Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. Bourgain

Nouvelles propriétés des espaces L^1/H_0^1 et H^∞

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE

D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1980-1981

NOUVELLES PROPRIETES DES ESPACES L^1/H_0^1 ET H^∞

J. BOURGAIN

(Université Libre de Bruxelles)

Exposé No III

31 Janvier 1981

§ 1. INTRODUCTION.

On dénote π le cercle et m la mesure de Haar.

Soit H_0^1 l'espace des fonctions intégrables f sur π telles que $\hat{f}(n) = 0$ pour $n \leq 0$. On considère l'application quotient $q : L^1 \to L^1/H_0^1$. A tout x de L^1/H_0^1 correspond un unique élément f de L^1 tel que $q(f) = x$ et $\|f\| = \|x\|$. Cette propriété définit un relèvement canonique $\sigma : L^1/H_0^1 \rightsquigarrow L^1$. L'application σ a plusieurs propriétés remarquables que le lecteur trouvera dans [1]. En particulier, si A est relativement faiblement compact dans L^1/H_0^1, il en est de même pour $\sigma(A)$.

Nous présenterons une version locale de ce résultat. Celle-ci donnera de nouvelles informations concernant la structure fini-dimensionnelle des espaces de fonctions analytiques ainsi que certaines propriétés topologiques de H^∞ et duaux. Enfin, on obtiendra une caractérisation assez surprenante des suites d'interpolation dans le disque.

§ 2. UNE PROPRIETE DE RELEVEMENT.

Nous avons démontré le résultat suivant

<u>Théorème 1</u> : Pour $\delta > 0$ donné, il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $f_1, \dots, f_n$ dans $L^1(\pi)$ vérifient les conditions suivantes

(i) $\|q(f_m)\| > (1-\delta)\, \|f_m\|_1$ pour $1 \leq m \leq r$

(ii) $\int \max_m \lambda_m \, |f_m| \geq 4\delta \, \Sigma \, \lambda_m \, \|f_m\|_1$ pour tout $\lambda_m \geq 0$,

il existe des fonctions $g_1, \dots, g_n$ dans H^∞ telles que

(iii) $|g_1| + |g_2| + \dots + |g_n| \leq 1$

(iv) $\langle f_m, g_m \rangle = \int f_m \, g_m > \delta_1 \, \|f_m\|_1$ pour tout $m = 1, \dots, n$.

On peut reformuler (ii) en disant que les f_m ont une masse $4\delta \, \|f_m\|_1$ sur des ensembles disjoints de π.

Le Th. 1 entraîne clairement la propriété suivante de relèvement

<u>Corollaire</u> : A tout $\delta > 0$ correspond $\delta_1 > 0$ tel que si $x_1, \ldots, x_n$ sont de norme 1 dans L^1/H^1_0 et

$$\int \|\Sigma\, \varepsilon_k(\omega)\, x_k\|\, d\omega \leq \delta_1\, n \quad ,$$

alors

$$\int \|\Sigma\, \varepsilon_k(\omega)\, \sigma(\alpha_k)\|_1\, d\omega \leq \delta n \quad ,$$

(ε_k = Rademacher).

La démonstration du Th. 1 est assez longue et le lecteur la trouvera dans [6] ainsi que la plupart des autres résultats présentés ici.

Si (i) et (ii) sont vérifiées, on établit une inégalité

$$\int \max_m |\lambda_m\, f_m + h_m| \geq \delta_1\, \Sigma\, \lambda_m\, \|f_m\|_1 \tag{*}$$

pour tout $\lambda_m \geq 0$ et $h_m \in H^1_0$.
Les fonctions $g_1, \ldots, g_n$ s'obtiènnent alors comme élément de $(H^\infty)_{\ell^1(n)}$ par un argument de dualité.
L'ingrédient central dans la démonstration de (*) est une propriété d'extraction

<u>Proposition 1</u> : Pour tout $\tau > 0$, il existe $C_\tau < \infty$ tel que si $F_1, \ldots, F_n$ sont des fonctions intégrables positives sur π à supports $S_1, \ldots, S_n$ et

$$w = \|\Sigma\, S_m\|_\infty$$

on peut trouver pour >0 une partie D de $\{1, \ldots, n\}$ et des fonctions H^∞ $(g_m)_{m\in D}$ tel que

(i) $\quad \sum_D \|F_m\|_1 \geq C_\tau^{-1}\, (\delta\, w^{-1})^{1+\tau}\, \Sigma\, \|F_m\|_1$

(ii) $\quad \sum_D |g_m| \leq C_\tau$

(iii) $\quad \sum_D \int F_m\, |g_m - 1| \leq \delta \sum_D \|F_m\|_1$.

En fait, on n'utilise la Prop. 1 que pour une valeur de τ quelconque. L'énoncé plus précis a pourtant son intérêt dans l'étude de questions plus quantitatives, comme le problème du cotype de L^1/H^1_0.

Nous nous bornerons ici à mentionner qu'en utilisant directement la Prop. 1 on peut montrer que si $q > 4$, alors L^1/H^1_0 est de cotype q.

Nous terminerons cette section par quelques indications et lemmes concernant la démonstration de la Prop. 1. Les fonctions H^∞ s'obtiennent par une méthode constructive. Le point de départ est le résultat suivant, semblable à un lemme bien connu de Havin [1] :

Lemme 1 : Soit A une partie mesurable de π et fixons $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$. Il existe alors une fonction φ dans H^∞ telle que

(i) $\|\varphi\|_\infty \leq 4$

(ii) $|\varphi(2) - 1| < \varepsilon$ pour tout $z \in A$

(iii) $\|\varphi\|_1 \leq \text{const}_\tau \ \varepsilon^{-\tau} \ m(A)$.

Démonstration : Posons $r = [\tau^{-1}] + 1$, $\rho = 1 - \varepsilon^{\tau/2}$ et considérons la fonction de $\rho\, \chi_A$. Soit f la fonction H^∞ définie sur le disque par la formule

$$f(z) = \exp \int_\pi \text{Log}(1-\alpha) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} m(d\theta) \qquad .$$

La limite radiale est alors la fonction $f = (1-\alpha)\, e^{i\beta}$ où β est la fonction conjuguée $\mathcal{H}(\text{Log}(1-\alpha))$ de $\text{Log}(1-\alpha)$.

Puisque

$$|\text{Log}(1-\alpha)| \leq (1-\rho)^{-1}\, \alpha = \varepsilon^{-\tau/2}\, \alpha \quad ,$$

on obtient

$$\|\beta\|_2 \leq \|\text{Log}(1-\alpha)\|_2 \leq \varepsilon^{-\tau/2}\, \|\alpha\|_2 \leq \varepsilon^{-\tau/2}\, m(A)^{1/2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|1 - f\|_2 &= \|\{1 + |f|^2 - 2\,\text{Re} f\}^{1/2}\|_2 \\ &= \|\{\alpha^2 + 2(1-\alpha)(1-\cos\beta)\}^{1/2}\|_2 \\ &\leq \|\alpha\|_2 + 2\, \|\sin \beta/2\|_2 \\ &\leq \|\alpha\|_2 + \|\beta\|_2 \leq 2\, \varepsilon^{-\tau/2}\, m(A)^{1/2} \quad . \end{aligned}$$

Prenons

$$\varphi = (1 - f^{2r})^2 \quad .$$

Puisque $|f| \leq 1$, la condition (i) est satisfaite.
Pour $z \in 1$, on a

$$|f(z)| = 1 - \alpha(z) = \varepsilon^{\tau/2}$$

et donc

$$|1 - \varphi(z)| = |f(z)|^{2r} \; |2 - f(z)^{2r}| \leq 3 \; |f(z)|^{2r} = 3 \; \varepsilon^{\tau r} \leq 3\varepsilon \quad .$$

Finalement, puisque

$$|\varphi| \leq 4r^2 \; |1 - f|^2$$

on trouve

$$\int |\varphi| \leq 4r^2 \; \|1 - f\|_2^2 \leq 16 \; r^2 \; \varepsilon^{-\tau} \; m(A) = \mathrm{const}_\tau \; \varepsilon^{-\tau} \; m(A) \quad ,$$

Q.E.D.

On obtient l'ensemble D de la Prop. 1 par un argument probabiliste. Un lemme central est le suivant :

<u>Lemme 2</u> : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties mesurables de π et dénotons $w = \|\sum_k A_k\|_\infty$. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs 0,1 et de moyenne $\varkappa > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$ fixés, il existe des fonctions H^∞ aléatoires $f_1^\omega, \ldots, f_n^\omega$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\quad \sum_k \gamma_k(\omega) \; |f_k^\omega| \leq 12 \quad$ pour tout ω

(ii) $\quad \int \{\sum_k \gamma_k(\omega) \int_{A_k} |f_k^\omega - 1|\} \, d\omega \leq \varkappa(\varepsilon + \mathrm{const}_\tau \; \varepsilon^{-\tau} \; W \varkappa) \sum_k m(A_k) \quad .$

<u>Démonstration</u> : Afin d'obtenir des fonctions f qui satisfont à (i), nous allons user d'une technique nouvelle. Considérons d'abord pour tout $k = 1, \ldots, n$ une fonction $\varphi_k \in H^\infty$ telle que

(iii) $\quad \|\varphi_k\|_\infty \leq 4$

(iv) $\quad |\varphi_k - 1| \leq \varepsilon \quad$ sur A_k .

(v) $\|\varphi_k\|_1 \leq \mathrm{const}_\tau\ \varepsilon^{-\tau}\ m(A_k)$,

ce qui est possible par le Lemme 1.
Ensuite on introduit les fonctions aléatoires suivantes

$$\alpha_k^\omega = \{1 + \sum_{\ell \neq k} \gamma_\ell(\omega)\ |\varphi_\ell|\}^{-1}$$

la fonction H^∞ à la limite radiale $\psi_k^\omega = \alpha_k^\omega\ e^{i\,\mathcal{H}(\mathrm{Log}\ \alpha_k^\omega)}$, la fonction H^∞ $f_k^\omega = [2\psi_k^\omega - (\psi_k^\omega)^2]\varphi_k$.

Puisque $|\psi_k^\omega| = \alpha_k^\omega \leq 1$, on a $|f_k^\omega| \leq 3\ \alpha_k^\omega\ |\varphi_k|$. D'où

$$\Sigma\ \gamma_k(\omega)\ |f_k^\omega| \leq 3\ \Sigma\ \gamma_k(\omega)\ |\varphi_k|\ \alpha_k^\omega \leq 12$$

par la définition des α_k^ω.
Passons maintenant à la vérification de (ii). Clairement

$$|f_k^\omega - 1| \leq |\varphi_k - 1| + 4\ |\psi_k^\omega - 1|^2$$

et

$$|\psi_k^\omega - 1| \leq |\alpha_k^\omega - 1| + |\mathcal{H}(\mathrm{Log}\ \alpha_k^\omega)| .$$

On a aussi

$$\mathrm{Log}\ \alpha_k^\omega = -\ \mathrm{Log}\{1 + \sum_\ell \gamma_\ell(\omega)\ |\varphi_\ell|\} + \mathrm{Log}\{1 + \gamma_k(\omega)\ \alpha_k^\omega\ |\varphi_k|\} .$$

Donc

$$\int_{A_k} |f_k^\omega - 1| \leq \varepsilon\ m(A_k) + 8 \int_{A_k} |\alpha_k^\omega - 1|^2 +$$

$$+ 16 \int_{A_k} |\mathcal{H}(\mathrm{Log}\{1 + \Sigma\ \gamma_\ell(\omega)\ |\varphi_\ell|\})|^2 + 16 \int \mathrm{Log}^2\{1 + \gamma_k(\omega)\ |\varphi_k|\} .$$

Puisque

$$|\alpha_k^\omega - 1|^2 \leq \sum_\ell \gamma_\ell(\omega)\ |\varphi_\ell|$$

on déduit par sommation

$$\sum_k \int_{A_k} |f_k^\omega - 1| \leq \varepsilon \sum_k m(A_k) + 8\ w \int \{\sum_\ell \gamma_\ell(\omega)\ |\varphi_\ell|\} +$$

$$16\ w \int \mathrm{Log}^2\{1 + \sum_k \gamma_\ell(\omega)\ |\varphi_\ell| + 16 \sum_k \int \mathrm{Log}^2\{1 + \gamma_k(\omega)\ |\varphi_k|\} .$$

Puisque $\log(1+x) \le 2\sqrt{x}$ pour tout $x \ge 0$, les estimations précédentes donnent

$$\int \{\sum_k \int_{A_k} |f_k^\omega - 1|\} \, dw \le \varepsilon \sum m(A_k) + \text{const}_\tau \; \varepsilon^{-\tau} \; w \, \varkappa \sum m(A_k) \quad .$$

Ceci nous mène à (ii), en usant du fait que par construction $\gamma_k(\omega)$ et f_k^ω sont indépendants comme fonctions de ω.

Revenons maintenant à la démonstration de la Prop. 1. Si $F_1, \ldots, F_r$ sont des fonctions caractéristiques d'ensembles, le lemme 2 nous donne le résultat voulu. Dans le cas général, on découpe les fonctions suivant les niveaux et on applique le lemme 2 pour chaque niveau. Il reste ensuite à recombiner les fonctions obtenues aux différents niveaux.

§ 3. SOUS-ESPACES COMPLEMENTES DE L^1/H_0^1 ET H^∞.

En usant des propriétés ($i_p - \pi_p$) des opérateurs sur l'algèbre du disque A, on montre dans [1] qu'un sous-espace complémenté E de L^1/H_0^1 où H^∞ de dimension n est à distance presque extrémale de $\ell^2(n)$, notamment de $d(E, \ell^2(n)) \ge \text{const} \dfrac{\sqrt{n}}{\log n}$. Le résultat suivant montre qu'en fait la distance est extrémale.

Théorème 2 : Tout sous-espace n-dimensionnel bien complémenté E de L^1/H_0^1 (resp. H^∞) contient un isomorphe de $\ell^1(m)$ (resp. $\ell^\infty(m)$), où $m \ge \text{const.}\, n$ (la constante dépendant de la norme de la projection).

Démonstration : Par dualité, il suffit de considérer le cas L^1/H_0^1 en exigeant que le sous-espace $\ell^1(m)$ de E soit bien complémenté. Nous allons montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ de E et des fonctions H^∞ $g_1, \ldots, g_m$ tel que

(i) $\|x_i\| = 1$

(ii) $\sum |g_i| \le \text{const.}$

(iii) $\langle x_i, g_i \rangle = 1$,

où $m \sim n$.

Des techniques standard nous permettent alors de terminer la démonstration. Nous approchons le problème de la même façon que dans le cas des sous-espaces complémentés de L^1 (voir [2]).

Dénotons $i : E \to L^1/H^1_0$ l'injection et $P : L^1/H^1_o \to E$ la projection.
En dualisant, on obtient le schéma

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "P^*"'] & & E^* \\ & H^\infty \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

En usant de propriétés des opérateurs 2-sommants, on obtient (voir [3])

$$\text{const.}\ \sqrt{2}\ \pi^{(n)}_{2,2}(i^*) \geq \|P^*\|\ \pi_{2,2}(i^*) \geq \pi_{2,2}(\text{id.}) = \sqrt{n} \quad .$$

(Ici $\pi^{(n)}_{2,2}$ désigne la norme 2-sommante par rapport à n vecteurs).
L'interprétation de cette inégalité donne des vecteurs $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ dans H^∞ tel que

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|i^*(\varphi_k)\|^2\Big)^{1/2} \geq \text{const.}\ \sqrt{n}\ \sup \Big(\sum_{k=1}^{n} |\langle\varphi_k,x\rangle|^2\Big)^{1/2}$$

où le sup est pris pour $x \in L^1/H^1_0$ et $\|x\| = 1$.
Prenons des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ dans E de norme 1 tel que $\|i^*(\varphi_k)\| = \langle\varphi_k,x_k\rangle$. On peut trouver des scalaires positifs $a_1,\dots,a_n$ tel que $\Sigma\, a_k^2 = 1$ et

$$\Sigma\, a_k \langle\varphi_k,x_k\rangle \geq \text{const.}\ \sqrt{n}\ \|(\Sigma\, |\varphi_k|^2)^{1/2}\|_\infty \quad .$$

En posant $f_k = \sigma(x_k)$ pour $k = 1,\dots,n$ le côté gauche est majoré par

$$\Sigma\, a_k \int |f_k|\ |\varphi_k| \leq \|(\Sigma\, |\varphi_k|^2)^{1/2}\|_\infty \int (\Sigma\, a_k^2\ |f_k|^2)^{1/2}$$

d'où

$$\int (\Sigma\, a_k^2\ |f_k|^2)^{1/2} \geq \text{const.}\ \sqrt{n} \quad .$$

Puisque $\Sigma\, a_k^2\ |f_k|^2 \leq (\max |f_k|)\,.\,\Sigma\, a_k^2\ |f_k|$, on trouve par Cauchy-Schwartz

$$\int \max |f_k| \geq \text{const.}\ n \quad .$$

Un argument élémentaire nous permet d'extraire une partie D de $\{1,\dots,n\}$, tel que $|D| \sim n$ et

$$\int \max_D \lambda_k \, |f_k| \geq \text{const.} \sum_D \lambda_k$$

pour tout $\lambda_k \geq 0$.
Puisque $\|q(f_k)\| = \|f_k\|$, le Th. 1 s'applique et termine clairement la démonstration.

Il découle du Th. 2 que L^1/H_0^1 ne contient pas d'espaces $\ell^\infty(n)$ et a donc un cotype. Comme nous l'avons déjà dit, une analyse plus fine permet d'obtenir tout cotype $q > 4$.

Le résultat suivant caractérise les sous-espaces complémentés à base inconditionnelle.

<u>Théorème 3</u> : Si E est un sous-espace n-dimensionnel à base inconditionnelle complémenté de L^1/H_0^1 (resp. H^∞), alors E est isomorphe à $\ell^1(n)$ (resp. $\ell^\infty(n)$) .

<u>Démonstration</u> : Il suffit évidemment de traiter le cas L^1/H_0^1. Soit $q < \infty$ un cotype de L^1/H_0^1. Dénotons $i : E \to L^1/H_0^1$ l'injection et $P : L^1/H_0^1 \to E$ la projection. Soit $x_1, \ldots, x_n$ la base inconditionnelle de et $x_1^*, \ldots, x_n^*$ la base duale. Posons finalement $f_k = \sigma(x_k)$ et $f_k^* = P^*(x_k^*)$ pour $k = 1, \ldots, n$.
On trouve par inconditionnalité pour tous scalaires $a_k \in \mathbb{C}$

$$\|\Sigma \, a_k \, x_k\| \geq \text{const} \, (\Sigma \, |a_k|^q)^{1/q}$$

d'où

$$\|\Sigma \, a_k \, f_k^*\|_\infty \leq \text{const} \, \|\Sigma \, a_k \, x_k^*\| \leq \text{const} \, (\Sigma \, |a_k|^{q'})^{1/q'} \quad .$$

Ceci entraîne

$$\|(\Sigma \, |f_k^*|^q)^{1/q}\|_\infty \leq \text{const} \quad .$$

Donc pour $\lambda_k \geq 0$, on obtient

$$\Sigma \, \lambda_k = \Sigma \, \lambda_k \, \langle f_k, f_k^* \rangle \leq \text{const} \int (\Sigma \, \lambda_k^{q'} \, |f_k|^{q'})^{1/q'} \quad .$$

Puisque $(\Sigma \, \lambda_k^{q'} \, |f_k|^{q'})^{1/q'} \leq (\max \lambda_k \, |f_k|)^{1/q} \, (\Sigma \, \lambda_k \, |f_k|)^{1/q'}$ on obtient par Hölder

$$\int \max \lambda_k \, |f_k| > \text{const} \, \Sigma \lambda_k \quad .$$

En appliquant le Th. 1, on trouve des fonctions $g_1, \ldots, g_n$ dans H^∞ tel que

(i) $|g_1| + \ldots + |g_n| \leq$ const.

(ii) $\langle f_k, g_k \rangle = 1 \quad (1 \leq k \leq n)$.

Pour $a_k \in \mathbb{C}$ et $\alpha_k = \dfrac{\bar{a}_k}{|a_k|}$, on trouve

$$\|\Sigma \, a_k \, x_k\| \geq \text{const.} \int \langle \Sigma \, \varepsilon_k(\omega) \, a_k \, x_k \, , \, \Sigma \, \varepsilon_k(\omega) \, \alpha_k \, g_k \rangle = \text{const} \, \Sigma \, |a_k| \quad ,$$

ce qui montre que $x_1, \ldots, x_n$ est équivalent à la base $\ell^1(n)$.

<u>Corollaire</u> : Tout sous-espace complémenté dans A à base inconditionnelle (de dimension infinie) est isomorphe à c_o.

Remarquons que A possède d'autres "petits" sous-espaces complémentés que c_o. En effet, si (B_r) est la suite des espaces de Bockariov (cf. [1]), alors $\oplus_{c_o} B_r$ est complémenté dans A mais n'est pas isomorphe à c_o.

§ 4. PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE H^∞ ET DUAUX.

Les espaces A et L^1/H^1_0 possède la propriété de Dunford-Pettis et L^1/H^1_0 et faiblement séquentiellement complet . Ces propriétés sont des conséquences du relèvement par $\sigma : L^1/H^1_0 \rightsquigarrow L^1$ des ensembles faiblement conditionnellement compacts. Les résultats locaux présentés au § 2 permettent d'étendre la propriété de relèvement aux ultra-puissances de L^1/H^1_0.

Rappelons que si X est un Banach, I un ensemble et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I, l'ultra-puissance $X_{\mathcal{U}}$ est le quotient de $\oplus_{\ell^\infty(I)} X$ par son sous-espace $N_{\mathcal{U}} = \{(x_i)_{i \in I} \, ; \, \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\}$.

Rappelons aussi que X^{**} est isométrique à un sous-espace 1-complémenté d'une ultra-puissance de X. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [4].

Si $(L^1/H^1_0)_{\mathcal{U}}$ est une ultra-puissance de L^1/H^1_0 et $(L^1)_{\mathcal{U}}$ l'ultra-puissance correspondante de $L^1(\pi)$, on considère les extensions naturelles de q et σ à ces ultra-puissances

$$q_{\mathcal{U}} : (L^1)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (L^1/H^1_0)_{\mathcal{U}} \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathcal{U}} : (L^1/H^1_0)_{\mathcal{U}} \rightsquigarrow (L^1)_{\mathcal{U}} \ .$$

Il est clair que $\sigma_{\mathcal{U}}$ est relèvement de norme minimale de $q_{\mathcal{U}}$.

La démonstration du résultat suivant est maintenant tout-à-fait directe

<u>Théorème 3</u> : Soit (ξ_k) une suite dans $(L^1/H^1_0)_{\mathcal{U}}$ tel que la suite $\sigma_{\mathcal{U}}(\xi_k)$ des relèvements est équivalente à la base ℓ^1 dans $(L^1)_{\mathcal{U}}$. Alors (ξ_k) a une sous-suite (ξ'_k) équivalente à la base ℓ^1 dans $(L^1/H^1_0)_{\mathcal{U}}$ et tel que $[\xi'_k ; k]$ est complémenté dans $(L^1/H^1_0)_{\mathcal{U}}$.

Tout ultra-produit $(L^1)_{\mathcal{U}}$ est un espace $L^1(\mu)$ et possède donc les propriétés énoncées en début de cette section. On trouve comme corollaire du Th. 3 :

<u>Théorème 4</u> : Tout ultra-produit X de L^1/H^1_0 est faiblement séquentiellement complet et possède la propriété de Dunford-Pettis. Toute suite ℓ^1 dans X a une sous-suite engendrant un sous-espace complémenté de X.

<u>Corollaire</u> : H^∞ et espaces duaux sont Dunford-Pettis. Les duaux impairs de H^∞ sont faiblement séquentiellement complets.

§ 5. APPLICATION AUX SUITES INTERPOLANTES.

Rappelons qu'une suite (z_m) dans le disque unité ouvert D est (universellement) interpolante si pour tout suite (a_m) de nombres complexes, $\sup |a_m| < \infty$, il existe une fonction φ dans H^∞ telle que $\varphi(z_m) = a_m$ pour tout m. Ceci est équivalent à dire que les noyaux de Poisson P_{z_m} se comportent comme une suite ℓ^1 dans L^1/H^1_0.

Une suite (z_m) dans D est interpolante ssi

$$\inf_m \prod_{n \neq m} \rho(z_m, z_n) > 0$$

où pour z, $w \in D$

$$\rho(z,w) = \frac{z - w}{1 - \bar{z}w}$$

est la distance hyperbolique.

On dit que (z_m) est une suite de Carleson si la mesure μ sur D définie par

$$\mu = \sum_m (1 - |z_m|)\, \delta_{z_m}$$

est une mesure de Carleson.

<u>Proposition 2</u> (cf. [5]) :

1. Toute suite interpolante est une suite de Carleson ;
2. Inversement, si (z_m) est une suite de Carleson et $\inf_{m \neq n} \rho(z_m, z_n) > 0$, alors (z_m) est interpolante.

Le lemme suivant se démontre par majoration de l'intégrale de Cauchy

<u>Lemme 3</u> : Si il existe une suite (q_m) dans H^∞ telle que

(i) $g_m(z_m) = 1$ pour tout m

(ii) $\sum |g_m| \leq \text{const.}$,

alors (z_m) est une suite de Carleson.

<u>Théorème 5</u> : Si une suite (z_m) dans D est interpolante par rapport aux fonctions harmoniques, elle est interpolante.

<u>Démonstration</u> : Par hypothèse, (P_{z_m}) est une suite ℓ^1 dans $L^1(\pi)$. Puisque P_z est une fonction positive, on a $\|P_z\|_1 = \|q(P_z)\|$. En combinant le Th. 1 et le Lemme 3, on trouve donc que (z_m) est une suite de Carleson. Mais puisque

$$\inf_{m \neq n} \rho(z_m, z_n) \sim \inf_{m \neq n} \|P_{z_m} - P_{z_n}\|_1 > 0 \quad ,$$

la Prop. 2 termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Pełczynski : Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators, A.M.S. Regional Conf. Ser. Math. 30, Providence 1977.

[2] J. Bourgain : A remark on finite dimensional P_λ-spaces, à paraître dans Studia Math.

[3] N. Tomczak-Jaegermann : Computing 2-summing norm with few vectors, Arkiv Math. 17 (1979) 173-177.

[4] J. Stern : Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, exposés VII, VIII, Ecole Polytechnique, Paris.

[5] N. Th. Varopoulos : Sur un problème d'interpolation, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 274 (1972) 1905-1908.

[6] J. Bourgain : Some new properties of the Banach spaces L^1/H^1_0 and H^∞, à paraître.
