G. PISIER

Remarques sur un résultat non publié de B. Maurey

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 5, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

REMARQUES SUR UN RESULTAT NON PUBLIE DE B. MAUREY

G. PISIER

Exposé No V

24 Avril 1981

Soit E un espace de Banach de dimension finie. On note $n(E)$ le plus petit entier n tel que E est 2-isomorphe[◆] à un sous-espace de ℓ_n^∞.

Le principal résultat de cet exposé est le théorème suivant, dû à Maurey, et non publié :

<u>Théorème 1</u> : Soit X un espace de Banach de dimension infinie. On a alors l'alternative suivante :

i) ou bien, pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, ℓ_n^∞ est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un quotient de X. (Cela revient à dire que X' contient des ℓ_n^1 uniformément, ou encore que X n'est pas B-convexe).

ii) Ou bien, il existe $\delta > 0$ tel que tout quotient de dimension finie de X, noté E, vérifie

$$n(E) \geq 2^{\delta \dim E} .$$

Pour mieux comprendre la signification de ce résultat, faisons d'abord quelques rappels et introduisons des notations :

Soit X un espace de Banach. On notera B_X sa boule unité. Soit $K \subset X$ une partie relativement compacte de X. On notera $N(K,\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules de rayon ε dans X dont la réunion recouvre K.

Rappelons un résultat bien connu : pour tout espace E de dimension n et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$(1) \qquad \frac{1}{\varepsilon^n} \leq N(B_E,\varepsilon) \leq \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n .$$

(Ce résultat se démontre aisément par des considérations de volume n-dimensionnel.)

Il en résulte immédiatement que l'on a, pour E arbitraire :

$$(2) \qquad n(E) \leq 5^n .$$

En effet, d'après (1), on peut recouvrir $B_{E'}$ par au plus 5^n boules de rayon 1/2 dans E'. Soit $\{\xi_i \mid 1 \leq i \leq 5^n\}$ l'ensemble des centres

---

◆ 2 ne joue aucun rôle particulier. On pourrait prendre $(1+\varepsilon)$ à la place, avec $\varepsilon > 0$, et étudier la dépendance en ε. Nous ne le ferons pas.

de ces boules. Soit maintenant $x \in E$, soit $\xi \in B_{E'}$ tel que $\langle \xi, x\rangle = \|x\|$, et soit ξ_i tel que $\|\xi - \xi_i\| < \frac{1}{2}$. On a :

$$\|x\| = \langle \xi, x\rangle = \langle \xi_i, x\rangle + \langle \xi - \xi_i, x\rangle$$

$$\leq \operatorname{Sup}_i |\langle \xi_i, x\rangle| + \frac{1}{2}\|x\| \quad ,$$

d'où
$$\sup_i |\langle \xi_i, x\rangle| \leq \|x\| \leq 2 \sup |\langle \xi_i, x\rangle| \quad ,$$

ce qui établit (2).

Le théorème 1 montre que l'estimation (2) donne, le plus souvent, le meilleur ordre de grandeur de $n(E)$.

Si l'on pose $\lambda_n^X = \inf\{n(E)$, E quotient de X, $\dim E = n\}$, le théorème 1 dit que <u>seuls les cas extrêmes se produisent</u>. Ou bien $\lambda_n = n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ou bien

$$\inf_n \frac{\operatorname{Log} \lambda_n}{n} > 0 \quad .$$

Donc, λ_n est ou bien le plus petit possible, ou bien le plus grand possible asymptotiquement. On a donc là une <u>dichotomie</u> tout-à-fait remarquable.

Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> (Maurey) : Soit E un espace de type p, soit m un entier et $u : \ell_m^1 \to E$ un opérateur. Notons K l'image de la boule unité de ℓ_m^1. On a alors pour tout entier k :

$$N(K, 2k^{-1/p'}\, T_p(E)\, \|u\|) \leq (2m)^k \quad , \quad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad ,$$

où l'on a noté $T_p(E)$ la constante de type p de E (cf. exposé II).

<u>Démonstration</u> : On sait (cf. [11], exposé No VII) que si E est de type p, on a, pour toute suite $Z_1, \ldots, Z_k, \ldots$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E :

$$(3) \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{k} Z_i - \mathbb{E} Z_i\right\| \leq 2\, T_p(E) \Big(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\|Z_i\|^p\Big)^{1/p} \quad .$$

Notons (e_j) les vecteurs de base de ℓ_m^1 et posons $x_j = u(e_j)$.

Soit A l'ensemble $\{\pm x_j \, , \, 1 \leq j \leq m\}$.

On a $\mathrm{card}(A) \leq 2m$, et il est clair que

$$(4) \qquad K = \mathrm{conv}(A) \quad .$$

Soit $x \in K$. D'après (4), il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans A telle que $\mathbb{E}\, Z = x$. Soient $Z_1, Z_2, \dots$ une suite de copies indendantes de Z. On a d'après (3) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,, \qquad \mathbb{E}\, \Big\| \sum_1^k Z_i - kx \Big\| \leq 2\ T_p(E)\ k^{1/p} (\mathbb{E}\, \|Z\|^p)^{1/p}$$

$$\leq 2\ \|u\|\ T_p(E)\ k^{1/p} \quad .$$

Il existe donc au moins $(z_1, \dots, z_k) \in A^k$ tel que :

$$(5) \qquad \Big\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i - x \Big\| \leq 2\ T_p(E)\ k^{-1/p'} \|u\| \, .$$

Posons $\delta_k = 2\ \|u\|\ T_p(E)\ k^{-1/p'}$. Soit S_k l'ensemble des points de la forme $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i$ avec $(z_i) \in A^k$. On a trivialement $\mathrm{card}(S_k) \leq \mathrm{card}(A^k) \leq (2m)^k$, et d'après (5), la réunion des boules de rayon δ_k centrées en S_k recouvrent K.
Par conséquent : $N(K, \delta_k) \leq \mathrm{card}(S_k) \leq (2m)^k$, ce qui est le résultat annoncé.

<u>Remarque</u> : On peut reformuler le résultat précédent d'une manière un peu plus générale dans le langage des <u>nombres d'entropie</u> (cf. [6]) :
Soit $u : X \to Y$ un opérateur compact entre espaces de Banach, on pose $e_n(u) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid N(u(B_X), \varepsilon) \leq 2^n\}$. La démonstration précédente (à peine modifiée) donne alors : pour tout opérateur $u : \ell^1_m \to E$ on a :

$$\forall\, n \geq k\ \mathrm{Log}_2(2m) \qquad e_n(u) \leq 2\ T_p(u)\ k^{-1/p'} \quad ,$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$\sup_{n \geq 1} n^{1/p'}\ e_n(u) \leq \alpha_p\ T_p(u)\ (\mathrm{Log}\ m + 1)^{1/p'}$$

où α_p est une constante ne dépendant que de p.

Le lemme 2 a pour conséquence immédiate :

<u>Théorème 3</u> (Maurey) : Soit E un espace de Banach de dimension n. On a :

(6) $$\mathrm{Log}(n(E)+1) \geq \delta_p (T_p(E'))^{-p'}\, n$$

où $\delta_p > 0$ est une constante ne dépendant que de p.

<u>Démonstration</u> : Posons $m = n(E)$. Il existe alors un plongement $j : E \to \ell^\infty_m$ tel que $\forall\, x \in E$, $\|x\| \leq \|j(x)\| \leq 2\,\|x\|$. En appliquant le lemme 2 à $j' : \ell^1_m \to E'$, on trouve, (puisque $j'(B_{\ell^1_m}) \supset B_{E'}$ et $\|j'\| \leq 2$) :

$$N(B_{E'}, 4k^{-1/p'}\, T_p(E')) \leq (2m)^k$$

d'où, d'après (1) :

(7) $$(4k^{-1/p'}\, T_p(E'))^{-n} \leq (2m)^k \quad .$$

Il est clair que l'on peut trouver un entier k_o assez grand pour que $4k_o^{-1/p'}\, T_p(E') < 1/2$ mais, néanmoins tel que $k_o \leq \alpha_p\, T_p(E')^{p'}$ où α_p est une constante ne dépendant que de p. On déduit donc immédiatement de (7) :

$$2^n \leq (2m)^{k_o}$$

d'où $$\mathrm{Log}_2\, m \geq \frac{n}{k_o} - 1 \quad ,$$

l'inégalité (6) en résulte immédiatement.

Nous pouvons maintenant compléter la

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Dire que (i) est en défaut revient à dire que X' ne contient pas de ℓ^1_n uniformément ; il en résulte (cf. [11], exposé VII) que X' (et donc tout sous-espace de X') est de type p pour un $p > 1$. Soit alors E un quotient de X de dimension n. D'après le théorème 3, on a : (puisque $T_p(E') \leq T_p(X')$)

$$\mathrm{Log}(n(E)+1) \geq \delta_p (T_p(X'))^{-p'}\, n$$

on a donc bien (ii). cqfd.

La formulation du théorème 1 suggère naturellement la question suivante : Y-a-t-il un analogue du théorème 1 si l'on remplace les quotients de X par ses sous-espaces ?
La conjecture suivante nous semble plausible.

<u>Conjecture 4</u> : Le théorème 1 reste valable si l'on remplace dans (i) et dans (ii) le mot "quotient" par "sous-espace".

Cette conjecture équivaut (d'après des résultats connus, cf. [5]) à la suivante :

<u>Conjecture 5</u> : Soit $q < \infty$. Si un Banach X est de cotype q alors il existe une constante $\delta > 0$ ne dépendant que de q et de la constante de cotype q de X telle que :

$$\forall\ E \subset X \qquad n(E) \geq 2^{\delta \dim E} .$$

On peut remarquer que dans le cas particulier $q = 2$, la conjecture précédente est vraie, car d'après [2], on sait que si X est de cotype 2, il existe $\eta > 0$ ne dépendant que de la constante de cotype 2 de X vérifiant la propriété suivante : pour tout $E \subset X$, il existe $F \subset E$ tel que $d(F, \ell^2_{\dim F}) \leq 2$ et $\dim F \geq \eta \dim E$. Or il est bien connu que si $d(F, \ell^2_{\dim F}) \leq 2$, alors on a nécessairement $n(F) \geq 2^{\delta' \dim F}$ où $\delta' > 0$ est une constante absolue (signalons d'ailleurs que cela découle de (6)). On a donc :

$$n(E) \geq n(F) \geq 2^{\delta' \eta \dim E} ,$$

ce qui est bien le résultat annoncé, mais seulement pour $q = 2$.
Si l'on applique l'argument précédent au cas d'un espace de cotype q, on trouve seulement une estimation du type :

$$\mathrm{Log}\ n(E) \geq \delta (\dim E)^{2/q} .$$

Mais, pour $q > 2$, il se trouve qu'on peut considérablement améliorer ce dernier résultat. En effet, on a :

<u>Théorème 6</u> : Soit E de dimension n et $q \geq 2$. On a :

$$\mathrm{Log}(n(E) + 1) \geq \alpha_q\, C_q(E)^{-q} \frac{n}{(\mathrm{Log}(n+1))^q} ,$$

où $\alpha_q > 0$ est une constante ne dépendant que de q.

Ce théorème résulte du théorème 3 et de la proposition suivante :

Proposition 7 [7] : Il existe une constante K telle que, pour tout espace de Banach E de dimension finie, on a :

(8) $$K(E) \leq K \operatorname{Log}(\dim E + 1) \quad .$$

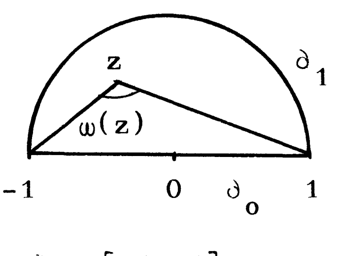
(Rappelons que K(E) est la "constante de K-convexité" de E définie à l'exposé II, définition 1.1.)

Nous pouvons en donner une démonstration relativement simple :

Démonstration : Nous reprenons les notations de l'exposé II, on pose $D = \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$, on note μ la probabilité uniforme sur D et (ε_n) les applications coordonnées sur $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$. Pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, on pose $w_A = \prod_{n\in A} \varepsilon_n$. On note R_k la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(D,\mu)$ engendré par les fonctions $\{w_A \mid |A| = k\}$.
Il nous suffit évidemment de démontrer la proposition 5 dans le cas d'un $\mathbb{C}$-espace de Banach E. Soit z complexe tel que $|z| \leq 1$. Posons

$$\tilde{T}(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k\right) \otimes \mathrm{Id}_E \quad .$$

On considère $\tilde{T}(z)$ comme un opérateur sur l'espace $L^2(D,\mu;E)$ (que l'on notera simplement $L^2(E)$).
On sait que : $\forall\, \varepsilon \in [-1,+1] \quad \|\tilde{T}(\varepsilon)\| \leq 1$.
Considérons le demi-disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \leq 1\}$.



Le bord de Δ est composé de $\partial_o = [-1,+1]$

et $\partial_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Soit P_z le noyau de Poisson du domaine Δ. Puisque $z \to \tilde{T}(z)$ est holomorphe sur $\mathring{\Delta}$, on peut écrire (formule de Poisson-Jensen) :

$\forall\ z \in \mathring{\Delta} \qquad \operatorname{Log} \|\widetilde{T}(z)\| \leq \int \operatorname{Log} \|\widetilde{T}(u)\|\ P_z(du)$

d'où :

(9) $$\|\widetilde{T}(z)\| \leq \left(\sup_{\varepsilon\in\partial_o} \|\widetilde{T}(\varepsilon)\|^{P_z(\partial_o)}\right)\left(\sup_{u\in\partial_1} \|\widetilde{T}(u)\|\right)^{P_z(\partial_1)} .$$

Soit n la dimension de E. D'après un résultat bien connu de F. John, on sait que :

$$d(E,\ell_n^2) \leq \sqrt{n} \quad \text{(cf. e.g. [13] exposé X),}$$

donc $$\sup_{u\in\partial_1} \|\widetilde{T}(u)\| \leq \sqrt{n} .$$

Posons $\theta(z) = P_z(\partial_1)$. On déduit donc de (9) :

(10) $$\|\widetilde{T}(z)\| \leq n^{\theta(z)/2} .$$

Il nous reste à évaluer $\theta(z)$. Pour cela, notons $\omega(z)$ l'angle sous lequel est vu le segment $[-1,+1]$ à partir du point z. Il est bien connu que $\omega(z)$ (et donc aussi $\pi - \omega(z)$) est une fonction harmonique dans $\mathring{\Delta}$ (cf. e.g. [14], p. 74), on a donc :

$$\pi - \omega(z) = \int (\pi - \omega(u))\ P_z(du) = \frac{\pi}{2}\ \theta(z)$$

d'où $$\theta(z) = \frac{2}{\pi}\ (\pi - \omega(z)) .$$

Notons que quand $|z| \to 0$, $|\theta(z)| \sim |z|$; on en déduit donc de (10) :

(11) $\forall\ z \in \Delta$ $$\|\widetilde{T}(z)\| \leq n^{\alpha|z|/2}$$

où $\alpha > 0$ est une constante numérique.
Comme $\|\widetilde{T}(z)\| = \|\widetilde{T}(-z)\|$, (11) reste valable sur tout le disque unité. Posons $\beta_n = (\operatorname{Log}(n+1))^{-1}$. On a :

$\forall\ z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = \beta_n \qquad \|\widetilde{T}(z)\| \leq e^{\alpha/2}$.

D'autre part :

(12) $$\beta_n(R_1 \otimes Id_E) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-it}\ \widetilde{T}(\beta_n\ e^{it})dt ,$$

d'où : $$\|R_1 \otimes Id_E\|\ \beta_n \leq e^{\alpha/2} ,$$

soit finalement : $K(E) \le e^{\alpha/2}(\mathrm{Log}(n+1))$, cqfd.

Remarque : Signalons que la preuve précédente montre plus précisément que $K(E) \le$ (constante) $\mathrm{Log}(d(E,\ell_n^2)+1)$.

Démonstration du théorème 6 : Rappelons (voir l'exposé II) que

$$(13) \qquad T_p(E') \le K(E)\, C_q(E) \quad \text{si } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad .$$

Le théorème 6 est alors une combinaison de (6), (13) et (8).

Remarque : Rappelons que nous conjecturons que, dans la situation de la proposition 5, on a en fait $K(E) \le K'(\mathrm{Log}(\dim E+1))^{1/2}$ avec K' indépendant de E. Dans le cas particulier des espaces à base inconditionnelle on peut effectivement vérifier cette conjecture :

Proposition 8 : Soit E un espace à base inconditionnelle, de constante 1, de dimension n. On a

$$K(E) \le K_1(\mathrm{Log}\ n+1)^{1/2}$$

où K_1 est une constante numérique.

Démonstration : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base 1-inconditionnelle de E. Là encore, on part de : $d(E,\ell_n^2) \le \sqrt{n}$ et on se place dans le cas complexe. On voit facilement que l'on peut trouver un "bon" isomorphisme avec ℓ_n^2 qui respecte la structure d'ordre : on montre aisément, en effet, qu'il existe des scalaires $\alpha_i > 0$ tel

$$\forall\, (x_i) \in \mathbb{C}^n \quad (\Sigma\, |x_i|^2\, \alpha_i)^{1/2} \le \|\sum_i^n x_i\, e_i\| \le \sqrt{n}\ (\Sigma\, |x_i|^2\, \alpha_i)^{1/2} \quad .$$

Posons $\|\sum_i^n x_i\, e_i\|_{E_1} = (\Sigma\, \alpha_i\, |x_i|^2)^{1/2}$ et soit E_θ l'espace obtenu par interpolation complexe entre E et E_1, $E_\theta = [E,E_1]_\theta$ (voir e.g. [13], exposé XVII). Notons simplement $\|\ \|_\theta$ la norme de E_θ . On a évidemment $\forall\, x \in E$

$$(14) \qquad \|x\|_\theta \le \|x\|_E \le \sqrt{n}^{\,\theta}\ \|x\|_\theta \quad .$$

D'autre part, soient p, q tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{\infty}+\frac{\theta}{2}$. On voit facilement par interpolation que :

$\forall\ x,y \in E$

$$(15) \qquad (\|x\|_\theta^q + \|y\|_\theta^q)^{1/q} \le \|\sum_1^n (|x_i|^q + |y_i|^q)^{1/q}\, e_i\|_\theta$$

et

$$(16) \qquad \|\sum_1^n (|x_i|^p + |y_i|^p)^{1/p}\, e_i\|_\theta \le (\|x\|_\theta^p + \|y\|_\theta^p)^{1/p} \quad .$$

Rappelons alors l'inégalité de W. Beckner qui est à la base de l'article [1] :

$\forall\ x,y \in \mathbb{C}$

$$(17) \qquad \left(\frac{|x + i\sqrt{p-1}\,y|^q + |x - i\sqrt{p-1}\,y|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{|x+y|^p + |x-y|^p}{2}\right)^{1/p} \quad .$$

On déduit facilement de (15), (16) et (17) que l'on a :

$\forall\ x,y \in E$

$$\left(\frac{\|x + i\sqrt{p-1}\,y\|_\theta^q + \|x - i\sqrt{p-1}\,y\|_\theta^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{\|x+y\|_\theta^p + \|x-y\|_\theta^p}{2}\right)^{1/p} \quad .$$

et, a fortiori, on a pour $z = \pm i\sqrt{p-1}$:

$$(18) \qquad \left(\frac{\|x+zy\|_\theta^2 + \|x-zy\|_\theta^2}{2}\right)^{1/2} \le \left(\frac{\|x+y\|_\theta^2 + \|x-y\|_\theta^2}{2}\right)^{1/2} \quad .$$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant (18) pour tous x, y dans E. $\mathcal{D}$ est évidemment convexe et on a trivialement $\mathcal{D} \supset [-1,+1]$, donc

$$(19) \qquad \mathcal{D} \supset \operatorname{conv}\{[-1,+1]\ ,\ \pm i\sqrt{p-1}\} \quad .$$

Posons $\beta(p) = \sin \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{p-1}$.

Notons que $\beta(p) \sim \sqrt{p-1}$ quand $p \to 1$.

On vérifie élémentairement que (19) entraîne :

$$\mathcal{D} \supset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \beta(p)\} \quad .$$

On voit alors facilement que si $z \in \mathcal{D}$, on a :

$$\|\widetilde{T}(z)\|_{L^2(E_\theta) \to L^2(E_\theta)} \le 1 \quad .$$

D'où, d'après la formule (12) :

$$\|R_1 \otimes Id_{E_\theta}\|_{L^2(E_\theta)\to L^2(E_\theta)} \leq \frac{1}{\beta(p)} ,$$

soit finalement d'après (14)

$$\|R_1 \otimes Id_E\|_{L^2(E)\to L^2(E)} \leq n^{\theta/2} \quad \beta(p)^{-1} \quad ,$$

soit (puisque $\beta(p) \sim \sqrt{p-1} \sim \frac{1}{\sqrt{q}}$ quand $\theta \to 0$) :

$$\leq A \; n^{\theta/2} \sqrt{q} = A \; n^{\theta/2} \sqrt{\frac{2}{\theta}} \quad ,$$

où A est une constante numérique.

On a donc, pour $\theta = \frac{1}{\operatorname{Log}(n+1)}$:

$$\|R_1 \otimes Id_E\|_{L^2(E)\to L^2(E)} \leq A\sqrt{2}\; (\operatorname{Log}(n+1))^{1/2} \sqrt{e} \quad . \qquad \text{cqfd.}$$

Remarque : La signification géométrique du théorème 1 est la suivante : Soit E un sous-espace de ℓ^∞_m. On va faire varier m et E. Si $\dim E \sim \log m$, on ne peut rien dire (en effet, d'après (2), E peut être à peu près n'importe quoi !).

Mais si, au contraire, la dimension de E est asymptotiquement plus grande que Log m (quand $m \to \infty$), alors E contient un sous-espace 2-isomorphe à $\ell^1_{k_m}$ où $k_m \to \infty$ quand $\frac{\dim E}{\operatorname{Log} m} \to \infty$.

La conjecture 5 revient à dire qu'en fait E contient alors un sous-espace 2-isomorphe à $\ell^\infty_{k_m}$ avec $k_m \to \infty$ quand $\frac{\dim E}{\operatorname{Log} m} \to \infty$.

Le théorème 6 montre que cette dernière possibilité se produit effectivement, mais sous la condition plus restrictive :

$$\forall\, q < \infty \qquad \frac{\dim E}{\operatorname{Log} m (\operatorname{Log}\operatorname{Log} m)^q} \longrightarrow \infty \quad .$$

Remarque : Soit G un groupe compact abélien et Λ une partie du groupe dual noté Γ. On note $C_\Lambda(G)$ le sous-espace de C(G) formé des fonctions à spectre dans Λ. On sait (cf. [12] exposé XIV ou bien [3]) que si C_Λ est de cotype 2 alors Λ est un ensemble de Sidon, i.e. $C_\Lambda \approx \ell^1$.

Motivé par le théorème 6, je conjecture que si C_Λ est de cotype q pour un $q < \infty$ alors Λ est un ensemble de Sidon. Il n'est pas difficile de voir que le théorème 6 donne des résultats dans cette direction ; par exemple, soit $A \subset \Gamma$ un ensemble de Sidon infini, et soit $\Lambda \subset A \times A \subset \Gamma \times \Gamma$; on peut montrer que si $C_\Lambda(G \times G)$ est de cotype q pour un $q < \infty$, alors Λ est nécessairement un ensemble $(1+\varepsilon)$-Sidon pour tout $\varepsilon > 0$ (au sens de [4] par exemple).

Si la conjecture 4 (ou si la conjecture 5) est correcte, alors il en résultera immédiatement une réponse affirmative à la conjecture ci-dessus dans le cas particulier des groupes $G = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_j)$ avec $\sup_j p_j < \infty$; en effet, on sait pour ces groupes que Λ est un ensemble de Sidon ssi : $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, A \subset \Lambda$ avec $|A| < \infty$, on a $\operatorname{Log} n(C_A(G)) \geq \delta\, |A|$ (cf. [9] § 3, pour plus de détails et de références).

Remarque : L'étude des nombres n(E) s'insère naturellement dans un contexte plus général. Soit E un espace de Banach soit p tel que $0 < p \leq \infty$, et soit u un opérateur de rang fini de E à valeurs dans un espace L^p. On peut définir le nombre $n_p(u)$ comme le plus petit entier m pour lequel l'opérateur u admet une factorisation $E \xrightarrow{v} \ell_m^p \xrightarrow{w} L^p$ avec $u = wv$ et $\|w\|\,\|v\| \leq 2$. Un cas particulièrement intéressant est celui où E est un sous-espace de dimension finie de L^p et où $u : E \to L^p$ est l'injection canonique (noter que, dans le cas $p = \infty$, on retrouve n(E) ; en effet, on a alors $n_\infty(u) = n(E)$). Dans le cas particulier $p = 1$, W.B. Johnson a démontré le résultat intéressant suivant (non publié) :

Soit n un entier, soit E_n le sous-espace de $L^1([0,1])$ engendré par les n premières fonctions de Rademacher $[r_1, \ldots, r_n]$, et soit $j_n : E_n \to L^1([0,1])$ l'injection canonique. On a alors la minoration :

$$n_1(j_n) \geq 2^{\delta n}$$

avec $\delta > 0$ indépendant de n.
Enfin, le lecteur notera que le cas $p = 2$ est trivial (pour $u : E \to L^2$, on a $n_2(u) = \operatorname{rang}(u)$).

Remarque : Soit E de dimension finie.
Il est clair que n(E) peut être aussi défini à l'aide des points extrémaux des corps convexes dans E' ; en effet, on voit facilement que l'on a :

$$n(E) = \inf\{\operatorname{card}(\operatorname{ext}(C))\}$$

où l'infimum porte sur tous les convexes fermés équilibrés $C \subset E'$ tels que $B_{E'} \subset C \subset 2B_{E'}$.
Ainsi, on peut aussi reformuler le théorème 1 de la manière suivante : soit $p > 1$, il existe un nombre $\delta = \delta(p, T_p(E)) > 0$ (ne dépendant que de $p > 1$ et $T_p(E)$) tel que le cardinal de l'ensemble des points extrémaux

de la boule de E' soit supérieur à $2^{\delta n}$.

REFERENCES

[1] W. Beckner, Inequalities in Fourier Analysis, Annals of Maths. 102 (1975) 159-182.

[2] T. Figiel, J. Lindenstrauss et V. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math. 139 (1977) 53-94.

[3] S. Kwapień et A. Pełczyński, Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian groups, Math. Nachr. 94 (1980) 303-340.

[4] J. Lopez et K. Ross, Sidon sets, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics No 13, M. Dekker, New York (1975).

[5] B. Maurey et G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.

[6] A. Pietsch, Operator ideals , Berlin, North Holland (1980).

[7] G. Pisier, Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un Hilbert, Annales de l'E.N.S. 13 (1980) 69-90.

[8] G. Pisier, Some applications of the complex method of interpolation to Banach lattices, Journal d'Analyse Math. de Jerusalem 35 (1979) 264-281.

[9] G. Pisier, De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon, Advances in Maths., Supplementary Studies, à paraître.

[10] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, Ecole Polytechnique, Paris.

[11] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique, Paris.

[12] Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977-78, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[13] Séminaire d'analyse fonctionnelle 1978-79, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[14] W.H.J. Fuchs, Topics in the theory of functions of one complex variable, Van Nostrand Math. Studies # 12, 1967.
