J. BOURGAIN

Unicité de certaines bases inconditionnelles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

UNICITE DE CERTAINES BASES INCONDITIONNELLES

J. BOURGAIN

(Université Libre de Bruxelles)

Exposé No IV

31 Janvier 1981

Il est bien connu que les espaces c_o, ℓ^1 et ℓ^2 ont une unique base inconditionnelle. Il est vraisemblable que si on ontroduit les classes $\mathfrak{X}_n$ en posant $\mathfrak{X}_1 = \{c_o, \ell^1, \ell^2\}$ et $\mathfrak{X}_{n+1}$ les espaces obtenus par sommes directes au sens c_o, ℓ^1, ℓ^2 des membres de $\mathfrak{X}_n$, on a l'unicité de la structure inconditionnelle pour tous ces espaces. Pourtant, même au niveau $\mathfrak{X}_2$, la question n'est pas encore complètement résolue. En usant essentiellement d'une technique de décomposition introduite dans [3], J. Lindenstrauss et L. Tzafriri ont résolu le problème affirmativement pour les espaces $\oplus_{c_o} \ell^2$ et $\oplus_{\ell^1} \ell^2$. Nous nous proposons ici de traiter le cas $\oplus_{c_o} \ell^1$. Donc

Théorème 1 : Les espaces $\oplus_{c_o} \ell^1$ et $\oplus_{\ell^1} c_o$ ont la propriété d'unicité de la structure inconditionnelle.

La démonstration du Th. 1 emploie entre autre la méthode des "produits" utilisée dans [1] afin de montrer que l'espace $\oplus_\infty L^1$ possède la propriété de Dunford-Pettis.
L'espace $\oplus_{c_o} \ell^1$ se comporte différemment de ℓ^1. Par exemple, il existe dans $\oplus_{c_o} \ell^1$ des sous-espaces hilbertiens n-dimensionnels complémentés de norme const. $\sqrt{\mathrm{Log}\ n}$, ce qui suggère que la démonstration du Th. 1 sera assez délicate. Mentionnons encore qu'une application plus quantitative de la même technique des "produits" permet de montrer qu'en fait $\sqrt{\mathrm{Log}\ n}$ donne la borne inférieure et donc que les sous-espaces $\ell^2(n)$ de $\oplus_{c_o} \ell^1$ obtenus dans [2] par un argument probabiliste sont les mieux complémentés → (J. Lindenstrauss).

Le résultat étant établi pour $\oplus_{c_o} \ell^1$, on l'obtient pour $\oplus_{\ell^1} c_o$ par dualité.

Nous allons utiliser le résultat intermédiaire suivant, qui se démontre comme dans le cas $\oplus_{c_o} \ell^2$ (voir [3], lemme 2).

Lemme 1 : Soit $(\xi_i)_{i=1,2,\dots}$ une base inconditionnelle de $\oplus_{c_o} \ell^1$. Il existe alors $\delta > 0$ et une partition (D_r) des entiers positifs telle que

(i) la partition donne une décomposition au sens c_o, c-à-d.

$$\|\Sigma' \; x_r\| \sim \sup_r \|x_r\| \quad \text{si} \quad x_r \in [\xi_i \; ; \; i \in D_r] \quad .$$

(ii) Pour tout r, il existe une coordonnée $k = k_r$ telle que

$$\|\xi_i(k)\|_1 \geq \delta \quad \text{pour } i \in D_r \quad .$$

Afin de terminer la démonstration, il nous reste à montrer que les espaces $[\xi_i \; ; \; i \in D_r]$ sont uniformément isomorphes à $\ell^1(D_r)$. Ceci sera une conséquence du fait suivant

<u>Lemme 2</u> : Soit $\delta > 0$ et (F_i) une suite inconditionnelle dans $\oplus_\infty L^1$ telle que

1. $[F_i, \; i = 1,2,\dots]$ est complémenté dans $\oplus_\infty L^1$ par une projection P
2. $\|\Sigma \; a_i \; F_i\| \geq \delta(\Sigma \; |a_i|^2)^{1/2}$ pour toute suite scalaire (a_i).

Alors (F_i) est une suite ℓ^1.

<u>Remarque</u> : Sous "inconditionnel" nous entendons "K-inconditionnel" pour une constante $K < \infty$. Dans le lemme 2, la constante d'équivalence ne dépend que de δ, K et $\|P\|$. On peut aussi formuler le lemme pour des suites finies.

Soit (G_i) la suite image par P^* de la base duale de (F_i). Donc

3. $\langle F_i, G_j \rangle = \delta_{ij}$
4. $\|F\| \sim \sup\limits_{\|G\| \leq 1} \langle F, G \rangle$ pour $F \in [F_i]$ et $G \in [G_i]$.

A tout $F = \Sigma \; a_i \; F_i$ de $[F_i]$ nous associions la "fonction carrée"

$$S(F) = (\Sigma \; a_i^2 \; F_i^2)^{1/2}$$

ce qui est à nouveau un élément de $\oplus_\infty L^1$.
De même pour les éléments G de $[G_i] \subset \oplus_1 L^\infty$.

<u>Lemme 3</u> : $\|F\|_{1,\infty} \sim \|S(F)\|_{1,\infty}$ et $\|G\|_{\infty,1} \sim \|S(G)\|_{\infty,1}$.

<u>Démonstration</u> : On obtient $\gtrsim$ par inconditionnalité. D'autre part, par Cauchy-Schwarz et dualité

$$\langle F, G \rangle \leq \langle S(F), S(G) \rangle \leq \|S(F)\|_{1,\infty} \; \|S(G)\|_{1,\infty} \quad .$$

Si $F = (f^1, f^2, \dots)$ dans $\oplus_\infty L^1$, dénotons $[\![F]\!] = \|f^1\|_1, \|f^2\|_1, \dots)$. On introduit de manière analogue $[\![G]\!]$ pour G dans $\oplus_1 L^\infty$.

<u>Lemme 4</u> : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M = M_\varepsilon < \infty$ et $\sigma = \sigma_\varepsilon$ dans ℓ^1_+, tel que $\|\sigma\|_1 \leq M$ et

$$\|[\![G]\!] - [\![G]\!] \wedge \sigma\|_1 < \varepsilon \quad \text{pour tout } G \in [G_i] \text{ tel que } \|G\| \leq 1 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Supposons l'énoncé faux. Par un argument standard, on obtient alors des sous-espaces $\ell^1(r)$ de $[G_i]$ complémentés dans $\oplus_1 L^\infty$ pour r arbitrairement grand. Donc, en dualisant, $[F_i]$ possèderait des sous-espaces ℓ^∞ de grande dimension. Nous allons montrer que cela n'est pas possible. Soit donc $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ dans $[F_i]$ tel que

$$\|\Sigma\, c_s\, \Phi_s\|_{1,\infty} \sim \max |c_s| \quad . \tag{*}$$

Soit pour tout $s = 1, \dots, r$

$$\Phi_s = \sum_i a(s)_i\, F_i$$

et considérons aussi un élément

$$\Psi_s = \sum_i b(s)_i\, G_i$$

de $[G_i]$, tel que

$$\|\Psi_s\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle \Phi_s, \Psi_s \rangle = \Sigma\, a(s)_i\, b(s)_i \sim \|\Phi_s\| \sim 1 \quad .$$

Choisissons $\rho > 0$ petit, et introduisons pour $s = 1, \dots r$ l'ensemble

$$A_s = \{k = 1, 2, \dots \;;\; \|S(\Phi_s)^k\|_1 > \rho\} \quad ,$$

où $.^k$ dénote la k-ième composante.
Alors

$$1 \sim \sum_i a(s)_i\, b(s)_i \sum_{k \in A_s} \langle F_i^k, G_i^k \rangle + \sum_{k \notin A_s} \sum_i a(s)_i\, b(s)_i\, \langle F_i^k, G_i^k \rangle$$

et, par Cauchy-Schwarz, le deuxième terme est dominé par

$$\sum_{k\notin A_s} \langle S(\Phi_s)^k, S(\Psi_s)^k\rangle \leq \rho \sum \|S(\Psi_s)^k\|_\infty = \rho \|S(\Psi_s)\|_{\infty,1} \leq \rho \quad .$$

D'autre part, on a aussi $\Sigma\, |a(s)_i|\, |b(s)_i| \lesssim 1$ par inconditionnalité. Donc, il existe i_s tel que

$$\sum_{k\in A_s} \|G^k_{i_s}\|_\infty \geq \sum_{k\in A_s} \langle F^k_{i_s}, G^k_{i_s}\rangle > \rho' \tag{**}$$

où $\rho' > 0$ est une constante.

Utilisons maintenant le fait que $\Phi_1, \ldots \Phi_r$ est une base ℓ^∞. On déduit de (*) que

$$\int \|S(\Sigma\, \varepsilon_s(\omega)\, \Phi_s)\|_{1,\infty}\, d\omega \lesssim 1 \quad .$$

Puisque

$$\int S(\Sigma\, \varepsilon_s(\omega)\, \Phi_s)\, d\omega \sim (\Sigma\, S(\Phi_s)^2)^{1/2} \quad ,$$

on trouve pour toute composante k

$$\sum_s \|S(\Phi_s)^k\|_1^2 \lesssim 1$$

ce qui montre que

$$\rho^2 \operatorname{card} \{s = 1, \ldots, r \,;\, k \in A_s\} \lesssim 1 \quad . \tag{***}$$

Une dualisation de (2) dans l'énoncé du Lemme 2 donne que

$$\|\sum_{s=1}^r G_{i_s}\|_{\infty,1} \lesssim \sqrt{r} \quad .$$

Mais, en usant de (**) et (***)

$$\begin{aligned}
\|S(\sum_s G_{i_s})\|_{\infty,1} &= \sum_k \|S(\sum_s G_{i_s})^k\|_\infty \\
&\geq \rho^2 \sum_{t=1}^r \sum_{k\in A_t} \|S(\sum_s G_{i_s})^k\|_\infty \\
&\geq \rho^2 \sum_{t=1}^r \sum_{k\in A_t} \|G^k_{i_t}\|_\infty \geq r\, \rho^2\, \rho' \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui mène à une contradiction pour $r \to \infty$.

<u>Lemme 5</u> : $[F_i]$ se plonge dans L^1 et est donc de cotype 2.

<u>Démonstration</u> : Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et soient M et σ comme dans le lemme 4. Fixons $F \in [F_i]$ et $G \in [G_i]$ tel que $\|G\| = 1$ et $<F,G> \sim \|F\|$. Si $F = (f^1, f^2, \dots)$ et $G = (g^1, g^2, \dots)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|F\| &\sim \Sigma <f^k, g^k> \\
&\leq \Sigma \|f^k\|_1 \|g^k\|_\infty \\
&\leq \Sigma \sigma_k \|f^k\|_1 + \|[\![G]\!] - [\![G]\!] \wedge \sigma\|_1 \|F\| \\
&\leq \Sigma \sigma_k \|f^k\|_1 + \varepsilon \|F\| \quad .
\end{aligned}$$

L'opérateur $T : \oplus_\infty L^1 \to \oplus_1 L^1$ défini par $T(F) = (\sigma_1 f^1, \sigma_2 f^2, \dots)$ est de norme $\|\sigma\|_1$ et induit un isomorphisme sur $[F_i]$.

Le résultat suivant est un corollaire immédiat du lemme 5.

<u>Lemme 6</u> : $\|\Sigma \Phi_s\|_{1,\infty} \gtrsim (\Sigma \|\Phi_s\|^2)^{1/2}$

$\|\Sigma \Psi_s\|_{\infty,1} \lesssim (\Sigma \|\Psi_s\|^2)^{1/2}$

pour toutes bloc-sous-suites (Φ_s) de (F_i) et (Ψ_s) de (G_i).

Notre but suivant est d'améliorer les inégalités du Lemme 6. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant (basé sur la technique des "produits") et qui est essentiellement démontré dans [1].

<u>Lemme 7</u> : A tout $B < \infty$ et $\tau > 0$ correspond une fonction $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\lim_{r\to\infty} \gamma(r) = \infty$ et la propriété suivante est satisfaite :

Si $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ dans $\oplus_\infty L^1$ et $\Psi_1, \dots \Psi_r$ dans $\oplus_1 L^\infty$ sont tels que

1. $<\Phi_s, \Psi_s> = 1$
2. $\|\Phi_s\| \leq 1$
3. $\|\Sigma c_s \psi_s\| \leq B(\Sigma c_s^2)^{1/2}$ pour tous scalaires (c_s) ,

il existe une partie D de $\{1,2,\dots,r\}$ tel que card $(D) > \gamma(r)$ et $\|\sum_{s\in D} \Phi_s\| > (\text{card } D)^{1-\tau}$.

Lemme 8 : Il existe $1 < p < 2$ tel que

$$\|\Sigma\, \Phi_s\| \gtrsim (\Sigma\, \|\Phi_s\|^p)^{1/p}$$

$$\|\Sigma\, \Psi_s\| \lesssim (\Sigma\, \|\Psi_s\|^q)^{1/q} \qquad (q = p') \quad .$$

Démonstration : Il suffit de montrer la première inégalité puisque la deuxième s'obtient par dualité. Celle-ci résultera des lemmes 6 et 7 par des arguments standard.
Si (Φ_s) est une bloc-sous-suite normalisée de (F_i), on peut trouver une bloc-sous-suite (Ψ_s) de (G_i) telle que $\langle \Phi_s, \Psi_s \rangle = 1 \sim \|\Psi_s\|$.
La condition (3) du lemme 7 est réalisée par (2) du lemme 6 pour une certaine constante $B < \infty$. Soit $\tau = 1/4$ et $\gamma = \gamma_{B,\tau}$ comme dans le Lemme 7.
On obtient donc une sous-famille $(\Phi_s)_{s \in D}$ où

$$\text{card } (D) \geq \gamma(r) \quad \text{et} \quad \|\sum_D \Phi_s\|_{1,\infty} \geq \text{card } (D)^{3/4} \quad .$$

Choisissons un entier t suffisamment grand et $k > 0$ tel que

$$\gamma(t/2)^{1/4} >> t^k \quad .$$

Supposons maintenant que $(\Phi_s)_{1 \leq s \leq t}$ est une bloc-suite de (F_i) et $\|\Phi_s\| \geq \lambda$ pour tout $s = 1,\dots,t$. Par exhaustion, on peut introduire des parties disjointes S_π de $\{1,2,\dots,t\}$ telles que

$$\text{card } (\bigcup_\pi S_\pi) \geq t/2$$

et pour tout π

$$\text{card } S_\pi \geq \gamma(t/2) \quad \text{et} \quad \|\sum_{S_\pi} \Phi_s\| \geq (\text{card } S_\pi)^{3/4}\, \lambda \quad .$$

On trouve en appliquant le lemme 6

$$\|\sum_{s=1}^{1} \Phi_s\| > (\sum_\pi \|\sum_{S_\pi} \Phi_s\|^2)^{1/2} \geq \gamma(t/2)^{1/4}\, (t/2)^{1/2}\, \lambda$$

et donc

$$\|\sum_{s=1}^{t} \Phi_s\| > t^{1/2 + k}\, \lambda \quad .$$

L'itération de cette minoration donne

$$\Big\| \sum_{s=1}^{t^m} \Phi_s \Big\| > t^{m(1/2+k)} \lambda \quad .$$

On peut alors démontrer l'inégalité pour tout $p > \frac{2}{1+2k}$ en décomposant une suite (Φ_s) abstraite en ces parties

$$S_x = \{s = 1,2,\dots \; ; \; 2^{-x-1}(\Sigma \|\Phi\|^p)^{1/p} < \|\Phi_s\| \le 2^{-x} (\Sigma \|\Phi_s\|^p)^{1/p}\}$$

pour $k = 0,1,2,\dots$

Remarque : Le raisonnement précédent permet d'obtenir le lemme 8 pour n'importe quel $p > 1$, ce qui ne termine pourtant pas la démonstration du lemme 2.

Fin de la démonstration du lemme 2 : Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et M et σ comme dans le lemme 4. Nous remplaçons chaque G_i par un $H_i \in \oplus_1 L^\infty$ tel que

1. $\|G_i - H_i\|_{\infty,1} < \varepsilon$
2. $|G_i| \ge |H_i|$
3. $[\![H_i]\!] \le \sigma$

pour tout i,
($| \ |$ dénote la valeur absolue dans le réticulé).

On remarque que $\|\max_i |H_i|\|_{\infty,1} = \|\max_i [\![H_i]\!]\|_1 \le \|\sigma\|_1 \le M.$

Nous introduisons ensuite un réarrangement et une partition $S_1, S_2, \dots, S_r$ de $\{1,2,\dots,n\}$ (choisissant n arbitrairement grand) de telle manière que

4. Si $s = 1,\dots,r$ et $i \in S_s$, on a $\langle |F_i| , \max_{j\in S_s, j<i} |H_j| \rangle < \frac{1}{2}$.

5. Si $1 \le s < t \le r$ et $i \in S_t$, alors $\langle |F_i| , \max_{j\in S_s} |H_j| \rangle \ge \frac{1}{2}$.

La construction de cette partition est tout à fait directe.
Montrons que pour s fixé

$$\Big\| \sum_{S_s} a_i F_i \Big\| > \sum_{S_s} |a_i| \quad . \tag{*}$$

On obtient en effet par (4) et (1)

$$\|\sum_{S_s} a_i F_i\| \sim \|S(\sum a_i F_i)\|_{1,\infty}$$

$$\gtrsim \langle S(\sum a_i F_i), \max_{S_s} |H_i|\rangle$$

$$\geq \sum_{i\in S_s} |a_i| \langle |F_i|, |H_i| - \max_{j\in S_s, j<i} |H_j|\rangle$$

$$\geq \sum_{S_s} |a_i| \langle F_i, H_i\rangle - \frac{1}{2} \sum_{S_s} |a_i|$$

$$\geq (1 - \frac{1}{2} - \varepsilon) \sum |a_i| \quad .$$

Il nous reste maintenant à obtenir une borne sur r.
D'abord, en dualisant (*), on trouve pour $s = 1,\ldots,r$

$$\|\sum_{S_s} b_i G_i\|_{\infty,1} \lesssim \max |b_i| \quad ,$$

d'où

$$\|\Psi_s\|_{\infty,1} \lesssim 1 \quad \text{en posant } \Psi_s = \sum_{S_s} G_i \quad .$$

Il découle alors du lemme 8 que

$$\|\sum_{i=1}^{n} G_i\|_{\infty,1} = \|\sum_{s=1}^{n} \Psi_s\|_{\infty,1} \lesssim r^{\frac{1}{q}} \quad .$$

Choisissons $i^* \in S_r$. Alors, par (5)

$$\frac{r-1}{2} \leq \langle |F_{i^*}|, \sum_{s=1}^{r-1} \max_{j\in S_s} |H_j|\rangle$$

$$\leq \sqrt{r} \langle |F_{i^*}|, (\sum_i |H_i|^2)^{1/2}\rangle$$

$$\leq \sqrt{r} \|(\sum |G_i|^2)^{1/2}\|_{\infty,1} \lesssim r^{\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \quad .$$

Puisque $q > 2$, on obtient une majoration de r.

REFERENCES

[1] J. Bourgain, On the Dunford-Pettis property, Proc. A.M.S., à paraître.

[2] T. Figiel, J. Lindenstrauss et V. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math. 139 (1977) 53-94.

[3] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, On the isomorphic classification of injective Banach lattices, Advances in Math. (Supplementary Studies) 1981, à paraître.
