir de démontrer ainsi la propriété (α).

Nous énoncerons deux propriétés équivalentes à (α).

LEMME 4. - Soit g une fonction de compact sur E localement compact, croissante $\geqslant 0$, et continue à droite. Chacun des énoncés suivants équivaut à la propriété (α) :

α') Pour toute suite X_n croissante d'ensembles G_δ , on a

$$g^*(\bigcup X_n) = \lim g^*(X_n) \quad .$$

α'') Pour toute suite X_n croissante, tout Y , et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\omega \supset Y$ tel que

$$\lim g^*(\omega \cup X_n) \leq \lim g^*(Y \cup X_n) + \varepsilon \quad .$$

Ces équivalences sont faciles à démontrer.

COROLLAIRE. - Soit un noyau N s. c. i. sur E localement compact dont tout ouvert soit un K_σ ; et désignons par f la N-capacité.

Si tout G_δ et tout $G_{\delta\sigma}$ de E est f-capacitable, f possède la propriété (α) donc tout K-analytique est f-capacitable.

C'est une conséquence du corollaire du lemme 1 et du lemme 4 (équivalence des énoncés (α) , (α')).

Capacitabilité individuelle.

Rappelons que si g est, à nouveau, une fonction de compact croissante ≥ 0 et continue à droite, on appelle suite privilégiée toute suite croissante (K_n) de compacts telle que, pour tout $X \subset E$ on ait :

$$g^*(\bigcup (X \cap K_n)) = \lim g^*(X \cap K_n) \quad .$$

On appelle K'_σ tout ensemble qui est réunion d'une telle suite et $K'_{\sigma\delta}$ tout ensemble qui est intersection d'une suite dénombrable de tels K'_σ . On démontre alors (*) , sans autre hypothèse sur g , que tout $K'_{\sigma\delta}$ est g-capacitable.

Ce résultat amène à la recherche des suites privilégiées.

Il est probable que toute suite croissante de compacts de E compact est privilégiée pour la capacité associée à un noyau ≥ 0 , s. c. i. , et continu hors de la diagonale ; ceci entraîne que pour un tel noyau tout $K_{\sigma\delta}$ est capacitable.

Nous indiquerons ici le schéma de démonstration d'un résultat moins fort :

LEMME 5. - Pour la capacité f associée à un noyau $N \geq 0$ sur E compact,

(*) Voir [4].

s. c. i. et continu hors de la diagonale, toute suite régulièrement croissante de compacts est privilégiée.

Rappelons que la suite (K_n) de compacts est régulièrement croissante si elle est croissante et si tout K_n possède un voisinage V_n tel que $V_n \cap K_p$ soit constant à partir d'un certain p.

COROLLAIRE (immédiat à partir du théorème rappelé ci-dessus). - Si de plus tout ouvert de E est un K_σ, tout G_δ de E est f-capacitable.

En effet, tout ouvert de E est alors un K'_σ.

Pour démontrer le lemme 5, on utilisera le résultat suivant (énoncé avec les mêmes notations) :

Soient F et G deux compacts disjoints de E. Alors pour toute partie $A \subset F$, toute suite (B_n) où $B_n \subset G$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\omega \supset A$ tel que pour tout n :

$$f^*(B_n \cup \omega) \leq f^*(B_n \cup A) + \varepsilon \quad .$$

Il est probable que le même énoncé est valable si on remplace la suite B_n par l'ensemble des parties B de G.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K. T.). - Functional spaces and functional completion, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, p. 126-185.

[2] CHOQUET (Gustave). - Diamètre transfini, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 3, 1958/59, n° 4, 7 p.

[3] CHOQUET (Gustave). - Théorèmes de convergence, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 3, 1958/59, n° 12, 9 p.

[4] CHOQUET (Gustave). - Forme abstraite du théorème de capacitabilité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 83-89.

[5] KISHI (Masanori). - On the capacitability of analytic sets, Proc. Japan Acad., t. 35, 1959, p. 158-160.

[6] KISHI (Masanori). - Capacitability of analytic sets, Nagoya math. J., t. 16, 1960, p. 91-109.

(Manuscrit reçu en octobre 1960)