Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Linda Naim

Sur l'allure à la frontière des fonctions surharmoniques positives

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 1 (1957), exp. nº 2, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1957__1__A2_0>

18 février 1957

SUR L'ALLURE À LA FRONTIÈRE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES POSITIVES

par Mlle Linda NAIM

1. Introduction.

Notre but est de donner ici divers résultats sur l'allure des fonctions surharmoniques > 0 au voisinage de la frontière de R.S. MARTIN. On sait que la frontière de Martin a été introduite par son auteur [10] pour étendre l'intégrale de Poisson-Stieltjes selon une représentation intégrale des fonctions harmoniques >0 dans un domaine, avec un noyau généralisant le noyau de Poisson. La théorie, développée initialement pour un domaine euclidien, reste valable pour une variété plus générale, par exemple une surface de Riemann hyperbolique, et en général un "Espace de Green", type d'espace introduit par M. BRELOT et G. CHOQUET [5].

Nous utilisons comme outil essentiel et nouveau une notion d'effilement à la frontière Martin, inspirée de l'effilement classique en un point intérieur [1] ; il en dérive une notion de pseudo-limite, plus faible que la limite selon la topologie de Martin, et qui semble bien adaptée à la présente étude.

I. Rappel de notions sur les espaces de Green et la frontière de R. S. MARTIN.

2. Espaces de Green.

Rappelons [5] qu'un espace $\mathcal{C}$ est un espace topologique connexe séparé satisfaisant aux conditions suivantes :

a. A chaque point x est associé un voisinage ouvert V_x et un homéomorphisme de V_x sur un ouvert V'_x de l'espace $\overline{R}^{\tau}$ (espace compact obtenu par adjonction d'un point à l'infini à l'espace euclidien $\overline{R}^{\tau}$ à $\tau \geqslant 2$ dimensions).

b. Si l'intersection de deux tels voisinages n'est pas vide, les images correspondantes sont, par l'intermédiaire des deux homéomorphismes, dans une correspondance isométrique, ou aussi, dans le cas $\tau = 2$, seulement conforme. Cette correspondance peut être directe ou inverse.

Cet espace $\mathcal{E}$, localement compact, est métrisable et dénombrable à l'infini (réunion dénombrable de compacts).

L'harmonicité et la surharmonicité dans un ouvert de $\mathcal{E}$ étant définies par les mêmes propriétés locales sur l'image, s'il existe dans $\mathcal{E}$ une fonction surharmonique > 0 non constante, l'espace est dit espace de Green. Il existe alors pour tout point x une fonction minima dans $\mathcal{E}$, qui soit surharmonique > 0 et dont la mesure associée contienne la masse $+1$ en x . C'est la fonction de Green de pôle x , $G_x(y)$, symétrique en x et y , notée aussi $G(x , y)$.

Le potentiel de Green d'une mesure $\mu > 0$ dans $\mathcal{E}$ est par définition la fonction $v(x) = \int G(x , y)\, d\mu(y)$, partout infinie, ou bien surharmonique > 0 . Rappelons aussi qu'un ensemble de $\mathcal{E}$ est dit polaire s'il existe localement une fonction surharmonique valant $+\infty$ au moins sur lui ; et "quasi-partout" signifie "sauf sur un ensemble polaire".

3. La théorie de l'extrémisation ou du balayage.

Les principaux résultats que nous donnons ici se démontrent ou s'expriment à l'aide de la théorie dite le plus souvent du "balayage", et développée de diverses manières. Dans [2] cette théorie a, sous le nom d'extrémisation, une forme qui s'applique immédiatement à un espace de Green Ω et à une fonction surharmonique > 0 quelconque.

Rappelons seulement que l'extrémale d'une fonction surharmonique $v > 0$ relativement à un ensemble $E \subset \Omega$ (ou plus brièvement sur E) est par définition la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ majorant v quasi-partout sur $\Omega - E$; elle minore v et l'égale quasi-partout sur $\Omega - E$. On la note $\mathcal{E}_v^E$.

Si v est le potentiel de Green d'une mesure $\mu > 0$, il en est de même de l'extrémale, et la mesure associée μ' est dite extrémisée, ou balayée, de μ relativement à E . Si l'on note ε'_x l'extrémisée de la mesure ε_x définie par la masse $+1$ en x , l'extrémale relative à E de toute v surharmonique > 0 admet la représentation intégrale

$$\mathcal{E}_v^E(x) = \int v(y)\, d\,\varepsilon'_x(y) .$$

4. La frontière de R.S. MARTIN.

La théorie originale de R. S. MARTIN [10] peut s'adapter à un espace de Green Ω mais on peut d'abord caractériser la frontière de Martin de la façon suivante (M. BRELOT [4]) :

Soit $K(x, y) = \frac{G(x,y)}{G(x,y_0)}$ la fonction de Green "normalisée" en un point fixé $y_0 \in \Omega$, prise égale à 1 pour x et y en y_0. Il existe un espace compact $\hat{\Omega}$ unique à un homéomorphisme près, dont Ω soit un sous-espace partout dense (donc ouvert dans $\hat{\Omega}$ et de frontière $\hat{\Omega} - \Omega$), tel que $K(x, y)$ admette, quel que soit $y \in \Omega$, une limite quand $x \in \Omega$ tend vers un point-frontière quelconque x_0, et que la fonction-limite, notée $K(x_0, y)$ et nécessairement harmonique > 0 en y, corresponde biunivoquement à x_0. Alors $K(x, y)$ est continue de (x, y) pour $x \in \hat{\Omega}$, $y \in \Omega$.

Cet espace $\hat{\Omega}$ est métrisable et indépendant du choix de y_0. C'est <u>l'espace de Martin</u>, et $\hat{\Omega} - \Omega$ est la <u>frontière de Martin</u>, notée aussi Δ.

Pour x quelconque $\in \hat{\Omega}$, on notera aussi $K_x(y)$ la fonction surharmonique > 0, $K(x, y)$.

5. <u>Représentation intégrale des fonctions harmoniques</u> > 0.

Pour toute mesure de Radon $\mu > 0$ sur Δ, $\int K(x, y)\, d\mu(x)$ est une fonction harmonique > 0 de $y \in \Omega$, et l'on peut représenter ainsi toute fonction harmonique > 0 dans Ω.

La question d'unicité d'une telle représentation de traite grâce à l'introduction des fonctions minimales.

D'après MARTIN, on appelle minimale dans Ω toute fonction harmonique >0 telle que toute autre inférieure lui soit proportionnelle. Les fonctions minimales sont à un facteur près les $K(x, y)$ pour x appartenant à une certaine partie non vide Δ_1 de Δ, dont les points sont dits <u>minimaux</u> ; et il existe une représentation unique du type indiqué, dite canonique, pour laquelle la mesure μ, dite aussi <u>mesure canonique associée</u>, ne charge que Δ_1.

Le théorème fondamental de Martin a été depuis intégré dans une théorie axiomatique du problème de Dirichlet (M. BRELOT [4]). D'autre part, selon une remarque de H. CARTAN, les fonctions minimales égales à 1 au point y_0 sont les éléments <u>extrémaux</u> de l'ensemble convexe des fonctions harmoniques >0 égales à 1 en y_0, de sorte que la théorie de Martin est maintenant conséquence des derniers résultats de G. CHOQUET [6] [7] [8] sur l'existence et l'unicité de la représentation intégrale d'un point d'un cône convexe à l'aide des points extrémaux d'une section.

II. La notion d'effilement à la frontière de Martin.

6. La notion d'effilement.

Soit Ω un espace de Green, et $\hat{\Omega}$ l'espace de Martin associé. Partons du noyau de Martin $K(x, y)$, $(x \in \hat{\Omega} - \{y_0\})$, $y \in \Omega)$. Le potentiel par rapport à ce noyau d'une mesure m dans Ω, qui sera toujours supposée $\geqslant 0$, est défini dans $\hat{\Omega} - \{y_0\}$ par

$$V(x) = \int K(x, y)\, dm(y),$$

supposé non partout infini. C'est une fonction semi-continue inférieurement de x dans $\hat{\Omega} - \{y_0\}$, égale dans $\Omega - \{y_0\}$ au quotient par $G(x, y_0)$ du potentiel de Green $\int G(x, y)\, dm(y)$.

DÉFINITION. - Un ensemble $E \subset \Omega$ est dit effilé en un point $x_0 \in \Delta$ si x_0 est isolé de $\{x_0\} \cup E$, sinon s'il existe un potentiel U précédent (de mesure > 0) tel que $U(x_0) < \liminf_{x \to x_0,\, x \in E} U(x)$.

On voit assez facilement que cette dernière condition équivaut à l'existence d'un autre potentiel U satisfaisant aux conditions :

$$U(x_0) \text{ fini, et } U(x) \to +\infty \quad (x \to x_0,\ x \in E).$$

Comme propriétés immédiates, notons l'effilement de la réunion de deux ensembles effilés en x_0, l'effilement en x_0 de toute partie d'un effilé en x_0, et de tout ensemble polaire.

7. Critères d'effilement.

Les propriétés de l'effilement essentielles pour la suite découlent du critère général suivant, dont la démonstration, basée sur la propriété minimale de l'extrémale servira aussi de modèle pour établir les théorèmes 4 et 5 :

THÉORÈME 1. - Pour qu'un ensemble $E \subset \Omega$ soit effilé au point x_0, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage δ de x_0 tel que l'extrémisation de K_{x_0} sur $\Omega - E \cap \delta$ ne conserve pas cette fonction.

Supposons d'abord E effilé en x_0 non isolé de $\{x_0\} \cup E$ (le cas où $x_0 \notin \overline{E}$ étant immédiat), et soit U un potentiel tel que

$$U(x_0) < \gamma < \liminf_{x \to x_0,\ x \in E} U(x) .$$

On a $U(x) > \gamma$ dans un voisinage δ de x_0 sur $E(y_0 \notin \delta)$, donc le potentiel de Green égal à $G_{y_0} . U$ hors de y_0 majore $\gamma . G_{y_0}$ sur $E \cap \delta$; d'après la propriété minimale de l'extrémale, il majore

$$\gamma . \mathcal{E}_{G_{y_0}}^{\Omega - E \cap \delta} = \gamma . \int G(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y)$$

partout dans Ω (ε'_{y_0} extrémisée de ε_{y_0} sur $\Omega - E \cap \delta$), d'où

$$\int K(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) \leq \frac{1}{\gamma} U(x) , \quad (x \in \Omega - \{y_0\}) .$$

On montre que la même inégalité a lieu dans $\hat{\Omega} - \{y_0\}$, de sorte que, au point x_0,

$$\int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) \leq \frac{1}{\gamma} U(x_0)$$

ou

$$\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta}(y_0) < K_{x_0}(y_0) = 1 .$$

Réciproquement, supposons l'existence d'un voisinage δ de x_0 et d'un point $Z \in \Omega$ tels que

$$K_{x_0}(Z) > \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta}(Z) ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$K(x_0, Z) > \int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_Z(y) ,$$

(ε'_Z extrémisée de ε_Z sur $\Omega - E \cap \delta$). Conclusion immédiate si le second membre est nul. Sinon, soit $U(x) = \int K(x, y)\, d\varepsilon'_Z(y)$, égal dans $\Omega - \{y_0\}$ à $\dfrac{\mathcal{E}_{G_Z}^{\Omega - E \cap \delta}}{G_{y_0}}$, et à $\dfrac{G(x,Z)}{G(x,y_0)}$ ou $K(x, Z)$ sur $E \cap \delta$ diminué d'un ensemble e polaire.

Si x_0 est adhérent à $E \cap \delta - e$, on a

$$\liminf_{x \to x_0,\ x \in E \cap \delta - e} U(x) = K(x_0, Z) > \int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_Z(y) = U(x_0) ,$$

d'où l'effilement en x_0 de $E \cap \delta - e$, puis celui de E, auquel on conclut aussi si x_0 n'est pas adhérent à $E \cap \delta - e$.

APPLICATION. - Les points d'effilement de Ω.

Partant d'une propriété qui caractérise dans Ω les fonctions $K(x_0, y)$ minimales, à savoir leur invariance par extrémisation sur tout ensemble de Ω auquel le point x_0 n'est pas adhérent [3], [10], l'application du théorème précédent à $E = \Omega$ donne une caractérisation nouvelle et importante des points minimaux :

THÉORÈME 2. - Les points minimaux sont les points de Δ où Ω n'est pas effilé.

Aussi, pour toute mesure $m \geqslant 0$ sur Ω, et tout point x_0 minimal,

$$\int K(x_0, y)\, dm(y) = \lim_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \inf \int K(x, y)\, dm(y) .$$

LEMME (Remarque de M. BRELOT). - Soit u une fonction minimale dans Ω. Toute extrémale de u vaut u ou un potentiel de Green.

Car la plus grande minorante harmonique de $\mathcal{E}_u^E (E \subset \Omega)$, majorée par u, lui est proportionnelle, et d'après l'invariance de l'extrémale par itération, il y a contradiction à la supposer non nulle et distincte de u.

THÉORÈME 3. - Critère fondamental d'effilement en un point minimal.

Pour qu'un ensemble $E \subset \Omega$ soit effilé au point x_0 minimal, il faut et il suffit que l'extrémisation de K_{x_0} sur $\Omega - E$ ne conserve pas cette fonction.

Condition suffisante d'après le théorème 1.

Pour la réciproque, on sait déjà [3] que l'extrémisation de K_{x_0} sur l'intersection de Ω et d'un voisinage quelconque de x_0 ne conserve pas cette fonction de sorte qu'il suffit d'étudier le cas de x_0 non isolé de $\{x_0\} \cup E$. Alors le théorème 1 montre l'existence d'un voisinage δ de x_0 tel que $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta}$ soit distincte de K_{x_0} ; d'après ce qui précède $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \complement \delta}$ est aussi distincte de K_{x_0}. Ces deux extrémales sont des potentiels de Green, et le théorème se déduit de l'inégalité

$$\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E} \leqslant \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta} + \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \complement \delta} ,$$

entrainant que le premier nombre surharmonique ≥ 0, majoré par un potentiel de Green, est aussi un potentiel nécessairement distinct de K_{x_0}.

EXEMPLE. - Il est immédiat que K_{x_0} n'est pas conservée par extrémisation relative à l'ouvert où $K_{x_0} > \lambda > 0$ ($\lambda <$ borne sup de K_{x_0}), donc l'ensemble des points de Ω où $K_{x_0} \leq \lambda$ est effilé en x_0.

Dans le cas du cercle, cet ensemble est le complémentaire d'un cercle tangent intérieurement à la circonférence-frontière au point correspondant à x_0 et identifiable à x_0, ce qui donne de plus un exemple d'ensemble effilé en x_0 au sens actuel, mais non effilé au sens ordinaire.

8. La notion de pseudo-limite.

A la notion d'effilement se rattache celle de pseudo-limite à la frontière, définie de la façon suivante :

La pseudo-limite en un point-frontière x_0 signifie la limite prise selon le filtre formé par les ensembles de complémentaire effilé en x_0, ce qui n'a évidemment de sens qu'en un point x_0 de non effilement de Ω, c'est-à-dire minimal.

On montre qu'elle vaut la limite prise dans $\hat{\Omega}$ hors d'un ensemble convenable effilé en x_0.

Signalons seulement que cette notion de pseudo-limite coïncide avec la limite selon une topologie convenable définie dans $\hat{\Omega} - \{y_0\}$, plus fine que la topologie de Martin, et appelée topologie fine parce qu'elle induit sur $\Omega - \{y_0\}$ la topologie fine de H. Cartan, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les fonctions sousharmoniques. Mais ce point de vue n'est pas essentiel pour la suite.

III. Allure à la frontière de Martin d'une fonction surharmonique >0. Principaux résultats.

9. Existence et propriétés des pseudo-limites.

Les premiers résultats sont relatifs à l'allure à la frontière du quotient d'une fonction surharmonique > 0 par la fonction de Green, ou par une fonction minimale fixée; les démonstrations n'utilisent pas le critère du théorème 3.

Soit v surharmonique >0 dans Ω. Alors,

THÉORÈME 4. - <u>En tout point</u> x_o <u>minimal,</u> $\dfrac{v(x)}{G(x,y_o)}$ <u>admet une pseudo-limite</u> $\geqslant 0$ <u>finie ou</u> $+\infty$, <u>égale à</u> $\displaystyle\liminf_{x \to x_o,\ x \in \Omega} \frac{v(x)}{G(x,y_o)}$.

Si v est le potentiel de Green d'une mesure $m > 0$ dans Ω, cette pseudo limite est aussi égale à $\int K(x_o, y)\, dm(y)$; dans le cas général, elle admet encore une représentation potentielle, grâce à la mesure canonique associée à v par la représentation de Martin, et à un noyau $\Theta(x, y)$ prolongeant convenablement dans $\hat{\Omega}$ le quotient $\dfrac{G(x,y)}{G(x,y_o)G(y,y_o)}$ défini dans Ω.

Etant donnée h harmonique >0 dans Ω, <u>appelons faiblement</u> h-<u>régulier</u> [1] <u>un point</u> $x_o \in \Delta$ <u>tel que</u> $\dfrac{G(x,y_o)}{h(x)} \to 0$ <u>pour</u> $x \to x_o$, <u>ce qui est indépendant</u> de y_o. Alors :

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> h <u>une fonction harmonique</u> >0 <u>dans</u> Ω. <u>En tout point minimal non faiblement</u> h-<u>régulier,</u> $\dfrac{v}{h}$ <u>admet une pseudo-limite</u> >0 <u>finie ou</u> $+\infty$.

THÉORÈME 5. - <u>Pour</u> x_o <u>minimal,</u> $\dfrac{v(x)}{K(x_o,x)}$ <u>admet en</u> x_o <u>une pseudo-limite finie</u> $\geqslant 0$, <u>égale à</u> $\displaystyle\liminf_{x \to x_o,\ x \in \Omega} \frac{v(x)}{K(x_o,x)}$, <u>à la borne inférieure de</u> $\dfrac{v(x)}{K(x_o,x)}$ <u>dans</u> Ω, <u>et à la mesure de</u> $\{x_o\}$ <u>pour la mesure canonique associée à</u> v.

COROLLAIRE. - <u>Si, pour</u> x_o <u>minimal et</u> h <u>harmonique</u> >0 <u>dans</u> Ω, $\displaystyle\liminf_{x \to x_o,\ x \in \Omega} \frac{K(x_o,x)}{h(x)} < +\infty$, $\dfrac{v}{h}$ <u>admet en</u> x_o <u>une pseudo-limite finie</u> $\geqslant 0$.

Extension. - Les propriétés précédentes de pseudo-limites s'étendent à une fonction surharmonique $v > 0$ définie dans un ouvert de complémentaire effilé en x_o minimal : $\dfrac{v}{G_{y_o}}$ admet encore au point x_o une pseudo-limite >0 finie ou $+\infty$, et $\dfrac{v}{K_{x_o}}$ une pseudo-limite finie $\geqslant 0$; et si pour h harmonique >0 dans Ω, $\displaystyle\limsup_{x \to x_o,\ x \in \Omega} \frac{G_{y_o}}{h} > 0$ ou $\displaystyle\limsup_{x \to x_o,\ x \in \Omega} \frac{K_{x_o}}{h} < +\infty$, $\dfrac{v}{h}$ admet une pseudo-limite au point x_o.

---

[1] Voir l'exposé n° 4 de ce Séminaire.

Nous n'entrerons pas dans le détail des démonstrations, qui font intervenir des domaines partiels de Ω, et des propriétés, assez délicates à établir de leur frontière de Martin comparée à leur frontière dans $\hat{\Omega}$.

10. Allure à la frontière d'un potentiel de Green.

D'autre résultats importants concernant l'allure à la frontière du quotient d'une fonction surharmonique > 0, et plus particulièrement un potentiel de Green, par une fonction harmonique > 0 fixée. Leurs démonstrations nécessitent une étude préalable de l'extrémisation d'une fonction harmonique >0, où le critère fondamental du théorème 3 joue un rôle essentiel.

THÉORÈME 6. - Pour qu'une fonction harmonique $h > 0$ soit invariante par extrémisation relative à un ensemble $E \subset \Omega$, il faut et il suffit que les points d'effilement de $\Omega \setminus E$ situés sur Δ forment un ensemble h-négligeable (2) (c'est-à-dire de mesure nulle pour la mesure canonique associée à h).

La condition est suffisante, car la représentation intégrale canonique

$$h(y) = \int K_x(y) \, d\mu(x)$$

entraîne

$$\mathcal{E}_h^E = \int \mathcal{E}_{K_x}^E \, d\mu(x) ,$$

où $\mathcal{E}_{K_x}^E = K_x$ en tout point x minimal où $\Omega - E$ n'est pas effilé.

La réciproque, basée aussi sur la représentation canonique de h, est plus difficile à établir, et nous n'entrerons pas dans les détails.

COROLLAIRE. - Pour un ensemble quelconque $E \subset \Omega$, la plus grande minorante harmonique de $\mathcal{E}_h^E$ est égale à la h-mesure harmonique (2) dans Ω de l'ensemble des points de Δ où $\Omega - E$ n'est pas effilé. Donc pour que $\mathcal{E}_h^E$ soit un potentiel de Green, il faut et il suffit que les points de non effilement de $\Omega - E$ forment un ensemble h-négligeable.

On en déduit le

THÉORÈME 7. - Soit v le potentiel de Green d'une mesure $m > 0$ dans Ω. $\frac{v}{h}$ admet, à la frontière de Martin, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.

---

(2) Voir l'exposé n° 4 de ce Séminaire

Il suffit de voir que pour tout $\varepsilon > 0$ les points de non effilement de l'ouvert E_ε où $\frac{v}{h} > \varepsilon > 0$ forment un ensemble h-négligeable, ce qui résulte immédiatement du corollaire précédent, puisque l'extrémale de h relative à $\Omega - E_\varepsilon$, majorée par $\frac{v}{\varepsilon}$, est un potentiel de Green.

COROLLAIRE 1. - Les points minimaux non faiblement h-réguliers forment un ensemble h-négligeable (Extension du cas h = 1 signalé par M. BRELOT [4]).

Application du théorème à la fonction de Green G_{y_0}.

COROLLAIRE 2. - Soit u harmonique > 0 dans Ω, et soit A le support compact de la mesure canonique associée à u. Sur $\Delta - A$, $\frac{u}{h}$ admet une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.

Cela s'obtient en considérant une suite (ω_n) décroissante de voisinages de A, telle que $\bigcap_n \overline{\omega}_n = A$, et les extrémales $\mathcal{E}_u^{\omega_n \cap \Omega}$ qui sont des potentiels de Green, de limite u, et auxquels le théorème est applicable.

Cas particulier d'une fonction minimale K_{x_0}. - Le support de la mesure associée est réduit au point x_0, donc $\frac{K_{x_0}}{h}$ admet, hors de x_0 une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.

Dans le cas h = 1, ce résultat généralise la propriété, pour le noyau de Poisson, de s'annuler en tout point-frontière distinct du pôle.

REMARQUE. - On forme aisément un exemple montrant que le théorème 7 cesse d'être exact si on y remplace la pseudo-limite par la limite ordinaire.

11.—Signalons seulement que dans le cas très particulier du demi-espace, la notion générale d'effilement équivaut à l'une des notions introduites dans ce cas par Mme J. LELONG-FERRAND [9] pour caractériser diverses raréfactions d'ensembles au voisinage de la frontière, et étudier l'allure à la frontière des fonctions surharmoniques > 0. Les résultats généraux qui précèdent s'explicitent facilement dans ce cas particulier, et contiennent la plupart de ceux obtenus par Mme LELONG.

IV. Principe général du maximum pour l'espace de Green Ω et sa frontière de Martin Δ.

12. - Une des principales applications de la notion d'effilement à la frontière de Martin est une forme très améliorée du principe classique du maximum, où

de nouvelles conditions-frontière s'expriment à l'aide de l'effilement ou de la pseudo-limite.

Dans toute la suite, h désigne une fonction harmonique >0 fixée dans Ω.

THÉORÈME 8. – <u>Soit dans l'espace de Green Ω une fonction u sousharmonique. On suppose que $\frac{u}{h}$ est bornée supérieurement, et que pour tout point x minimal hors d'une ensemble e faiblement h-négligeable</u> (2) <u>(C'est-à-dire de mesure intérieure nulle pour la mesure canonique associée à h), il existe un ensemble E_x non effilé en x tel que</u> $\limsup_{y \to x,\, y \in E_x} \frac{u(y)}{h(y)} \leq 0$. <u>Alors u est ≤ 0.</u>

Il revient au même de montrer que $u^+ = 0$. Supposons u^+ non nul, ce qui revient à supposer que sa plus petite majorante harmonique u_1 est >0. D'après l'hypothèse, l'ensemble E_ε des points de Ω où $u^+ \leq \varepsilon h$ ($\varepsilon > 0$ fixé) est non effilé en tout point minimal hors de e. Les points d'effilement forment donc un ensemble h-négligeable, et comme $\frac{u_1}{h}$ est borné, cet ensemble est aussi u_1-négligeable, d'où résulte l'invariance de u_1 par extrémisation relative à $\Omega - E_\varepsilon$ (théorème 6).

Mais par la décomposition de u^+ en $u^+ = -v + u_1$, où v est le potentiel de Green d'une mesure ≥ 0 dans Ω, on a

$$u_1 \leq \varepsilon h + v \quad \text{dans } E_\varepsilon ,$$

donc

$$u_1 = \mathcal{E}_{u_1}^{\Omega - E_\varepsilon} \leq \varepsilon h + v \quad \text{dans } \Omega ,$$

et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient une contradiction d'après laquelle on a nécessairement $u^+ = 0$.

Comme conséquence, soulignons la nullité de toute fonction harmonique dans Ω dont le quotient par h est bornée et admet à la frontière Δ une pseudo-limite nulle hors d'un ensemble h-négligeable arbitrairement choisi.

Nous verrons dans l'exposé suivant le rôle important de ce principe dans l'étude de l'allure à la frontière de la solution du problème de Dirichlet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (Marcel). - Sur les ensembles effilés, Bull. Sc. math., t. 68, 1944, p. 12-36.

[2] BRELOT (Marcel). - Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 24, 1945, p. 1-32.

[3] BRELOT (Marcel). - Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, Ann. Univ. Grenoble, Section Math. Phys., t. 23, 1948, p. 113-138.

[4] BRELOT (Marcel). - Le problème de Dirichlet, Axiomatique et frontière de Martin, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 35, 1956, p. 297-335.

[5] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 3, 1951, p. 199-263.

[6] CHOQUET (Gustave). - Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 555-557.

[7] CHOQUET (Gustave). - Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 699-702.

[8] CHOQUET (Gustave). - Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 736-737.

[9] LELONG-FERRAND (Mme). - Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 66, 1949, p. 125-159.

[10] MARTIN (Robert S.). - Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 49, 1941, p. 137-172.