Marcel Brelot

Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 1 (1957), exp. n^{o} 6, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1957__1__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1957
-:-:-:-

9 avril 1957

UNE AXIOMATIQUE GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS

par Marcel BRELOT

1. Introduction.

Les travaux classiques sur le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace et les équations de type elliptique ont été, surtout dans le cas harmonique, beaucoup approfondies avec des frontières idéales variées. A côté des axiomatiques relatives à ce cas [2] , des essais beaucoup plus généraux ont été développés par TAUTZ [6] , et récemment par DOOB [4] en liaison avec une extension des lignes de mouvement brownien. Nous proposons ici une axiomatique assez différente et plus simple, qui conserve les traits essentiels de la théorie des enveloppes introduite par PERRON-WIENER et diversement adaptée par la suite en particulier dans les travaux précités.

2. Hypothèses sur l'espace.

On raisonnera sur l'espace topologique Ω localement compact, non compact, connexe et localement connexe.

Il sera commode d'adjoindre un point d'Alexandroff $\mathcal{A}$ donnant un espace compact $\bar{\Omega}$ dont on prendra la topologie. L'adhérence et la frontière d'un ensemble e seront notées $\bar{e}$, e^* .

Système de fonctions principales. - Il est défini par la donnée dans chaque ouvert partiel d'un espace vectoriel de fonctions réelles finies continues, appelées principales, satisfaisant aux conditions suivantes :

Axiome I (axiome de caractère local)

a_1. Si u est principale dans ω ouvert, elle l'est dans $\omega_1 \subset \omega$

b_1. Si u est principale dans ω_i , elle l'est dans $\bigcup \omega_i$.

Axiome II (axiome de fermeture)

Dans ω connexe, un ordonné filtrant croissant de fonctions principales tend vers $+\infty$ ou vers une fonction principale.

Conséquence. - Pour toute fonction principale u dans un ouvert partiel ω_0

a_2. Il y a impossibilité d'un minimum nul sans constance au voisinage.

b_2. Si $u \geqslant 0$ dans un domaine partiel ω quelconque, $u = 0$ ou $u > 0$ dans tout ω.

Ces deux propositions sont d'ailleurs équivalentes dans ω_0 pour les fonctions réelles semi-continues inférieurement. Or si u dans ω connexe est principale $\geqslant 0$, et nulle en un point, nu tend vers une fonction principale donc $u = 0$ dans ω.

Axiome III (axiome d'unicité)

a_3. Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, si u principale dans ω s'annule à la frontière, $u = 0$.

b_3. (forme équivalente) Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, si u principale dans ω admet en tout point frontière une $\liminf \geqslant 0$, alors $u \geqslant 0$.

Il est équivalent de supposer ω connexe.

Il est évident que (b_3) entraîne (a_3). Supposons (a_3) et l'hypothèse de (b_3). L'ensemble où $u < 0$ s'il est non vide est un ouvert $\omega_0 \subset \bar{\omega}_0 \subset \Omega$. En un point frontière situé dans ω, $u = 0$ à cause de la continuité. En un point frontière situé sur ω^*, $\liminf u \leq 0$, et à cause de l'hypothèse de (b_3), $\liminf u = 0$. Donc $u \to 0$ à la frontière de ω. On conclut $u = 0$ ce qui est contradictoire et exige donc $u \geqslant 0$ dans ω.

Axiome IV (axiome de régularité)

On dira que ω ouvert est régulier si $\bar{\omega} \subset \Omega$ et si toute fonction finie continue θ sur ω^* se prolonge continûment dans ω par une fonction principale dans ω (nécessairement unique) notée $H_\theta^\omega(x)$. C'est pour x fixé une fonctionnelle croissante qui s'écrit sous forme intrégrale $\int \theta \, d\rho^x$ (ρ^x mesure > 0 de Radon sur ω^*).

Noter que toute composante connexe δ de ω régulier est un domaine régulier et que $H_\theta^\omega = H_\theta^\delta$ dans δ.

L'axiome IV s'énonce alors :

Les ouverts réguliers contenant un point forment une base de voisinages de ce point (donc aussi les domaines réguliers contenant le point).

3. Quelques critères suffisants généraux.

a. Remarque : Désignons par

a_2'. : impossibilité pour une fonction d'un minimum < 0 sans constance au voisinage.

Alors une fonction, semi-continue inférieurement dans un ouvert ω d'un espace connexe compact $\mathcal{E} \neq \omega$, satisfaisant à (a_2'), et admettant à la frontière de ω dans $\mathcal{E}$ une $\liminf \geq 0$ en tout point, est ≥ 0.

Donc, indépendamment de tous les axiomes, la condition (a_2') entraîne (b_3) et III. Par suite, si on ne suppose des axiomes que les axiomes I et II, mais que les constantes soient parmi les fonctions considérées dans Ω, alors III est satisfait.

De même si, au lieu d'une constante, il existe une fonction $h > 0$ parmi les fonctions considérées dans Ω. Car les quotients par h satisfont à I, II donc à III et par suite les fonctions elles-mêmes.

b. Les axiomes sont satisfaits si au lieu de II et III on suppose les propriétés suivantes de caractère local :

α. (a_2) et (a_2'), d'où (b_2) et III.

β. Pour toutes les u principales > 0 dans ω connexe, $\frac{u(x)}{u(x_0)}$ admet pour chaque x des bornes supérieure et inférieure qui tendent vers 1 quand $x \to x_0$ (axiome fort de Harnack).

Il s'ensuit :

α_1. Toute fonction principale ≥ 0 dans ω connexe, majorée par 1 en un point est majorée sur tout compact indépendamment de la fonction (axiome faible de Harnack).

β_1. Les fonctions principales qui au voisinage d'un point sont bornées en module par un nombre fixe sont également continues en ce point. Alors α_1 entraîne que la limite d'un ordonné filtrant croissant dans un ouvert ω connexe est partout ∞ ou localement bornée.

β_1 implique que si la limite est finie, il y a convergence uniforme locale vers une fonction continue et l'axiome IV montre que la limite est localement principale.

c. Au lieu de II on peut supposer des propriétés supplémentaires pour les domaines réguliers ou même seulement pour un domaine régulier dans tout voisinage de tout point, telles que la suivante qui entraîne II :

γ. Pour un tel domaine la sommabilité, $d\rho^x$ est indépendante de x et, pour f sommable, $d\rho^x$ sur ω^*, $\int f \, d\rho^x$ est continue. Plus particulièrement :

γ'. Pour un tel domaine, $d\rho^x = K(x, y)\, d\nu(y)$ où ν est une mesure > 0

de Radon sur ω^* et $K(x, y) > 0$ finie continue de chaque variable $x \in \omega$, $y \in \omega^*$, bornée pour y quelconque et x sur un compact de ω.

4. Exemples.

1° Les fonctions harmoniques dans chaque ouvert d'un domaine euclidien forment un système de fonctions principales.

Le caractère local est évident d'après les critères locaux comme celui du laplacien ; α qui résulte du critère de moyenne entraîne III ; II (qui résulterait de β ou γ' d'après l'intégrale de Poisson) peut se voir directement comme suit : pour l'ordonné filtrant croissant la limite en un point vaut la moyenne spatiale de la limite sur toute boule centrée en ce point ; donc elle est ∞ aux points dont tout voisinage donne pour la limite une intégrale infinie. Ces points forment donc un ouvert comme ceux du complémentaire. La limite est donc partout infinie ou localement sommable et alors harmonique d'après le critère de la moyenne spatiale. Enfin l'intégrale de Poisson qu'on a pu éviter jusqu'ici fournira IV.

On peut faire l'extension à un "espace $\mathcal{E}$" et aux fonctions harmoniques sur les ouverts de $\mathcal{E}$ [3].

2° On considère dans un domaine euclidien Ω les fonctions douées de dérivées secondes continues et intégrales dans chaque ouvert partiel d'une équation (de type elliptique)

$$\sum_{i,K} a_{ix} \frac{\partial^2 u}{\partial u_i \, \partial u_x} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial u_i} + cu = 0$$

où $\sum a_{ix} \lambda_i \lambda_K$ est une forme quadratique définie, à discriminant >0 en tout point. Les coefficients et les dérivées premières des a_{iK} sont continues et localement lipschitzien. Enfin $c \leq 0$.

Ces fonctions définissent un système de fonctions principales dans Ω. Le caractère local est évident ; (a_2') est assez élémentaire grâce à $c \leq 0$ et entraîne donc III ; γ' résulte de l'expression de la solution du problème de Dirichlet pour les domaines assez réguliers [5], ce qui entraîne IV et II.

On peut d'ailleurs remplacer le premier terme de l'équation par un opérateur plus général, supposer les b_i, c seulement continus et les intégrales seulement pourvues de gradient continu.

Il y a d'autre part extension à un opérateur généralisant le premier membre sur une variété riemannienne (Voir [5]).

5. Le problème de Dirichlet pour un ouvert régulier ω .

On a noté $H^{\omega}_{\theta}(x) = \int \theta \, d\rho^{x}$ la fonction principale dans ω prenant les valeurs sur ω^{*} de θ finie continue.

Si Ψ est sur ω^{*} semi-continue inférieurement $> -\infty$, on notera

$$H^{\omega}_{\Psi}(x) = \sup_{\theta \leq \Psi} H^{\omega}_{\theta} = \int \Psi \, d\rho^{x}$$

qui dans chaque domaine composant vaut $+\infty$ ou est principale (d'après II).

Pour f réelle quelconque sur ω^{*} , on notera

$$\overline{H}^{\omega}_{f}(x) = \inf_{\Psi \geqslant f} H^{\omega}_{\Psi} = \overline{\int} f \, d\rho^{x}$$

qui vaut dans chaque domaine composant $+\infty$, $-\infty$ ou est principale.

Introduction analogue de $\underline{H}^{\omega}_{f} = \underline{\int} f \, d\rho^{x} = -\overline{H}^{\omega}_{-f} \leq \overline{H}^{\omega}_{f}$.

Solution généralisée. - Lorsque $\underline{H}_{f}$ et $\overline{H}_{f}$ sont égaux en un point, ils le sont dans le domaine composant contenant ce point (grâce à b_2).

En cas d'égalité et valeur finie partout, on note $H_{f}(x)$ la fonction principale $\int f \, d\rho^{x}$, appelée solution généralisée.

Allure à la frontière. - Si f quelconque est bornée supérieurement

$$\limsup_{x \in \omega, x \to x_0 \in \omega^{*}} \overline{H}_{f} \leq \limsup f \text{ en } x_0 .$$

Donc si f est bornée, et continue en x_0 , $\overline{H}_{f}$ et $\underline{H}_{f}$ tendent vers $f(x_0)$ en x_0 .

Propriétés de la mesure harmonique $d\rho^{x}$.

a. $d\rho^{x}$ ne charge que la frontière de la composante connexe de x dans ω .

b. Si ω est connexe, $d\rho^{x}$ charge tout voisinage de tout point-frontière. Sinon pour $\theta \geqslant 0$ finie continue non nulle en $x_0 \in \omega^{*}$, H_{θ} pourrait être nulle en x, donc d'après (b_2) nulle partout, et ne pourrait alors tendre vers $\theta(x_0)$ en x_0 .

c. Les mesures extérieure et intérieure de e sont $\overline{\int} f_e \, d\rho^{x}$, $\underline{\int} f_e \, d\rho^{x}$ (f_e fonction caractéristique de e). Si u est connexe, la mesurabilité, la sommabilité, les ensembles de mesure nulle sont indépendants de x ; la sommabilité équivaut à l'existence de la solution généralisée H_f .

6. <u>Fonctions hypo et hyperprincipales</u> $\underline{p}$ <u>et</u> $\overline{p}$.

On dira que v réelle dans un ouvert $\omega \subset \Omega$ y est hyperprincipale (notée $\overline{p}$) si

1° $v > -\infty$.

2° v est semi-continue inférieurement.

3° Pour tout ouvert régulier $\omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega$, $v \geqslant \overline{H}_v^{\omega_1}$ dans ω_1 (c'est-à-dire que $v \geqslant H_\theta^{\omega_1}$ pour tout θ finie continue $\leqslant v$ sur ω_1^*). Une fonction principale est donc hyperprincipale ; de même $+\infty$.

Notion analogue de fonction hypoprincipale $\underline{p}$.

<u>Propriétés.</u>

1° Si v et w sont $\overline{p}$, de même $\begin{cases} \lambda v + \mu w & (\lambda, \mu \geqslant 0) \\ \inf(v\ ,\ w) \end{cases}$.

2° La limite d'un ordonné filtrant croissant de fonctions $\overline{p}$ est $\overline{p}$.

3° Soit $\omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega$, ω_1 régulier. Si v est $\overline{p}$ dans ω , lorsqu'on la remplace dans ω_1 par $\overline{H}_v^{\omega_1}$, on obtient une fonction $\overline{p}$ dans ω .

Etudions la fonction obtenue v' et montrons que dans ω_2 régulier $\subset \overline{\omega}_2 \subset \omega$, on a $v' \geqslant \overline{H}_{v'}^{\omega_2}$.

C'est évident dans $\omega_2 \cap \complement \omega_1$. Quant à $\omega_2 \cap \omega_1$, introduisons θ finie continue sur ω_2^* et $\leqslant v'$; il suffit de voir que $H_\theta^{\omega_2} \leqslant \overline{H}_{v'}^{\omega_2}$. C'est évident dans tout composant de $\omega_1 \cap \omega_2$ où $\overline{H}_{v'}^{\omega_2}$ est $+\infty$; dans un domaine composant δ où il est principal, on considère $\overline{H}_{v'}^{\omega_1} - H_\theta^{\omega_2}$ et on conclut d'après l'allure à la frontière de δ , et III.

4° Dans un domaine ω , une fonction hyperprincipale v si elle est $+\infty$ au voisinage d'un point, vaut $+\infty$ partout.

Sinon on trouverait un domaine partiel ω_1 où v vaut $+\infty$, avec un point-frontière x_0 dans ω , n'admettant aucun voisinage où la fonction vaut la constante $+\infty$. Un voisinage connexe régulier convenable de x_0 couperait ω_1 et aurait un point-frontière dans ω_1 . La propriété (b) de la mesure $d\rho^x$ montrerait que $H_v^{\omega_1} = +\infty$ donc $v = +\infty$ au voisinage de x_0 .

5° Si une fonction hyperprincipale v admet un minimum relatif nul en x_0 , elle est constante au voisinage.

Dans un voisinage ouvert connexe ω de x_0, $v \geqslant 0$. L'ensemble ω_1 de ω où $v > 0$ est ouvert. S'il n'était vide, la fonction $\lim\limits_{n \to \infty} (nv)$, valant $+\infty$ sur ω_1 et hyperprincipale serait $+\infty$ dans ω alors qu'elle est nulle en x.

6° Si dans un ouvert partiel ω les constantes sont principales,

6_1. Il y a pour tout $\overline{p}$ dans ω, impossibilité d'un minimum sans constance au voisinage.

6_2. Principe du minimum des fonctions v hyperprincipales dans ω : $v \geqslant \inf$ (lim inf aux points frontière).

6_3. Si une fonction f est localement $\overline{p}$ dans ω, elle est $\overline{p}$ dans ω.

Il suffit de voir que dans tout domaine ω_1 régulier $\subset \overline{\omega}_1 \subset \omega$

$$v \geqslant H_\theta^{\omega_1}$$

pour θ, finie continue sur ω_1^* et $\leqslant v$.

Or $v - H_\theta^{\omega_1}$ admet à la frontière de ω_1 une lim inf $\geqslant 0$. Si ce n'était $\geqslant 0$, la borne inférieure < 0 serait atteinte dans ω_1. L'hypothèse locale et (6_1) entraînerait que cette différence soit constante dans ω_1 d'où la contradiction.

7. Fonctions h-principales, hypo ou hyper h-principales.

Supposons l'existence dans Ω d'une fonction principale $h > 0$. Les fonctions $\frac{u}{h}$ où u est principale satisfont aux axiomes et les ouverts réguliers sont les mêmes. On les appellera h-principales ; elles comprennent les constantes.

Si à partir des fonctions h-principales, on introduit les hypo ou hyper-h-principales, on obtient les fonctions $\frac{v}{h}$ où les v sont les hypo ou hyperprincipales.

Applications. - Considérons un système quelconque de fonctions principales comprenant dans un domaine partiel ω une fonction $h > 0$. Alors

7_1. Les hyperprincipales dans ω ont le caractère local car il en est ainsi des hyper-h-principales.

7_2. Si de plus h majore une constante > 0, toute hyperprincipale v dans ω satisfaisant à $\liminf v \geqslant 0$ à la frontière, est $\geqslant 0$.

Car on a $\liminf \frac{v}{h} \geqslant 0$ et on peut appliquer (6_2) à $\frac{v}{h}$.

8. Ensembles de fonctions hypo ou hyperprincipales dans un ouvert partiel ω.

On dira qu'un ensemble V (même vide) de fonctions v hyperprincipales dans ω est saturé si

1° $\inf(v_1 , v_2) \in V$

2° si $\omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega$ est régulier, la fonction obtenue à partir de toute $v \in V$ en la remplaçant par $H_v^{\omega_1}$ dans ω_1 appartient à V .

Etant donné un ensemble quelconque W de fonctions hyperprincipales, il existe un plus petit ensemble saturé le contenant, dit extension saturée de W , noté $\overline{W}$. C'est l'intersection de tous les ensembles saturés contenant W .

Définition et notation analogue pour les fonctions hypoprincipales.

THÉORÈME 1. - L'enveloppe inférieure d'un ensemble saturé de fonctions hyperprincipales v dans ω connexe est $+\infty$, $-\infty$ ou principale.

Cette enveloppe est dans ω_1 connexe régulier $\subset \bar{\omega}_1 \subset \omega_1$ celle des $H_v^{\omega_1}$, dont chacune est $+\infty$ ou principale ; l'enveloppe de cet ordonné filtrant dans ω_1 est $+\infty$, $-\infty$ ou principale. On passe à la même propriété globale dans ω de l'enveloppe considérée.

Majorante et minorante essentielle. - Considérons un ensemble U (même vide) de fonctions hypoprincipales u dans un ouvert ω . Toute fonction majorant à la fois ces fonctions est dite majorante de U . Les $\bar{p}$ majorant U forment un ensemble saturé dont l'enveloppe inférieure est appelée majorante essentielle E_U de U ; dans chaque domaine composant E_U est $+\infty$, $-\infty$ ou principale. Supposons ω connexe :

a. Si $E \neq -\infty$ (ce qui a lieu seulement s'il existe une fonction u de U , $\neq -\infty$), E est la plus petite majorante $\bar{p}$ (et est $+\infty$ ou principale)

b. Si E est finie (ce qui a lieu seulement s'il existe une $u \neq -\infty$ et une majorante $\bar{p}$ non infinie), E est la plus petite majorante principale.

On introduit de même la minorante essentielle.

THÉORÈME 2. - L'extension saturée $\overline{U}$ d'un ensemble U de fonctions hypoprincipales u dans ω a même majorante essentielle que U et c'est l'enveloppe supérieure de $\overline{U}$.

Soit v une $\bar{p}$ majorant U ; si U' est un ensemble saturé contenant U , on voit que les $u' \in U'$ qui sont $\leq v$ forment un ensemble saturé contenant U . Donc $\overline{U}$ admet v comme majorante. Ainsi la majorante essentielle de U est aussi celle de $\overline{U}$.

De plus dans chaque domaine composant

1° Si les $u \in U$ sont $-\infty$, $\overline{U}$ est formée de la seule fonction $-\infty$ et c'est l'enveloppe supérieure de U .

2° S'il existe une $u \neq -\infty$, l'enveloppe supérieure est $+\infty$ ou principale ; comme elle est majorée par toute majorante $\overline{p}$ de U , c'est la plus petite majorante $\overline{p}$ de U .

Ordonnons les fonctions réelles sur ω par l'inégalité partout. Alors :

THÉORÈME 3. - L'ensemble des fonctions principales $\geqslant 0$ est réticulé. L'ensemble des différences de fonctions principales $\geqslant 0$ est un espace vectoriel de Riesz complètement réticulé.

D'abord si u_1 et u_2 sont principales et $\geqslant 0$, $u_1 + u_2$ et 0 sont principales et respectivement majorante et minorante de l'ensemble (u_1 , u_2) ; il existe donc une plus petite majorante principale et une plus grande minorante principale. Il s'ensuit que les différences de fonctions principales $\geqslant 0$ forment un espace de Riesz (voir [1]).

Enfin cet espace est complètement réticulé parce qu'un ensemble de fonctions principales $\geqslant 0$, majoré par une fonction principale, admet une plus petite majorante principale.

9. Le problème de Dirichlet dans Ω .

On met à la base :

A. Un ensemble $\mathcal{V}$ dit "fondamental" de fonctions hyperprincipales dans Ω satisfaisant aux conditions

a. Il est saturé.

b. Il contient toute combinaison linéaire à coefficient $\geqslant 0$ de fonctions de l'ensemble.

c. Il contient toute majorante hyperprincipale d'une fonction de l'ensemble.

Tel est l'ensemble de toutes les fonctions hyperprincipales ou celui de toutes les fonctions hyperprincipales bornées chacune inférieurement.

B. Un ensemble $\mathcal{L}$ de filtres $\mathcal{F}$ dont chacun n'a pas de point adhérent dans Ω et qui est "limitateur de $\mathcal{V}$ " c'est-à-dire tel que si $v \in \mathcal{V}$ satisfait à $\liminf_{\mathcal{F}} v \geqslant 0$ quel que soit $\mathcal{F}$, $v \geqslant 0$.

Si v et $-v$ appartiennent à $\mathcal{V}$ (et sont donc principales), la condition $\lim_{\mathcal{F}} v = 0$ pour tout $\mathcal{F}$ entraîne $v = 0$.

THÉORÈME 4. - On considère sur le limitateur $\mathcal{L}$ de l'ensemble fondamental $\mathcal{V}$ une fonction réelle $f(\mathcal{F})$ [1]. On considère toutes les fonctions $v \in \mathcal{V}$ satisfaisant à $\liminf_{\mathcal{F}} v \underset{> -\infty}{\geq} f(\mathcal{F})$. Elles forment un ensemble (vide ou non) saturé dont l'enveloppe inférieure notée $\overline{\mathcal{H}}_f$ est sa minorante essentielle et vaut $+\infty$, $-\infty$ ou une fonction principale.

Si l'on pose $\underline{\mathcal{H}}_f = -\overline{\mathcal{H}}_{-f}$ (qu'on pourrait définir de manière analogue) on a $\underline{\mathcal{H}}_f \leq \overline{\mathcal{H}}_f$.

Les théorèmes 1 et 2 précisent les enveloppes. La comparaison des $\mathcal{H}$ se voit en introduisant u hypoprincipale ($-u \in \mathcal{V}$) satisfaisant à

$$\limsup_{\mathcal{F}} u \underset{< +\infty}{\leq} f(\mathcal{F})$$

et v hyperprincipale ($v \in \mathcal{V}$) satisfaisant à

$$\liminf_{\mathcal{F}} v \underset{> -\infty}{\geq} f(\mathcal{F})$$

$v - u \in \mathcal{V}$ et $\liminf_{\mathcal{F}} (v-u) \geq 0$ d'où $v - u \geq 0$ et $u \leq v$.

Propriétés de $\overline{\mathcal{H}}_f$. - C'est en chaque point une fonctionnelle croissante de f.

Si $\lambda \geq 0$, $\overline{\mathcal{H}}_{\lambda f} = \lambda \overline{\mathcal{H}}_f$.

Si $\overline{\mathcal{H}}_f + \overline{\mathcal{H}}_g$ a un sens (en un point, donc partout), elle majore $\overline{\mathcal{H}}_{f+g}$ où $f+g$ est pris arbitrairement là où il est indéterminé.

On le voit en approchant $\overline{\mathcal{H}}_f$ et $\overline{\mathcal{H}}_g$ par des $\bar{p}$.

LEMME 1. - Si f_n croît et tend vers f et si $\overline{\mathcal{H}}_{f_n} > -\infty$,

$$\overline{\mathcal{H}}_{f_n} \to \overline{\mathcal{H}}_f .$$

Evident si $\overline{\mathcal{H}}_{f_n} = +\infty$ à partir d'un certain rang. Supposons $\overline{\mathcal{H}}_{f_n}$ fini. Soit $v_n \in \mathcal{V}$, satisfaisant aux conditions :

$$\liminf_{\mathcal{F}} v_n \underset{> -\infty}{\geq} f_n(\mathcal{F})$$

et

$$v_n(x_0) < \overline{\mathcal{H}}_{f_n}(x_0) + \varepsilon_n$$

---

[1] Il suffirait pour ce théorème 4 de supposer $\mathcal{V}$ saturé et additif c'est-à-dire contenant la somme de deux fonctions de l'ensemble, et $\mathcal{L}$ limitateur selon (B).

où $\varepsilon_n > 0$ avec $\sum_1^\infty \varepsilon_n = \varepsilon$ (x_0 et ε fixés quelconques). La fonction $w = \lim \overline{\mathcal{H}}_{f_n} + \sum_1^\infty (v_n - \overline{\mathcal{H}}_{f_n})$ est hyperprincipale, majore tout v_n, donc appartient à $\mathcal{V}$ et satisfait à

$$\liminf_{\mathcal{F}} w \geqslant f(\mathcal{F}) \; . \atop > -\infty$$

Donc $w \geqslant \overline{\mathcal{H}}_f$ et $w(x_0) \leqslant \lim \overline{\mathcal{H}}_{f_n}(x_0) + \varepsilon$ d'où

$$\overline{\mathcal{H}}_f(x_0) \leq \lim \overline{\mathcal{H}}_{f_n}(x_0) + \varepsilon$$

et

$$\overline{\mathcal{H}}_f(x_0) \leq \lim \overline{\mathcal{H}}_{f_n}(x_0)$$

alors que l'inégalité contraire est évidente.

10. Résolutivité.

L'égalité de $\underline{\mathcal{H}}_f$ et $\overline{\mathcal{H}}_g$ si elle a lieu en un point, a lieu partout. Dans le cas d'égalité partout, avec valeur commune finie (principale) on dit que f est résolutive et l'enveloppe commune est la "solution généralisée" $\mathcal{H}_f$.

Si f est résolutive, λf est résolutive (λ = Cte) et $\mathcal{H}_{\lambda f} = \lambda \mathcal{H}_f$.

Si f et g sont résolutives, $f + g$ définie arbitrairement aux points d'indétermination de la somme est résolutive et $\mathcal{H}_{f+g} = \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_g$.

LEMME 2. - Si f et g sont résolutives, $\underline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)} = \overline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)}$ ($+\infty$ ou principale). Evident si la fonction de gauche est $+\infty$.

Sinon comme $\sup(\mathcal{H}_f, \mathcal{H}_g) \leq \underline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)}$, il y a une plus petite majorante principale w_0 de $\sup(\mathcal{H}_f, \mathcal{H}_g)$ et elle minore $\underline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)}$. Soit pour x_0 et ε fixés, v et w hyperprincipales de $\mathcal{V}$ satisfaisant à

$$\liminf_{\mathcal{F}} v \geqslant f(\mathcal{F}) \atop > -\infty \qquad \liminf_{\mathcal{F}} w \geqslant g(\mathcal{F}) \atop > -\infty \qquad \mathcal{F} \in \mathcal{L}$$

$$v(x_0) - \mathcal{H}_f(x_0) \leq \varepsilon \qquad w(x_0) - \mathcal{H}_g(x_0) \leq \varepsilon$$

Alors w_1 défini par $w_0 + (v - \mathcal{H}_f) + (w - \mathcal{H}_g)$ est hyperprincipale, $\geqslant v$, $\geqslant w$ donc dans $\mathcal{V}$ et

$$\liminf_{\mathcal{F}} w_1 \geqslant \sup(f(\mathcal{F}) , g(\mathcal{F})) \\ > -\infty$$

d'où $w_1 \geqslant \overline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)}$ et $w_0(x_0) \geqslant \overline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)}(x_0) - 2\varepsilon$, x_0 et ε étant quelconques, on conclut $w_0 \geqslant \overline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)}$ d'où

$$\underline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)} \geqslant \overline{\mathcal{H}}_{\sup(f,g)} .$$

CONSÉQUENCE. - Si f et g sont résolutives, $\sup(f , g)$ est résolutive, si et seulement si $\mathcal{H}_f$, $\mathcal{H}_g$ sont majorées par une même fonction hyperprincipale $\neq +\infty$ (ou encore une même fonction principale), ce qui a lieu par exemple si f et g sont $\geqslant 0$.

DÉFINITION. - On dira que f est <u>absolument résolutive</u> si f^+ et f^- sont <u>résolutives</u>. Une condition nécessaire et suffisante est que f soit égale à la différence de deux fonctions résolutives $\geqslant 0$, là où cette différence a un sens.

REMARQUE. - Considérons pour une "mesure $\geqslant 0$ abstraite ou une intégrale de Daniell" les fonctions sommables et l'intégrale correspondante. Si l'on prend les fonctions sommables <u>finies</u> et l'intégrale correspondante, elles définissent, selon le prolongement de Daniell, une nouvelle intégrale abstraite, pour laquelle on montre que les fonctions sommables et l'intégrale (et par suite $\underline{\int}$ et $\overline{\int}$) sont les mêmes qu'au départ. On identifie donc ces intégrales abstraites, définies par la classe des fonctions sommables et la valeur de l'intégrale, ou par la classe des fonctions sommables finies et l'intégrale.

THÉORÈME 5. - <u>Quel que soit</u> $x_0 \in \Omega$ <u>les fonctions absolument résolutives sur</u> $\mathcal{L}$ <u>sont les fonctions sommables</u> f <u>pour une mesure abstraite</u> $\geqslant 0$ (sur $\mathcal{L}$) <u>dont l'intégrale vaut</u> $\mathcal{H}_f(x_0)$.

Etudions donc les fonctions absolument résolutives finies α ; elles forment un espace vectoriel. En ordonnant selon l'inégalité partout, on obtient, grâce au lemme 2 pour fonctions $\geqslant 0$, un espace de Riesz c'est-à-dire que $\sup(\alpha_1 , \alpha_2)$ et $\inf(\alpha_1 , \alpha_2)$ sont absolument résolutives si α_1 et α_2 le sont. Puis le lemme 1 montre que $\mathcal{H}_\alpha(x_0)$ définit une intégrale abstraite de Daniell $\int \alpha \, d\mu^{x_0}$.

On voit ensuite que les limites γ de suites croissantes ou décroissantes de α donnent des $\underline{\mathcal{H}}_{\gamma}(x_0)$ et $\overline{\mathcal{H}}_{\gamma}(x_0)$ égaux à $\int \gamma \, d\mu^{x_0}$. On en déduit pour f quelconque que $\underline{\mathcal{H}}_f(x_0)$ et $\overline{\mathcal{H}}_f(x_0)$ sont encadrés par $\underline{\int} f \, d\mu^{x_0}$ et $\overline{\int} f \, d\mu^{x_0}$. La sommabilité entraîne donc la résolutivité (d'ailleurs absolue) et l'intégrale $\int f \, d\mu^{x_0}$ vaut alors $\mathcal{H}_f(x_0)$. Il reste à voir que si f est résolutive $\geqslant 0$, elle est sommable.

Or en considérant f - f, on voit que toute fonction nulle là où f est finie est résolutive et de solution 0. Par suite toute fonction égale à f aux points où f est finie, est résolutive et de solution $\mathcal{H}_f$. En particulier la fonction f_n égale à f là où f est finie et à n ailleurs est résolutive finie $\geqslant 0$ donc sommable et de solution ou intégrale égale à $\mathcal{H}_f$, f_n tend en croissant vers f qui est donc sommable.

REMARQUE. - Lorsque $\mathcal{V}$ est formée de fonctions $\overline{p}$ bornées chacune inférieurement et que les constantes sont principales, toutes les fonctions résolutives sont absolument résolutives. On peut alors définir l'intégrale de Daniell à partir des fonctions résolutives bornées.

Car si f est résolutive, $\mathcal{H}_f$ est majorée par une fonction hyperprincipale $\neq +\infty$ et bornée inférieurement, donc par une fonction hyperprincipale $\geqslant 0$.

Si on part maintenant des fonctions résolutives bornées f et de $\mathcal{H}_f(x_0)$, on voit qu'elles définissent une intégrale abstraite, que la sommabilité entraîne la résolutivité. Enfin si $f \geqslant 0$ est résolutive, inf(f , n) est résolutive, sommable et d'intégrale $\leqslant \mathcal{H}_f(x_0)$. De sorte que la limite f est sommable.

11. Cas particuliers.

I. Le problème de Dirichlet pour un domaine régulier.

Complétons le n° 5. Prenons pour $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions $\overline{p}$ dans ω (ou celui des seules fonctions $\overline{p}$ bornées inférieurement) et comme limitateur $\mathcal{L}$, grâce à l'existence de $H_1^{\omega}(x)$ et à l'application (7_2) n° 7, l'ensemble des filtres des traces sur ω des voisinages des points-frontière. On emploiera la même notation pour une fonction de $\mathcal{F}$ et du point de convergence y de $\mathcal{F}$.

Montrons que les fonctions résolutives sont absolument résolutives et, comme fonctions de y sont les fonctions sommables pour la mesure harmonique $d\rho^x(y)$ du n° 5 ; $\mathcal{H}_f$ vaut alors la solution généralisée $\int f \, d\rho^x$ du n° 5 et l'intégrale de Daniell du théorème 5 sur $\mathcal{L}$ vaut l'intégrale de Radon correspondante sur ω''.

En effet si Ψ désigne une fonction $> -\infty$, semi-continue inférieurement sur ω^*, $\int \Psi \, d\rho^x$ admet en tout $y \in \omega^*$ une lim inf $\geq \Psi(y)$, donc $\int \Psi \, d\rho^x \geq \overline{\mathcal{H}}_\Psi(x)$. Si θ est sur ω^* finie continue $\leq \Psi$, $\int \theta \, d\rho^x \leq \underline{\mathcal{H}}_\Psi(x)$ d'où $\int \Psi \, d\rho^x \leq \underline{\mathcal{H}}_\Psi(x)$. On conclut $\underline{\mathcal{H}}_\Psi = \overline{\mathcal{H}}_\Psi = \int \Psi \, d\rho^x$. Alors pour f quelconque, comme $\overline{\mathcal{H}}_f$ est ici l'enveloppe inférieure des $\mathcal{H}_\Psi$ pour les $\Psi > -\infty$ semi-continues inférieurement majorant f, on conclut

$$\overline{\mathcal{H}}_f = \overline{\int} f \, d\rho^x .$$

En particulier la résolutivité équivaut à la sommabilité-$d\rho^x$ ce qui entraîne la résolutivité absolue et $\mathcal{H}_f(x) = \int f \, d\rho^x$.

II. Exemple général d'un problème de Dirichlet avec frontière.

Hypothèses générales. - Ω est partout dense dans un espace compact $\mathcal{E}$ et les constantes sont principales.

Choix de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{L}$. - On prendra pour $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions hyperprincipales (ou seulement celles qui sont bornées inférieurement) ; on pourra prendre pour $\mathcal{L}$ l'ensemble des filtres $\mathcal{F}$, traces des filtres des voisinages des points de $\mathcal{E}-\Omega$ (frontière de Ω dans $\mathcal{E}$), car c'est, d'après (6_2) un limitateur de $\mathcal{V}$.

Les fonctions résolutives sont alors absolument résolutives. On notera de la même manière les fonctions de $\mathcal{F}$ et du point de convergence $y \in \mathcal{E} - \Omega$. Les théorèmes 4 - 5 s'appliquent. Complétons :

Supposons $\mathcal{E}$ métrique et les fonctions finies continues sur $\mathcal{E} - \Omega$ résolutives. Alors $\mathcal{H}_\theta$ pour θ finie continue définit en x_0 une intégrale de Radon $\int \theta \, d\sigma^{x_0}$. Pour f quelconque, $\underline{\mathcal{H}}_f$ et $\overline{\mathcal{H}}_f$ valent $\underline{\int} f \, d\sigma^{x_0}$, $\overline{\int} f \, d\sigma^{x_0}$, $\mathcal{H}_f(x_0) = \int f \, d\sigma^{x_0}$. Les fonctions résolutives sont les fonctions sommables-$d\sigma^{x_0}$. L'intégrale de Daniell du théorème 5 s'obtient par prolongement de Daniell à partir de l'intégrale de Radon pour les fonctions finies continues.

Pour voir ce complément, remarquons que sur $\mathcal{E} - \Omega$, Ψ semi-continue inférieurement $> -\infty$ est limite de θ_n finie continue croissante d'où

$$\overline{\mathcal{H}}_\Psi(x_0) = \lim \mathcal{H}_{\theta_n} = \int \varphi \, d\sigma^{x_0}$$

et

$$\mathcal{H}_{\theta_n} = \int \theta_n \, d\sigma^{x_0} \leq \underline{\mathcal{H}}_{\Psi}$$

d'où

$$\underline{\mathcal{H}}_{\Psi} = \overline{\mathcal{H}}_{\Psi} = \int \Psi d\sigma^{x_0} .$$

D'autre part si $v \in \mathcal{V}$, de $\liminf \underset{\geqslant f}{>} -\infty$ à la frontière, on voit que la fonction $\varphi = \liminf v$ à la frontière est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{E} - \Omega$, $> -\infty$ avec $\overline{\mathcal{H}}_f \leq \overline{\mathcal{H}}_{\underline{\varphi}} \leq v$ d'où

$$\overline{\mathcal{H}}_f = \inf \overline{\mathcal{H}}_{\Psi} \; (\Psi \text{ s.c.i } \underset{\geqslant f}{>} -\infty)$$

et

$$\overline{\mathcal{H}}_f(x_0) = \int f \cdot d\sigma^{x_0} .$$

Cette étude contient donc l'axiomatique nouvelle développée dans [2] pour un espace de Green et les fonctions harmoniques u, et aussi les quotients $\frac{u}{h}$ par une fonction harmonique h finie > 0.

III. Autres exemples.

On pourrait généraliser l'autre axiomatique développée dans [2] et qui équivaut d'ailleurs à celle qu'on vient d'étendre.

D'autre part, sans introduction de frontière, on a utilisé, dans les espaces de Green, les lignes de Green régulières [3] dont les arcs terminaux définissent des bases de filtre $\mathcal{F}$, formant un limitateur pour les fonctions surharmoniques ou $+\infty$ bornées inférieurement. Il s'y applique le théorème 4, comme on le sait et aussi le théorème 5.

Les axiomes proposés et le problème général ne sont sans doute que provisoires. Même dans notre cadre, il resterait à étudier d'abord la solution généralisée selon les filtres $\mathcal{F}$ dans des cas plus ou moins généraux, à introduire, avec les axiomes nécessaires, une fonction de Green et à généraliser la frontière de Martin et ses applications.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, chap. 1-4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., n° 1175 ; Eléments de Mathématique, 13) ; Intégration, chap. 5. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., n° 1244 ; Eléments de Mathématique, 21).

[2] BRELOT (Marcel). - Le problème de Dirichlet, Axiomatique et frontière de Martin, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 35, 1956, p. 297-335.

[3] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 3, 1951, p. 199-263.

[4] DOOB (J.-L.). - Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. third Berkeley Symposium ..., vol. 2. - Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1956 ; p. 49-80.

[5] MIRANDA (Carlo). - Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. - Berlin, Springer, 1955 (Ergebnisse der Mathematik ..., neue Folge, Heft 2).

[6] TAUTZ (Georg). - Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe, Math. Nachr., t. 2, 1949, p. 279-303.