SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

Semi-groupes holomorphes et *K*-convexité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 2, p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

SEMI-GROUPES HOLOMORPHES ET K-CONVEXITE

G. PISIER

Exposé No II

28 Novembre 1980

Plan

Dans cet exposé (basé sur l'article [25]) on va montrer que les espaces de Banach qui ne contiennent pas de ℓ_n^1 uniformément sont K-convexes ; en d'autres termes, la B-convexité (notion introduite par A. Beck) et la K-convexité sont des propriétés équivalentes. Ce résultat a plusieurs conséquences pour ce qu'il est convenu d'appeler la "géométrie" des espaces de Banach ; nous les présentons au § 3. La théorie des semi-groupes holomorphes (dont nous rappelons plusieurs résultats au § 2) joue un rôle essentiel dans les démonstrations.

----

§ 1. PRELIMINAIRES / INTRODUCTION.

Posons $D = \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$; on note $\varepsilon_n : D \to \{-1,+1\}$ la n-ième coordonnée et μ la mesure de probabilité uniforme sur D. Les variables aléatoires (ε_n) sont des "variables de Bernoulli" (ou "du jeu de pile ou face") sur l'espace de probabilité (D,μ).

Rappel : Un espace de Banach X est dit de type p (resp. de cotype q) s'il existe une constante C telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \{x_1,\dots,x_n\} \subset X$, on a :

$$\|\Sigma\ \varepsilon_i\ x_i\|_{L_2(X)} \leq C\ (\Sigma\ \|x_i\|^p)^{1/p}$$

(resp. $(\Sigma\ \|x_i\|^q)^{1/q} \leq C\ \|\Sigma\ \varepsilon_i\ x_i\|_{L_2(X)})$.
On note $T_p(X)$ (resp. $C_q(X)$) la plus petite constante C vérifiant cette propriété.

On note R_1 la projection orthogonale de $L_2(D,\mu)$ sur le sous-espace fermé engendré dans $L_2(D,\mu)$ par la suite $\{\varepsilon_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$.
Rappelons tout d'abord la définition suivante :

Définition 1.1 : Un espace de Banach X est dit K-convexe si l'opérateur linéaire $R_1 \otimes Id_X$, défini a priori seulement sur $L_2(\mu) \otimes X$, s'étend en un opérateur borné -noté $\tilde{R}_1$- sur $L_2(D,\mu;X)$. On notera K(X) la norme de $R_1 \otimes Id_X$ en tant qu'opérateur sur $L^2(X)$.
Par la suite, on notera simplement $L_2(X)$ l'espace $L_2(D,\mu;X)$.

Remarques 1.2 : (i) On voit immédiatement (Bessel-Parseval) que les espaces de Hilbert sont K-convexes.

(ii) Les inégalité de Kahane (cf. e.g. [28] exposé 7) montrent que, si $R_1 \otimes Id_X$ est borné sur $L_p(D,\mu;X)$ pour un p tel que $1 < p < \infty$, alors il est nécessairement borné pour tout p tel que $1 < p < \infty$.

(iii) Notons Rad(X) le sous-espace fermé de $L_2(\mu;X)$ engendré par tous les éléments de $L_2(\mu;X)$ de la forme $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ x_i$ avec $x_i \in X$, $n \in \mathbb{N}$.
Rad(X) s'identifie à l'espace des séries de Bernoulli à coefficients vectoriels qui convergent dans $L_2(\mu;X)$. Il est clair que, si X est K-convexe, $\tilde{R}_1$ est une projection linéaire bornée de $L_2(\mu;X)$ sur Rad(X).

Par un procédé de moyenne (classique en analyse harmonique), on peut noter que s'il existe une projection bornée de $L_2(\mu;X)$ sur Rad(X), alors la projection $\tilde{R}_1$ elle-même (qui est invariante par les translations du groupe D) est bornée sur $L^2(\mu;X)$.

(iv) Si X est K-convexe, on voit facilement que le dual de Rad(X) -soit Rad(X)'- s'identifie naturellement avec Rad(X'). On peut énoncer :

<u>Proposition 1.3</u> : Soit X un espace de Banach et soit C une constante. On a $\|\tilde{R}_1\| \le C$ si et seulement si, pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ dans X on a :

$$(1) \qquad \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\, x_i\|_{L_2(X)} \le$$

$$\le C \sup\{\sum_1^n \langle\xi_i,x_i\rangle \mid \{\xi_1,\dots,\xi_n\}\subset X' \ \|\sum \varepsilon_i\ \xi_i\|_{L_2(X')} \le 1\} .$$

La démonstration est évidente.

La notion de K-convexité a été introduite dans [21] comme la notion naturelle donnant lieu à une bonne dualité entre les notions de type et de cotype :

<u>Proposition 1.4</u> : Si X est K-convexe, alors X est de type p si et seulement si son dual X' est de cotype p' avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Plus précisément, on a

$$C_{p'}(X') \le T_p(X) \le K(X)\ C_{p'}(X') .$$

La démonstration résulte immédiatement des définitions des notions de type et de cotype et de la proposition 1.3.

On voit facilement (à partir de la proposition 1.4 par exemple) que ℓ^1 n'est pas K-convexe ; plus généralement, tout espace qui contient des ℓ^1_n uniformément n'est pas K-convexe. Le principal résultat de cet exposé est une réciproque à cette dernière observation :

<u>Théorème 1.5</u> : Un espace de Banach X est K-convexe si (et seulement si) X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément (en d'autres termes si et seulement si X est B-convexe au sens de [10]).

Ce théorème résulte du corollaire 3.7 qui sera démontré plus loin.

§ 2. RAPPELS SUR LES SEMI-GROUPES HOLOMORPHES.

Dans l'exposé No 11 de [30], nous avions déjà remarqué le rapport étroit existant entre la K-convexité d'un espace X et l'holomorphie d'un certain semi-groupe d'opérateurs sur $L^2(D,\mu;X)$. C'est en puisant dans la théorie des semi-groupes holomorphes que nous avons pu finalement répondre affirmativement à toutes les questions soulevées dans cet exposé antérieur et démontrer le théorème 1.5.

Soit Y un espace de Banach. Rappelons qu'une famille $(S_t)_{t\geq 0}$ formée d'opérateurs linéaires bornés sur Y est appelée un semi-groupe si $S_o = Id_Y$ et $S_s S_t = S_{s+t}$ pour tous s, $t \geq 0$. De plus, on dit qu'un tel semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu si, pour tout y dans Y, la fonction $t \to S_t y$ est continue de $[0,\infty[$ dans Y.

Soit $\varphi > 0$ et M des constantes. Notons V_φ le secteur défini par :

$$V_\varphi = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z \geq 0 \ , \ |\mathrm{Arg}\ z| < \varphi\} \quad .$$

On dit que le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est holomorphe s'il existe $\varphi > 0$ tel que, pour tous y dans Y et y' dans Y', la fonction $t \to \langle y', S_t y\rangle$ admet un prolongement holomorphe sur le secteur V_φ. Nous dirons que $(S_t)_{t\geq 0}$ est (φ,M)-holomorphe si, de plus, la fonction $t \to \langle y', S_t y\rangle$ admet un prolongement holomorphe et borné par $M\|y\|\,\|y'\|$ sur V_φ, quels que soient y et y'. Comme il est bien connu (cf. [11]), si Y est un espace complexe, le semi-groupe $t \to S_t$ admet alors lui-même une extension holomorphe $\zeta \to S_\zeta$ définie sur V_φ et possédant encore sur V_φ la propriété de semi-groupe.

Le lecteur remarquera que la définition précédente des semi-groupes holomorphes ne suppose pas nécessairement que Y est sur le corps des complexes. Néanmoins, nous supposerons toujours dans la suite que les espaces sont des espaces complexes ; tous les résultats sont valables aussi dans le cas réel, l'holomorphie étant définie comme ci-dessus. On peut aussi, le plus souvent, se ramener au cas complexe par complexification.

Il existe de nombreux critères d'holomorphie des semi-groupes, en termes de la résolvante, ou bien du générateur infinitésimal. C'est un critère, dû à Beurling [5], qui s'est trouvé particulièrement bien adapté à notre étude : soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace Y, tel que $\|S(t)\|$ est borné sur un intervalle non vide $[0, t_0[$; Beurling (cf. [5] théorème III) a montré que $(S(t))_{t\geq 0}$ est holomorphe si et seulement si

$$(2.1) \qquad \overline{\lim_{t+\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n}\to 0}} \quad \|(1 - S(\tfrac{\alpha}{n}))^n\, S(t)\|^{1/n} < 2 \quad .$$

En réalité, nous n'aurons besoin que d'une forme affaiblie du résultat de Beurling qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.1 ([5], [15]) : Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu formé de contractions sur un espace de Banach Y.
S'il existe un entier N et $\rho < 2$ tels que

$$\sup_{t\geq 0} \|(1 - S_t)^N\| \leq \rho^N \quad ,$$

alors $(S_t)_{t\geq 0}$ est holomorphe ; plus précisément, il existe $\varphi > 0$, ne dépendant que de ρ, et M, ne dépendant que de ρ et N, pour lesquels $(S_t)_{t\geq 0}$ est (φ, M)-holomorphe.

Ce résultat est un corollaire immédiat du critère d'holomorphie de Beurling (2.1) ; dans le cas $N = 1$, il est dû indépendamment à Kato [15]. Nous esquissons ci-dessous une démonstration du théorème 2.1, en nous basant sur des idées de Figiel [7] inspirées de la note de Kato [15]. Auparavant nous aurons besoin de quelques rappels sur les semi-groupes :

Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach Y.
On peut alors définir le générateur infinitésimal A du semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ par la formule

$$(2.2) \qquad \forall\, y \in D(A) \qquad Ay = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(T_t y - y) \quad ,$$

où D(A) est, par définition, l'ensemble des y de Y pour lesquels la limite (2.2) existe.
On sait (cf. e.g. [11], [14], [26], [6]) que D(A) est toujours dense dans Y et que l'opérateur (non borné) A est fermé.
On voit facilement que $S_t(D(A)) \subset D(A)$ pour tout $t \geq 0$ et que l'on a :

$$(2.3) \quad \forall\, y \in D(A) \qquad \frac{d}{dt}\, S_t y = A\, S_t y = S_t\, A y \quad .$$

<u>Démonstration du théorème 2.1</u> : Soit A le générateur infinitésimal de $(S_t)_{t\geq 0}$. Soit $\rho_o < 2$ tel que $\sup_{t\geq 0} \|(1 - S_t)^N\| = \rho_o^N$, et soit $\rho \geq 1$ tel que $\rho_o < \rho < 2$.

<u>1ère étape</u>. On va montrer que si

$$(2.4) \qquad \rho \leq \beta \quad ,$$

alors $(\beta - 1 + S_t)$ est inversible et vérifie

$$(2.5) \qquad \|(\beta - 1 + S_t)^{-1}\| \leq M'/\beta \quad ,$$

où M' est une constante ne dépendant que de ρ_o, ρ et N.

Pour cela, on remarque tout d'abord que l'opérateur $h = \frac{1 - S_t}{\beta}$ vérifie

$$\|h^N\| \leq \left(\frac{\rho_o}{\beta}\right)^N \leq \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^N < 1 \quad ;$$

on a donc :

$$\|(1 - h^N)^{-1}\| \leq \left(1 - \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^N\right)^{-1} \quad .$$

On vérifie facilement que :

$$(1 - h)^{-1} = (1 - h^N)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} h^{k-1}\right)$$

d'où $$\|(1 - h)^{-1}\| \leq \left(1 - \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^N\right)^{-1} \sum_{0}^{N-1} \left(\frac{2}{\rho}\right)^k = M'$$

soit finalement $$\|(\beta - 1 + S_t)^{-1}\| \leq \frac{M'}{\beta} \quad .$$

On va maintenant en déduire une inégalité portant sur la résolvante ; pour tout z complexe on note Arg z l'argument de z déterminé de sorte que

$$-\pi \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi \quad .$$

2ème étape. Il existe θ avec $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tel que :

(2.6) $\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } z \text{ complexe tel que } |\mathrm{Arg}\, z| \geq \frac{\pi}{2} - \theta,\ (z+A) \text{ est inversible et l'on a :} \\[2mm] \qquad \|(z+A)^{-1}\| \leq \dfrac{M''}{|z|} \quad \text{où} \quad M'' = M'(1 \vee 1/\rho)\sqrt{2}\pi \quad . \end{array}\right.$

Montrons-le : on pose $z = \xi + i\eta$.

On commence par écrire, d'après (2.3) :

$\forall\ y \in D(A)$

(2.7) $$(e^{zt}\, S_t - I)y = \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{zs}\, S_s)y\, ds = \int_0^t e^{zs}\, S_s(A+z)y\, ds \quad .$$

Supposons pour l'instant qu'il existe un certain $t \geq 0$ tel que $e^{-\xi t} = \beta - 1$ et $t = \dfrac{\pi}{|\eta|}$, de sorte que $-e^{-zt} = \beta - 1$, et tel que le nombre β vérifie (2.4). Nous montrerons ci-dessous que ce choix est possible pour tout z comme en (2.6), si θ est choisi convenablement.

Dans ces conditions, d'après la 1ère étape $S_t - e^{-zt}$ est inversible, on déduit donc immédiatement de (2.7) que $A + z$ est lui-même inversible et l'on a :

$$(A+z)^{-1} = e^{-zt}(S_t - e^{-zt})^{-1} \int_0^t e^{zs}\, S_s\, ds \quad .$$

D'où, d'après (2.5) :

$$\|(A+z)^{-1}\| \leq e^{-\xi t}\, \frac{M'}{\beta}\, \frac{e^{\xi t} - 1}{\xi} = \frac{M'}{\beta}\, \frac{1 - e^{-\xi t}}{\xi}$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{M'}{\rho} \inf(t, \dfrac{1}{|\xi|}) & \text{si } \xi \geq 0 \\[3mm] M' \inf(t, \dfrac{1}{|\xi|}) & \text{si } \xi \leq 0 \quad ♦ \end{cases} ,$$

on a donc dans les deux cas, puisque $t = \dfrac{\pi}{|\eta|}$,

$$\|(A+z)^{-1}\| \leq M'(\frac{1}{\rho} \vee 1)\, \frac{\sqrt{2}\pi}{|z|} \quad .$$

♦ On utilise ici le fait que $\beta = e^{-\xi t} + 1$, donc $e^{-\xi t} \leq \beta$.

Il nous reste à vérifier que l'on pouvait choisir $t \geq 0$ tel que

$$t = \frac{\pi}{|\eta|} \quad \text{et} \quad e^{-\xi t} + 1 \geq \rho \quad ;$$

pour cela il suffit évidemment que :

$$e^{-\frac{\xi\pi}{|\eta|}} \geq \rho - 1$$

soit
$$\frac{\xi}{|\eta|} \leq \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1}{\rho - 1} = a \quad .$$

Puisque $\rho < 2$, on a > 0, donc si $\xi \leq 0$ ce choix est toujours possible, et si $\xi \geq 0$ ce choix n'est possible que si

$$|\operatorname{cotg} \operatorname{Arg} z| \leq a \quad ; \tag{2.8}$$

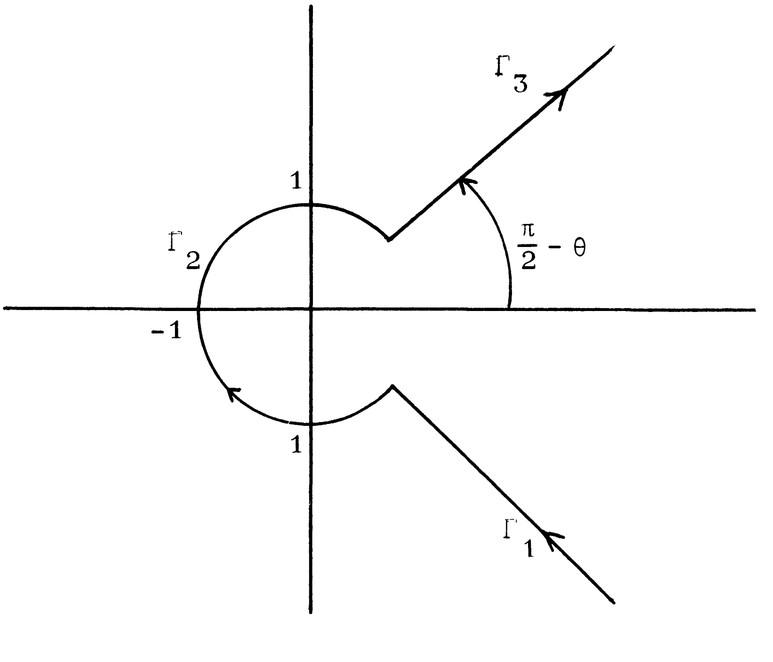
or puisque $a > 0$, on peut trouver θ avec $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tel que $a = \operatorname{cotg} \theta$, de sorte que (2.8) équivaut à $|\operatorname{Arg} z| \geq \frac{\pi}{2} - \theta$. Ce qui termine la démonstration de la deuxième étape.

Il est maintenant bien connu que (2.6) entraîne l'holomorphie du semi-groupe (cf. e.g. [14] § IX, 1.6 p. 487, ou bien [26] p. 248) nous esquissons l'argument pour la commodité du lecteur.

3ème étape. Pour tout $\varphi < \theta$, le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ admet une extension holomorphe et uniformément bornée dans le secteur

$$V_\varphi = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \; |\operatorname{Arg} z| < \varphi\} \quad .$$

On considère un chemin Γ comme il est indiqué sur la figure :



Γ_2 est la portion du cercle unité formé des z tels que $|\text{Arg } z| \geq \frac{\pi}{2} - \theta$; Γ_1 et Γ_3 sont deux demi-droites faisant les angles $\pm\ (\frac{\pi}{2} - \theta)$ avec l'axe réel.

On peut alors poser

$$S_\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-z\zeta}\,(z+A)^{-1}\,dz \quad . \tag{2.9}$$

On notera que tout nombre complexe z de la courbe Γ vérifie $|\text{Arg } z| \geq \frac{\pi}{2} - \theta$, donc :

$$\forall\ z \in \Gamma \qquad \|(z+A)^{-1}\| \leq \frac{M''}{|z|} \quad .$$

Soit ζ dans V_φ ; pour tout $z \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, on a

$$|\text{Arg } z\zeta| = |\text{Arg } z + \text{Arg } \zeta| < \frac{\pi}{2} - \theta + \varphi < \frac{\pi}{2} \quad ;$$

et en particulier, on a alors $\text{Re } z\zeta > 0$, ce qui implique évidemment que l'intégrale (2.9) est absolument convergente.

Cette intégrale (2.9) définit donc une fonction holomorphe dans V_φ.

Il est alors aisé de vérifier que $(S_\zeta)_{\zeta \in V_\varphi}$ est un prolongement de $(S_t)_{t \geq 0}$ et qu'il existe un nombre M tel que $\sup\limits_{\zeta \in V_\varphi} \|S_\zeta\| \leq M$. Ce qui termine la démonstration du théorème 2.1. Pour plus de détails sur la dernière partie de la démonstration, le lecteur peut se référer à [26] page 248, ou bien, à [15] p. 487, ou encore à [33] p. 59.

Signalons en passant que cette dernière partie (que nous n'avons pas démontrée complètement) est particulièrement facile à vérifier dans les cas particuliers auxquels nous appliquerons le théorème 2.1, dans le paragraphe suivant.

§ 3. APPLICATIONS DU CRITERE D'HOLOMORPHIE.

Rappel : On dit qu'un espace de Banach X contient des ℓ_n^1 uniformément s'il existe $\lambda < \infty$ et une suite de sous-espaces $X_n \subset X$ telle que X_n est λ-isomorphe à ℓ_n^1.

<u>Théorème 3.1</u> : Soit Y un espace de Banach. Si Y ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, alors il existe $\varphi > 0$ et M vérifiant la propriété suivante : pour toute famille finie $(P_1,\dots,P_m)$ formée de projections linéaires, contractantes et deux-à-deux commutant, le semi-groupe

$$S_t = \prod_{j=1}^{m} [P_j + e^{-t}(1 - P_j)]$$

est (φ, M)-holomorphe.

La démonstration utilisera le

<u>Lemme 3.2</u> : Si Y ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, alors il existe un entier N et $\rho < 2$ tels que : pour tout N-uple $(\pi_1,\dots,\pi_N)$ formé de projections contractantes sur Y, commutant entre elles, on a :

$$\left\|\prod_{k=1}^{N} (1 - \pi_k)\right\| \leq \rho^N \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Si la conclusion est en défaut, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $(\pi_1,\dots,\pi_N)$ comme ci-dessus et y dans Y tels que : $\|y\| = 1$ et

$$(3.1) \qquad \left\|\prod_{k=1}^{N} (1 - \pi_k)y\right\| > 2^N - \varepsilon \quad .$$

On peut alors montrer que, pour tout choix de signes $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N) \in \{-1,+1\}^N$, on a :

$$(3.2) \qquad \left\|\prod_{k=1}^{N} (1 + \varepsilon_k \pi_k)y\right\| > 2^N - 2^N \varepsilon \quad .$$

En effet, posons $A = \{k \mid \varepsilon_k = -1\}$ et $B = \{k \mid \varepsilon_k = +1\}$. Posons, de plus, pour tout $C \subset \{1,2,\dots,N\}$, $\pi_C = \prod_{k \in C} \pi_k$. On a :

$$\prod_{k=1}^{N} (1 - \pi_k) = \prod_{k \in B} (1 - \pi_k) \prod_{k \in A} (1 - \pi_k)$$

$$= \left(\sum_{C \subset B} (-1)^{|C|} \pi_C\right) \prod_{k \in A} (1 - \pi_k) \quad ;$$

par conséquent :

$$(3.3) \qquad \pi_B \prod_{k \in A} (1 - \pi_k) = \prod_{k=1}^{N} (1 - \pi_k) - \Sigma \quad ,$$

où Σ est la somme de $2^{|B|}-1$ opérateurs, chacun de norme inférieure à $2^{|A|}$; on a donc :

$$(3.4) \qquad \|\Sigma\| \leq (2^{|B|}-1)\, 2^{|A|} \leq 2^N - 2^{|A|} \quad .$$

En combinant (3.1), (3.3) et (3.4), on trouve :

$$(3.5) \qquad \|\pi_B \prod_{k\in A} (1-\pi_k)y\| \geq (2^N-\varepsilon) - (2^N - 2^{|A|}) = 2^{|A|} - \varepsilon \quad .$$

Il en résulte que :

$$\|\prod_{k\in B}(1+\pi_k)\prod_{k\in A}(1-\pi_k)y\| \geq \|\pi_B \prod_{k\in B}(1+\pi_k)\prod_{k\in A}(1-\pi_k)y\|$$

$$= \|2^{|B|}\,\pi_B \prod_{k\in A}(1-\pi_k)y\|$$

soit d'après (3.5) :
$$\geq 2^{|B|}\,(2^{|A|}-\varepsilon) \geq 2^N(1-\varepsilon) \quad .$$

Ce qui établit l'inégalité annoncée (3.2).

En développant le produit $\prod_{k=1}^{N}(1+\varepsilon_k\,\pi_k)y$, on trouve

$$y + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k\,\pi_k\,y = \prod_{k=1}^{N}(1+\varepsilon_k\,\pi_k)y - \Sigma' \quad ,$$

où Σ' est la somme de $2^N-(N+1)$ éléments dans la boule unité de Y.
On a donc :

$$\|y + \sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\,\pi_k\,y\| \geq 2^N - 2^N\varepsilon - (2^N-(N+1)) = N+1-2^N\varepsilon \quad .$$

Posons $\pi_o\,y = y$.
On peut maintenant conclure par un argument bien connu : on a $\forall\,(\alpha_k)_{0\leq k\leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$,

$$(3.6) \qquad \|\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\,\pi_k\,y\| \geq (1-2^N\varepsilon)\sum_{k=0}^{N}|\alpha_k| \quad .$$

En effet, posons $S = \sum_{k=0}^{N}|\alpha_k|$ et soit ε_k le signe de α_k, on a :

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \pi_k y\Big\| = \Big\|\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k |\alpha_k| \pi_k y\Big\|$$

$$\geq \Big\|\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k S \pi_k y\Big\| - \Big\|\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k (S - |\alpha_k|) \pi_k y\Big\|$$

$$\geq S(N + 1 - 2^N \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} (S - |\alpha_k|)$$

$$= S(1 - 2^N \varepsilon) \quad ,$$

ce qui établit (3.6).

D'après (3.6) le sous-espace engendré par $(y, \pi_1 y, \ldots, \pi_N y)$ est λ-isomorphe à ℓ^1_{N+1} avec $\lambda = (1 - 2^N \varepsilon)^{-1}$; puisque $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit (indépendamment de N), on obtient que X contient un sous-espace λ-isomorphe à ℓ^1_{N+1} pour tout $\lambda > 1$ et pour tout entier N. On a donc abouti à une contradiction avec l'hypothèse faite sur Y. c.q.f.d.

Remarque : Le lecteur pourrait objecter que nous n'avons obtenu dans la démonstration précédente que des ℓ^1_n réels ; mais en fait, on sait (cf. [10]) qu'un espace de Banach complexe contient uniformément des ℓ^1_n complexes si et seulement si l'espace réel sous-jacent contient uniformément des ℓ^1_n réels.

Démonstration du théorème 3.1 : Soient N et ρ comme au lemme 3.2. Nous allons montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\|(1 - S_t)^N\| \leq \rho^N \quad . \tag{3.7}$$

Pour cela, on va "jouer à pile ou face avec une pièce truquée" (!) : on considère une suite $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$ de variables aléatoires, à valeurs dans $\{0,1\}$, indépendantes, équidistribuées, telles que :

$$\mathbb{P}(\xi_j = 1) = e^{-t} \quad , \quad \mathbb{P}(\xi_j = 0) = 1 \quad .$$

On pose $\quad \pi(\omega) = \prod_{j=1}^{m} [P_j + \xi_j(\omega)(1 - P_j)] = \prod_{j : \xi_j = 0} P_j \quad .$

On observe que :

$$S_t = \int \pi(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

donc :

$$(1 - S_t)^N = \int \prod_{k=1}^{N} (1 - \pi(\omega_k))\, d\mathbb{P}(\omega_1) \ldots d\mathbb{P}(\omega_N) \quad .$$

Mais, d'après le lemme 3.2, on a :

$$\|\prod_{k=1}^{N} (1 - \pi(\omega_k))\| \leq \rho^N$$

par conséquent :

$$\|(1 - S_t)^N\| \leq \int \|\prod_{k=1}^{N} (1 - \pi(\omega_k))\| d\mathbb{P}(\omega_1) \ldots d\mathbb{P}(\omega_N)$$

$$\leq \rho^N$$

ce qui établit (3.7).

Le théorème 3.1 résulte alors du critère d'holomorphie de Beurling-Kato énoncé au théorème 2.1:

Proposition 3.3 : Soit Y un espace de Banach et $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe sur Y. On suppose qu'il existe un sous-espace dense $\mathcal{P} \subset Y$ et une suite $(W_k)_{k\geq 0}$ d'opérateurs définis sur $\mathcal{P}$ tels que :

$$\forall\ t \geq 0 \qquad S_{t|\mathcal{P}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\, W_k \quad .$$

Soient $\varphi > 0$ et M des constantes. Si le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est (φ, M)-holomorphe sur Y, alors les opérateurs W_k sont nécessairement bornés sur Y et il existe une constante C ne dépendant que de $\varphi > 0$ telle que :

$$\forall\ k \geq 0 \qquad \|W_k\| \leq MC^k \quad .$$

Démonstration : D'après l'unicité du prolongement holomorphe, nous savons que, pour tout ζ dans V_φ, l'extension holomorphe de $(S_t)_{t\geq 0}$ coïncide sur $\mathcal{P}$ avec $S_\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\zeta}\, W_k$. On a par hypothèse :

$$\text{(3.8)} \qquad \sup_{\zeta \in V_\varphi} \|S_\zeta\| \leq M \quad .$$

On peut supposer $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Posons $a = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \varphi}$ de sorte que : $\forall\ b \in [-\pi, +\pi]$, $a + ib \in V_\varphi$.

On vérifie aisément que :

$$W_k = \frac{e^{ka}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{a+ib}\, e^{ikb}\, db \quad ,$$

on déduit donc immédiatement de (3.8) :

$\forall\ k \geq 0$ $$\|W_k\| \leq M\, e^{ka} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

<u>Corollaire 3.4</u> : Soit Y un espace ne contenant pas de ℓ^1_n uniformément. Il existe une constante C' vérifiant la propriété suivante :

Pour toute famille finie $(P_1,\ldots,P_m)$ comme ci-dessus, on a :

$$\|\sum_{j=1}^{m} (1-P_j) \prod_{i\neq j} P_i\| \leq C' \quad .$$

Plus généralement, posons pour tout entier $k \geq 0$:

$$Q_k = \sum_{\substack{A\subset\{1,2,\ldots,m\} \\ |A|=k}} \prod_{j\in A} (1-P_j) \prod_{i\notin A} P_i \quad ,$$

on a alors :

(3.9) $$\|Q_k\| \leq C'^k \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Ce corollaire résulte de la proposition 3.3 et du théorème 3.1 puisque l'on a :

$$\prod_{j=1}^{m} [P_j + e^{-t}(1-P_j)] = \sum_{k=0}^{m} e^{-tk}\, Q_k \quad .$$

<u>Remarque 3.5</u> : Soit $A\subset\{1,\ldots,m\}$; on a :

$$\sum_{j\in A} (1-P_j) \prod_{i\neq j} P_i = (\prod_{\ell\in A} P_\ell) \sum_{j=1}^{m} (1-P_j) \prod_{i\neq j} P_i \quad ,$$

d'où, $\forall\ A\subset\{1,\ldots,m\}$

$$\|\sum_{j\in A} (1-P_j) \prod_{i\neq j} P_i\| \leq \|\sum_{j=1}^{m} (1-P_j) \prod_{i\neq j} P_i\| \quad .$$

Par conséquent, la décomposition $\sum_{j=1}^{m} (1-P_j) \prod_{i\neq j} P_i$ est une <u>décomposition 2-inconditionnelle</u> du sous-espace qui est l'image de la projection Q_1.

Dans un espace de Banach arbitraire, il n'est pas toujours clair qu'il existe "beaucoup" de projections $(P_1,\dots,P_m)$ comme ci-dessus ; par contre, si l'on considère un espace Y de la forme $L^p(X)$, où X est un espace de Banach, alors les espérances conditionnelles fournissent de nombreux exemples de telles projections :

<u>Corollaire 3.6</u> : Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ une suite de σ-algèbres indépendantes avec $\mathcal{A}_o$ triviale. Alors, pour tout espace X ne contenant pas de ℓ^1_n uniformément, l'opérateur $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_j} - \mathbb{E}^{\mathcal{A}_o}$ est borné sur $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P};X)$, pour tout p tel que $1<p<\infty$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit évidemment de montrer que la norme $\sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_j} - \mathbb{E}^{\mathcal{A}_o}$ en tant qu'opérateur sur $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P};X)$ est majorée indépendamment de l'entier m. Pour cela, on applique le corollaire 3.5 à l'espace $Y = L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P};X)$ (qui ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, si X n'en contient pas) et aux projections $P_j = \mathbb{E}^{\mathcal{A}'_j}$ où $\mathcal{A}'_j$ est la tribu engendrée par $\bigcup_{i\neq j} \mathcal{A}_i$. On vérifie alors aisément que :

$$\sum_{j=1}^{m} (1-P_j) \prod_{i\neq j} P_i = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_j} - \mathbb{E}^{\mathcal{A}_o} ,$$

d'où le corollaire 3.6.

<u>Corollaire 3.7</u> : Si X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, alors X est K-convexe. Plus précisément, il existe une constante C, telle que :

$$(3.10) \quad \forall\, p>2 \qquad \|R_1\otimes Id_X\|_{L^p(X)\to L^p(X)} \leq C\sqrt{p} .$$

<u>Démonstration</u> : La première partie résulte immédiatement du corollaire 3.6 : en effet, si $\mathcal{A}_j$ est la tribu engendrée sur D par ε_j, on vérifie immédiatement que le projecteur $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_j} - \mathbb{E}^{\mathcal{A}_o}$ n'est autre que la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par $\{\varepsilon_j \mid j\geq 1\}$, C'est-à-dire R_1.
Montrons la seconde partie : posons $\widetilde{R}_1 = R_1\otimes Id_X$. D'après ce qui précède, on sait qu'il existe une constante C' telle que :

$$\forall\, f\in L_2(D,\mu;X) \qquad \|\widetilde{R}_1(f)\|_{L_2(X)} \leq C' \|f\|_{L_2(X)} .$$

D'après les inégalités de Kahane, avec l'amélioration due à **Kwapień** [18] (cf. e.g. [28], exposé No 7) on sait qu'il existe une constante C" telle que pour toute suite finie $\{x_1,\dots,x_n\}$ dans X, on a :

$$\forall\ p>2 \qquad \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ x_i\Big\|_{L_p(X)} \le C''\sqrt{p}\ \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ x_i\Big\|_{L_2(X)} \ .$$

Par densité, on en déduit immédiatement

$$\forall\ f\in L_2(X) \qquad \|\tilde{R}_1(f)\|_{L_p(X)} \le C''\sqrt{p}\ \|\tilde{R}_1(f)\|_{L_2(X)}$$

d'où :

$$\le C'\ C''\sqrt{p}\ \|f\|_{L_2(X)}$$

$$\le C\ C''\sqrt{p}\ \|f\|_{L_p(X)} \ .$$

Ce qui établit (3.10).

<u>Remarques 3.8</u> : i) Dans la situation du corollaire 3.6, on peut démontrer par un argument d'interpolation (cf. par exemple [30] exposé No 11, pages 10-11) qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall\ p>2 \qquad \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{A}_j} - \mathbb{E}^{\mathcal{A}_o}\Big\|_{L_p(X)\to L_p(X)} \le Cp \ .$$

ii) Soit k un entier positif et soit R_k la projection orthogonale de $L^2(D)$ sur le sous-espace engendré par toutes les fonctions de la forme $\prod_{n\in A} \varepsilon_n$ avec $|A|=k$. La démonstration du corollaire 3.7 montre plus généralement que (si X est K-convexe) il existe une constante C telle que :

$$\forall\ k\ge 0, \forall\ p>2 \qquad \|R_k\otimes Id_X\|_{L_p(X)\to L_p(X)} \le (C\sqrt{p})^k \ .$$

iii) D'autre part, si l'on remplace les variables (ε_n) par des variabmes indépendantes gaussiennes standard, alors l'analogue du corollaire 3.7 est encore vrai ; on peut, par exemple, le déduire du corollaire 3.7 par un argument du type "théorème central limite" exactement comme dans [2].

Il est naturel de chercher à généraliser le théorème 3.1 à des semi-groupes plus généraux ; nous ne connaissons pas de généralisation pour un espace Y arbitraire, mais si $Y=L^p(X)$ avec $1<p<\infty$ et si X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément, alors on a le résultat suivant :

<u>Théorème 3.9</u> : Soit G un groupe localement compact non nécessairement abélien et soit λ une mesure de Haar sur G. Soit $(\nu_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de convolution formé de probabilités symétriques sur G. On suppose de plus que les probabilités $(\nu_t)_{t\geq 0}$ sont centrales, c'est-à-dire que : $\delta_g * \nu_t * \delta_{g-1} = \nu_t$ quel que soit g dans G. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de convolution défini sur $L^p(G,\lambda)$ par : $T_t f = f * \nu_t$ pour tout f dans $L^p(G,\lambda)$. On suppose que $1 < p < \infty$ et que $(T_t)_{t\leq 0}$ est fortement continu sur $L^p(G,\lambda)$. Dans ces conditions, pour tout espace de Banach X ne contenant pas de ℓ_n^1 uniformément, le semi-groupe $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ définit un semi-groupe holomorphe $L_p(G,\lambda;X)$.

Pour la démonstration, voir [25].

Dans le cas particulier où X est uniformément non carré (c'est-à-dire : il existe $\varepsilon > 0$ tel que X ne contient aucun sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ_2^1), alors la démonstration de [25] s'applique plus généralement à tout semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ formé d'opérateurs positifs self-adjoints sur un espace $L^2(\Omega,\Sigma,m)$ (où (Ω,Σ,m) est un espace mesuré σ-fini quelconque) vérifiant de plus $T_t^* 1 = 1$ pour tout $t \geq 0$, de sorte que T_t est une contraction à la fois sur $L^1(\Omega,\Sigma,m)$ et sur $L^\infty(\Omega,\Sigma,m)$.

Il est très vraisemblable que cette version généralisée du théorème 3.9 vaut aussi si X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément, mais je ne sais pas le démontrer. Plus généralement, on peut conjecturer que si $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, formé d'opérateurs de norme uniformément majorée, à la fois sur $L^1(\Omega,\Sigma,m)$ et $L^\infty(\Omega,\Sigma,m)$, alors $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe holomorphe sur $L^p(\Omega,\Sigma,m;X)$ pour tout p tel que $1 < p < \infty$.

Si X est un treillis de Banach, on vérifie aisément la conjecture précédente, en utilisant le théorème d'interpolation de [23] (cf. aussi [29], exposé No 17).

<u>Remarque 3.10</u> : Soit ε tel que $-1 \leq \varepsilon \leq 1$. Soit $\mu(\varepsilon)$ la mesure de probabilité sur $D = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est le produit infini de la mesure $\frac{1+\varepsilon}{2}\delta_1 + \frac{1-\varepsilon}{2}\delta_{-1}$. Posons $\mu_t = \mu(e^{-t})$ pour $t \geq 0$. Les mesures $(\mu_t)_{t\geq 0}$ forment évidemment un semi-groupe de convolution sur le groupe D, vérifiant les hypothèses du théorème 3.9. Appliqué à ce cas particulier, le théorème 3.9 et la proposition 3.3 impliquent le corollaire 3.7.

Donnons deux autres exemples d'application :

Soit $t \geq 0$ fixé. Considérons sur le tore $\mathbb{T}$ les mesures de probabilité ν_t^1 et ν_t^2 définies par leurs transformées de Fourier formelles :

$$\nu_t^1 \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx} \quad \text{et} \quad \nu_t^2 \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|^2t} e^{inx}$$

(cf. [6] §1.5.4 et § 1.5.2).

On considère sur le produit infini $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ le semi-groupe de convolution N_t^1 (resp. N_t^2) qui est le produit infini de ν_t^1 (resp. ν_t^2).

Soit X un espace K-convexe et soit p fixé tel que $1 < p < \infty$. D'après le théorème 3.9, les semi-groupes $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ engendrent des semi-groupes holomorphes sur $L^p(\mathbb{T}^{\mathbb{N}};X)$. Soit W_k^1 (resp. W_k^2) le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ sur le sous-espace fermé engendré par tous les caractères sur $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ de la forme $e^{i\sum_{j=1}^{\infty} n_j x_j}$ avec $\sum_{j=1}^{\infty} |n_j| = k$ (resp. $\sum_{j=1}^{\infty} |n_j|^2 = k$). On vérifie aisément que l'opérateur de convolution par N_t^1 (resp. par N_t^2) coïncide avec $\sum_{k\geq 0} e^{-tk} W_k^1$ (resp. $\sum_{k\geq 0} e^{-tk} W_k^2$). On déduit donc de la proposition 3.3 :

Il existe une constante C telle que, pour tout $k \geq 0$

$$\|W_k^i \otimes Id_X\|_{L_p(X)\to L_p(X)} \leq C^k \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou bien } i = 2 \quad .$$

On pourrait aussi appliquer le théorème 3.9 aux produits de Riesz formés sur un "ensemble de Rider" au sens de [19].

On peut généraliser les résultats précédents aux séries aléatoires à coefficients vectoriels dans un cadre non-commutatif, comme dans le chapitre 5 de [20]. On considère le groupe unitaire $\mathcal{U}(n)$ formé des matrices unitaires $n \times n$. On pose $G = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}(n)$ et on note $U^n : G \to \mathcal{U}(n)$ la n-ième coordonnée, et $(U_{ij}^n)_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients de la matrice U^n. Soit Q la projection orthogonale de $L^2(G)$ sur le sous-espace engendré par les fonctions $\{U_{ij}^n \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i,\ j \leq n\}$. On a alors :

<u>Théorème 3.11</u> : Si X est K-convexe, l'opérateur $Q \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(G;X)$.

La démonstration utilise le lemme suivant :

<u>Lemme 3.12</u> : Soit X un espace de Banach et soit $\{x_{ij}^n \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i,\ j \leq n\}$ une famille d'éléments de X, dont seulement un nombre fini sont nuls.

Soit $\{\varepsilon_{ij}^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \le i, j \le n\}$ une famille de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. Soit d'autre part $\{g_{ij}^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \le i, j \le n\}$ une famille de gaussiennes complexes indépendantes centrées standard. On pose

$$G = \sum_n n^{-1/2} \sum_{1 \le i, j \le n} g_{ij}^n \, x_{ij}^n$$

$$\xi = \sum_n n^{-1/2} \sum_{1 \le i, j \le n} \varepsilon_{ij}^n \, x_{ij}^n$$

et
$$Z = \sum_n \sum_{1 \le i, j \le n} U_{ij}^n \, x_{ij}^n \quad .$$

i) Il existe une constante absolue $\delta > 0$ telle que

(3.11)
$$\|G\|_{L_2(X)} \ge \delta \, \|Z\|_{L_2(X)} \quad .$$

ii) Si X est de cotype q pour un $q < \infty$, alors il existe une constante C telle que, pour tout choix de $\{x_{ij}^n\}$, on a :

(3.12)
$$\|G\|_{L_2(G;X)} \le C \, \|Z\|_{L_2(X)} \quad .$$

De plus, on a alors :

(3.13)
$$\delta' \, \|\xi\|_{L^2(X)} \le \|Z\|_{L^2(G;X)} \le C' \, \|\xi\|_{L^2(X)} \quad ,$$

où $\delta' > 0$ et C' sont des constantes indépendantes de $\{x_{ij}^n\}$.

<u>Démonstration</u> : Le premier point est tiré de [20] (cf. [20], chap. V, corollaire 5.2.4) auquel nous renvoyons le lecteur.
Pour le second point, la démonstration est tout-à-fait analogue à celle du corollaire 1.3 de [21] :

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des suites de matrices scalaires $\{M^n\}_n$ telles que, pour chaque n, M^n est une matrice $n \times n$. On pose :
$\forall \{M^n\}_n \in \mathcal{M}$

$$\Phi(\{M^n\}) = \|\sum_n \sum_{ij} (U^n(t) \, M^n \, U^n(t'))_{ij} \, x_{ij}^n\|_{L^2(dt\,dt';X)} \quad .$$

Si X est de cotype q_1, alors l'espace $\mathcal{M}$ muni de la semi-norme Φ est évidemment lui-aussi de cotype q_1. D'après un résultat de Pei-Kee Lin (cf. [22], cf. aussi [1]) , il en résulte alors que pour tout $q > q_1$, il existe une constante C_q telle que pour tout famille $\{M_j^n\}$ $(j = 1,2,\dots)$ d'éléments de $\mathcal{M}$, on a :

$$\Big(\sum_j \Phi(\{M_j^n\})^q\Big)^{1/q} \le C_q \ \Phi\Big(\Big\{\Big(\sum_j |M_j^n|^q\Big)^{1/q}\Big\}\Big) \ ^{\blacklozenge} \quad .$$

On en déduit alors (même argument que pour le corollaire 1.3 de [21]) qu'il existe une famille $\{\Lambda^n\}$ dans $\mathcal{M}$ telle que $\sum_n \mathrm{tr}\,|\Lambda^n| \le 1$ et telle que :

$\forall\ \{M^n\} \in \mathcal{M}$

$$(3.14) \qquad \Phi(\{M^n\}) \le C_q\Big(\sum_n \mathrm{tr}\ |\Lambda^n|\ |M^n|^q\Big)^{1/q}\ \|Z\|_{L^2(X)}$$

(bien remarquer que $\|Z\|_{L^2(X)} = \Phi(\{I^n\})$ où I^n est la matrice identité $n \times n$). En particulier, pour tout ω, on a (3.14) avec $G^n(\omega)$ à la place de M^n ; si l'on intègre l'inégalité obtenue, on trouve :

$$\begin{aligned}\|G\|_{L^2(X)} &\le C_q \ \Big(\sum_n \mathrm{tr}\ |\Lambda^n|\ \mathbb{E}\,|G^n|^q\Big)^{1/q}\ \|Z\|_{L^2(X)} \\ &\le C_q\ C'_q\ \|Z\|_{L^2(X)} \quad ,\end{aligned}$$

ce qui établit (3.12). (Pour la dernière inégalité, on a utilisé le fait bien connu que la norme $\|G^n\|_\infty$ en tant qu'opérateur sur ℓ^2_n de la matrice G^n vérifie $(\mathbb{E}\,\|G^n\|_\infty^q)^{1/q} \le C'_q$, où C'_q est une constante indépendante de n). Enfin, (3.13) résulte de (3.12), (3.11) et du fait que $\|\xi\|_{L^2(X)}$ et $\|G\|_{L^2(X)}$ sont équivalents (d'après le corollaire 1.3 de [21]).

<u>Démonstration du théorème 3.11</u> : Si X est K-convexe, alors d'après [21], il existe $q < \infty$ tel que X et X' sont tous deux de cotype q ; on peut donc supposer que (3.13) est vérifié à la fois par X et par X'. Soit $\mathfrak{Z}$ (resp. $\mathfrak{R}$) le sous-espace de L^2 engendré par les fonctions $\{U_{ij}^n \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \le i,\ j \le n\}$ (resp. $\{\varepsilon_{ij}^n \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \le i,\ j \le n\}$).
Puisque X vérifie (3.13), l'isomorphisme entre $\overline{\mathfrak{R}}$ et $\overline{\mathfrak{Z}}$ s'étend en un isomorphisme entre les fermetures dans $L^2(X)$ de $\mathfrak{R} \otimes X$ et $\mathfrak{Z} \otimes X$. D'autre part, puisque X' vérifie (3.13), on a aussi un isomorphisme entre $\overline{\mathfrak{R} \otimes X'}$ et $\overline{\mathfrak{Z} \otimes X'}$ donc aussi (par dualité) entre $(\overline{\mathfrak{R} \otimes X'})'$ et $(\overline{\mathfrak{Z} \otimes X'})'$.

$^{\blacklozenge}$ Evidemment, le module $|M|$ d'une matrice M est défini comme $|M| = (M^* M)^{1/2}$.

Par un argument simple (cf. la proposition 1.3), on en déduit alors facilement que

$$\|\tilde{Q}\| \leq C'/\delta' \quad K(X) \quad .$$

Remarque 3.13 : Curieusement, nous ne savons pas (peut être par ignorance pure et simple) démontrer le théorème 3.11 comme corollaire du théorème 3.9 ; il est probable que la projection Q est liée à un semi-groupe de convolution sur G (comme dans la remarque 3.10), mais nous ne voyons pas lequel. La raison semble être l'absence d'une "bonne" généralisation des produits de Riesz dans ce cadre.

§ 4. APPLICATIONS A LA "GEOMETRIE" DES ESPACES DE BANACH.

Soit X un espace de Banach. On pose

(4.1) $$p(X) = \sup \{p \leq 2 \mid X \text{ est de type } p\}$$

(4.2) $$q(X) = \inf \{q \geq 2 \mid X \text{ est de cotype } q\} \quad .$$

On déduit immédiatement de la proposition 1.4 que l'on a, si $p(X) > 1$, les formules de dualité suivantes :

$$\frac{1}{p(X)} + \frac{1}{q(X')} = \frac{1}{p(X')} + \frac{1}{q(X)} = 1 \quad ,$$

c'est-à-dire : $p(X) = q(X')'$ et $q(X) = p(X')'$

D'après les résultats de [21] et [16], les indices $p(X)$ et $q(X)$ sont étroitement liés aux sous-espaces ℓ_n^p que peut contenir l'espace X. Précisément, on a d'après [21] [16], si X est de dimension infinie :

$$p(X) = \inf \{p \mid X \text{ contient des } \ell_n^p \text{ uniformément}\} \quad ,$$

$$q(X) = \sup \{p \mid X \text{ contient des } \ell_n^p \text{ uniformément}\} \quad .$$

Rappelons qu'un sous-espace $F \subset X$ est dit "C-complémenté dans X" s'il existe une projection P de X sur F telle que $\|P\| \leq C$. Soit p tel que $1 \leq p \leq \infty$. On dit que X "contient des ℓ_n^p uniformément complémentés" s'il existe des constantes C et $\varepsilon > 0$ telles que, pour tout entier n, il existe un sous-espace $F_n \subset X$ qui est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ_n^p et C-complémenté dans X.

Par définition, dire qu'un espace est K-convexe revient à dire qu'une certaine projection (en l'occurence $\tilde{R}_1$) est bornée sur $L^2(X)$; l'un des intérêts de la K-convexité est que l'on peut en déduire que de nombreuses autres projections sont bornées sur l'espace X lui-même. Par exemple, on a :

Théorème 4.1 : Soit X tel que $p(X) > 1$.
i) Si X est de type $p(X)$ (i.e. le supremum est atteint dans (4.1)) alors X contient des $\ell_n^{p(X)}$ uniformément complémentés.
ii) Si X est de cotype $q(X)$ (i.e. l'infimum est atteint dans (4.2)) alors X contient des $\ell_n^{q(X)}$ uniformément complémentés.

Pour la démonstration, voir [21] remarque 2.9, compte-tenu du théorème 1.5 et de la proposition 1.4.
Si l'on ne suppose pas que les bornes sont atteintes dans (4.1) ou (4.2), la conclusion de (i) ou (ii) est en défaut. On peut toutefois généraliser comme suit : nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ est "lente", si pour $\delta > 0$, $\overline{\lim}\, f(n)\, n^{-\delta} = 0$. On dira que X contient presque des ℓ_n^p complémentés s'il existe une fonction lente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout n il existe un sous-espace $F_n \subset X$ qui est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ_n^p et $f(n)$-complémenté.

D'après la remarque 2.9 de [21] et le théorème 1.5, on peut alors énoncer :

Théorème 4.2 : Soit X tel que $p(X) > 1$.
Alors X contient des ℓ_n^p presque uniformément complémentés à la fois pour $p = p(X)$ et $p = q(X)$.

D'après des résultats connus sur la dimension des sous-espaces euclidiens complémentés des espaces ℓ_n^p (cf. e.g. [8]), on voit aisément que tout espace qui contient des ℓ_n^p uniformément complémentés (resp. presque uniformément complémentés), pour un p tel que $1 < p < \infty$, contient nécessairement des ℓ_n^2 uniformément complémentés (resp. presque uniformément complémentés).
Le théorème 4.2 implique donc que, si $p(X) > 1$, alors X contient presque des ℓ_n^2 uniformément complémentés ; mais en fait, on peut améliorer ce résultat : en effet, d'après un résultat de Figiel et Tomczak-Jaegermann

(cf. [9]) tout espace K-convexe contient des ℓ_n^2 uniformément complémentés. Plus précisément, ils ont montré dans [9] que tout espace K-convexe est "localement π-euclidien" au sens de la définition suivante :

Définition 4.3 : Un espace de Banach X est dit localement π-euclidien s'il existe une constante C telle que : Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier k, il existe un entier N(k) vérifiant la propriété suivante :

Tout sous-espace $E \subset X$ de dimension au moins égale à N(k) contient un sous-espace $F \subset E$ de dimension k qui est C-complémenté dans X et $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ_k^2.

Remarque 4.4 : Si un espace X contient des ℓ_n^1 uniformément, alors X ne peut pas être localement π-euclidien. En effet, on sait qu'il existe une constante absolue $\delta > 0$ possédant la propriété suivante : pour tous entiers $k \le N$, pour tout sous-espace $F \subset \ell_N^1$ de dimension k et pour toute projection P de ℓ_N^1 sur F, on a :

(4.3) ♦ $$\|P\| \ge \delta \sqrt{k}\, (d(F,\ell_k^2))^{-1} \quad ;$$

par conséquent, si l'on choisit pour E comme dans la définition 4.3 un espace "uniformément" isomorphe à $\ell_{N(k)}^1$, on voit bien que (4.3) interdit que l'espace X soit localement π-euclidien.

Remarque 4.5 : La terminologie des super-propriétés (introduite dans [12]) permet de reformuler la notion introduite à la définition 4.1 : disons qu'un espace de Banach possède la propriété T si : ou bien il est de dimension finie, ou bien il contient des ℓ_n^2 uniformément complémentés. On voit alors que X possède la super-propriété associée à T -notée super-T- ssi X est localement π-euclidien.

La remarque 4.4, les résultats de [9] et le théorème 5 entraînent donc :

Théorème 4.6 : Les propriétés suivantes d'un espace de Banach X sont équivalentes :

♦ Cette propriété résulte d'une forme affaiblie du théorème de Grothendieck : tout opérateur u de ℓ_N^1 dans un Hilbert vérifie $\pi_2(u) \le (1/\delta)\|u\|$ où $\delta > 0$ est une constante. On peut prendre $\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ dans le cas réel et $\delta = \pi/4$ dans le cas complexe.

i) X ne contient pas de ℓ^1_n uniformément (c'est-à-dire, dans la terminologie de [12], que ℓ^1 n'est pas finiment représentable dans X).

ii) X est localement π-euclidien.

iii) X possède la propriété super-T.

Remarque 4.7 : Disons (seulement pour cette remarque !) que X possède la propriété $\mathcal{P}(\ell^1)$ [resp. $\mathcal{P}(L^1)$] si X ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ^1 (resp. à L^1).

L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iii) ci-dessus signifie que les propriétés super-$\mathcal{P}(\ell^1)$, ou ce qui revient au même super-$\mathcal{P}(L^1)$, sont équivalentes à la propriété super-T, ce qui est plutôt étonnant. Enonçons encore une conséquence surprenante du théorème précédent : supposons que X possède la propriété suivante : il existe une fonction $k \to N(k)$ et une fonction $k \to \omega(k)$, vérifiant $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \omega(k)\ k^{-1/2} = 0$, telles que : tout sous-espace $E \subset X$ de dimension $N(k)$ contient un sous-espace $F \subset E$ de dimension k qui est 2-isomorphe à ℓ^2_k et $\omega(k)$-complémenté dans X. Alors, en fait, X est localement π-euclidien c'est-à-dire vérifie la propriété précédente pour une fonction $k \to \omega(k)$ bornée.

En effet, si $\overline{\lim}\ \omega(k)\ k^{-1/2} = 0$, alors (cf. la remarque 4.4 et l'inégalité (4.3)) X ne peut pas contenir de ℓ^1_n uniformément.

Dans le cas particulier des treillis de Banach tous les résultats précédents étaient déjà connus (cf. [32] [13]).

Pour finir ce paragraphe, signalons qu'une démonstration un peu différente du théorème de [9] est donnée dans [4] ; la démonstration de [4] a l'avantage de donner le "bon" ordre de grandeur pour la dimension des ℓ^2_n complémentés :

Théorème 4.8 (cf. [4]) : Soit X un espace K-convexe. Supposons que X est de cotype q et X' de cotype q_*. Alors, il existe une constante C et une fonction $\varepsilon \to \eta(\varepsilon) > 0$ possédant la propriété suivante : tout sous-espace de dimension finie $E \subset X$ contient un sous-espace $F \subset E$ C-complémenté dans X et tel que :

$$\dim F \geq \eta(\varepsilon)\ \min\{(\dim E)^{2/q}\ ,\ (\dim E)^{2/q_*}\}$$

et
$$d(F, \ell^2_{\dim F}) \leq 1 + \varepsilon \quad .$$

Remarque 4.9 : Enonçons encore une variante du théorème précédent (cf. [4]) : Soit X un espace de dimension finie ; rappelons que l'on note K(X) la "constante de K-convexité" de X (cf. définition 1.1). Soient $q < \infty$ et $q_* < \infty$. Il existe une constante numérique C_o et une constante $\eta > 0$ ne dépendant que de $C_q(X)$ et $C_{q_*}(X')$, pour lesquelles on a la propriété suivante :

Il existe une factorisation $\ell_2^d \xrightarrow{A} X \xrightarrow{B} \ell_2^d$ de l'identité de ℓ_d^2 vérifiant :

$$\|A\| \ \|B\| \le C_o \ K(X)$$

et $$d \ge \eta \min \{(\dim X)^{2/q} , (\dim X)^{2/q_*}\} .$$

§ 5. REMARQUES ET PROBLEMES OUVERTS.

L'un des problèmes ouverts les plus importants de la théorie "locale" des espaces de Banach est le suivant :

Problème 5.1 : Est-il vrai que tout espace de Banach de dimension infinie contient des ℓ_n^p uniformément complémentés pour au moins un $p \in \{1,2,\infty\}$?

On peut remarquer que l'on aurait une réponse affirmative à la question précédente, si l'on savait répondre "oui" à la suivante :

Problème 5.2 : Soit X un espace de Banach tel que $q(X) < \infty$ et $q(X') < \infty$. Est-il vrai que $p(X) > 1$?

En effet, d'après [21], $q(X) = \infty$ ssi X contient des ℓ_n^∞ uniformément, donc (propriété d'extension des espaces ℓ_n^∞) ssi X contient des ℓ_n^∞ uniformément complémentés. Par dualité, on a aussi : $q(X') = \infty$ ssi X contient des ℓ_n^1 uniformément complémentés. Si, en dehors de ces deux cas, on pouvait montrer $p(X) > 1$ alors, le théorème 4.6 assurerait que X contient des ℓ_n^2 uniformément complémentés.

Pour des progrès récents (dans certains cas particuliers) sur le problème 5.1, voir [3].

Il nous paraît vraisemblable que les méthodes du présent exposé conduisent à une réponse affirmative aux problèmes 5.1 et 5.2, tout au moins sous des hypothèses d'approximation, par exemple si X possède une base. En effet, on peut démontrer par un argument d'interpolation (cf. [30] exposé No 11), ou bien par une méthode d'analyse harmonique (cf. [24]) le résultat suivant :

<u>Théorème 5.3</u> : Pour tout espace de dimension finie X, on a :

$$K(X) \leq C \operatorname{Log}(\dim X + 1)$$

où C est une constante numérique.

En combinant les résultats de [21] avec ceux de [9] [4] (voir la remarque 4.9 ci-dessus) on peut en déduire :

<u>Théorème 5.4</u> : Soit X un espace de Banach possédant une base. Si X ne contient ni des ℓ_n^∞, ni des ℓ_n^1 uniformément complémentés, alors X contient des ℓ_n^2 <u>presque</u> uniformément complémentés.

<u>Indications sur la démonstration</u> : Soit $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Banach de dimensions finies non bornées. Alors, d'après [21] (pour plus de détails, voir éventuellement [24]) on a l'alternative suivante : ou bien il existe $q<\infty$ tel que $\sup_m C_q(X_m)<\infty$, ou bien pour tout $\varepsilon>0$ il existe une suite d'entiers (m_n) tels que, pour tout n, l'espace X_{m_n} contient un sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ_n^∞.
Nous dirons dans ce cas que la suite $(X_m)_m$ contient des ℓ_n^∞ uniformément. Ce résultat, la remarque 4.9, le théorème 5.3 et les résultats de [8], entraînent : si ni la suite $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ni la suite $(X'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ne contient de ℓ_n^∞ uniformément, alors il existe une constante C telle que : pour tout n il existe un espace X_{m_n} qui contient un sous-espace 2-isomorphe à ℓ_n^2 et C Log(n+1)-complémenté. Soit maintenant X un espace possédant une base (e_m). On note X_m le sous-espace engendré par $\{e_1,\dots,e_m\}$; il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite (X_m) pour obtenir le théorème 5.4.

Nous conjecturons que le théorème 5.3 peut être amélioré comme suit :

<u>Conjecture 5.5</u> : Il existe une constante numérique C telle que $K(X) \leq C\{\operatorname{Log}(\dim X + 1)\}^{1/2}$ pour tout X de dimension finie.

Comme $K(\ell_n^1) = K(\ell_n^\infty) \sim (\mathrm{Log}(n+1))^{1/2}$, cette conjecture correspond à la meilleure estimation possible.

Soit $T(\varepsilon)$ le semi-groupe d'opérateurs de convolution sur $L^2(D,\mu)$ défini par : $T(\varepsilon)f = f * \mu(\varepsilon)$ où $\mu(\varepsilon)$ est comme à la remarque 3.10. Soit R_k la projection orthogonale de $L^2(D,\mu)$ déjà introduite à la remarque 3.8.ii. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions qui ne dépendent que d'un nombre fini des coordonnées (ε_n), on a, sur $\mathcal{P}$:

$$T(\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k R_k \quad .$$

L'étude du semi-groupe $(T(e^{-t}) \otimes Id_X)$ sur $L^2(X)$ conduit à introduire une "classification" des espaces de Banach d'une nature un peu différente de celles basées sur le type ou le cotype :

Pour tout espace X, on notera Δ_X l'ensemble des nombres complexes z tels que l'opérateur $T(z) = \sum_{k\geq 0} z^k \otimes Id_X$ (défini a priori seulement sur $\mathcal{P} \otimes X$) s'étende en un opérateur borné sur $L^2(D,\mu;X)$.
Evidemment, si $X \neq \{0\}$, on a nécessairement :

$$\Delta_X \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \quad .$$

De plus, il est clair que $\Delta_X = \Delta_{X'}$ et que Δ_X est symétrique par rapport à l'origine. On voit aussi facilement que $[-1,+1] \subset \Delta_X$. Cette notion conduit naturellement à plusieurs observations :

<u>Remarques 5.6</u> : (i) Supposons que X contient des ℓ_n^1 uniformément, alors Δ_X se réduit à $[-1,+1]$. En effet, si $T(z) \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(X)$, il doit être borné uniformément sur $L^2(D,\mu;\ell_n^1)$, donc (par un argument facile d'approximation) sur $L^2(D,\mu;L^1(D,\mu))$; on en déduit alors aisément que $T(z)$ lui-même doit être borné sur $L^1(D,\mu)$, or on peut voir facilement que $T(z)$ n'est borné sur $L^1(D,\mu)$ <u>que</u> si $z \in [-1,+1]$.

(ii) S'il existe un nombre $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ qui appartient à Δ_X, alors Δ_X contient un disque ouvert centré à l'origine.

En effet, d'après (i), l'hypothèse assure que X ne contient pas de ℓ_n^1 uniformément, donc (cf. remarque 3.10) que le semi-groupe $(T(e^{-t}) \otimes Id_X)$ est holomorphe sur $L_2(X)$. On en déduit que $e^{-\zeta} \in \Delta_X$ pour tout ζ dans V_φ, pour au moins un nombre $\varphi > 0$. En particulier, Δ_X contient un disque ouvert centré en 0.

En fait, on peut aussi (nous ne le ferons pas pour abréger) démontrer directement le point précédent, car l'ensemble Δ_X possède la propriété suivante : si un point z appartient à Δ_X, alors l'enveloppe convexe de z et de $[-1,1]$ est incluse dans Δ_X.

(iii) Si X est un espace de Hilbert, on a évidemment

$$\Delta_X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

et Δ_X est alors maximal. La réciproque est aussi vraie ; on a même un résultat un peu plus fort :

(iv) Si $i \in \Delta_X$ alors X est isomorphe à un Hilbert. En effet, la méthode de [2] montre alors que la transformation de Fourier est bornée de $L^2(\mathbb{R};X)$ dans lui-même. Un théorème de Kwapień (cf. [17], voir aussi [27] exposé No 8) assure alors que X est isomorphe à un espace de Hilbert.

Compte-tenu de tout ce qui précède, il est naturel de chercher à préciser les rapports entre le type et le cotype de X et l'ensemble Δ_X.

La remarque précédente nous dit seulement que si $p(X) < \infty$ alors $0 \in \mathring{\Delta}_X$. Nous conjecturons que l'on peut préciser ce résultat de la manière suivante :

<u>Conjecture 5.7</u> : Pour tout $p > 1$, il existe des constantes $\varphi_p > 0$ et K_p, telles que : pour tout espace X de type p et de cotype p' avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, le semi-groupe $(T(e^{-t}) \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ est (φ_p, M)-holomorphe sur $L^2(X)$ avec $M \leq K_p T_p(X) C_{p'}(X)$.

<u>Remarque 5.8</u> : Signalons que cette conjecture est correcte si l'on se restreint au cas où X est un <u>treillis</u> de Banach (pour le voir, utiliser [29], exposé No 17 ou bien [23], ainsi que l'argument de [31] p. 71). D'autre part, la conjecture 5.7 est évidemment vraie pour $p = 2$.

* * * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Arazy : On the geometry of the unit ball of unitary matrix spaces. Integral equations and operator theory. A paraître.

[2] W. Beckner : Inequalities in Fourier analysis, Annals of Maths. 102 (1975) 159-182.

[3] S. Bellenot : Uniformly complemented ℓ_p^n's in quasi-reflexive Banach spaces, Israel J. Math., à paraître.

[4] Y. Benyamini et Y. Gordon : Random factorizations of operators between Banach spaces, J. d'Analyse Math. de Jerusalem, à paraître.

[5] A. Beurling : On analytic extension of semi-groups of operators, Journal of Functional Analysis 6 (1970) 387-400.

[6] P. Butzer, H. Berens : Semi-groups of operators and approximation, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[7] T. Figiel : On a recent result of G. Pisier, Longhorn Notes, University of Texas at Austin, 1980/81.

[8] T. Figiel, J. Lindenstrauss et V. Milman : The dimension of almost spherical sections of convex bodies.

[9] N. Tomczak-Jaegermann : Projections onto hilbertian subspaces of Banach spaces, Israel J. Math. 33 (1979) 155-171.

[10] D.P. Giesy : On a convexity condition in normed linear spaces, Trans. A.M.S. 125 (1966) 114-146.

[11] E. Hille, R. Phillips : Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31 (1957) 473-478.

[12] R.C. James : Some self-dual properties of normed linear spaces, Annals of Math. Studies 69 (1972) 159-176.

[13] W.B. Johnson et L. Tzafriri : On the local structure of subspaces of Banach lattices, Israel J. Math. 20 (1975) 292-299.

[14] T. Kato : Perturbation theory for linear operators, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[15] T. Kato : A characterization of holomorphic semi-groups , Proc. A.M.S. 25 (1970) 495-498.

[16] J.L. Krivine : Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés, Annals of Maths. 104 (1976) 1-29.

[17] S. Kwapień : Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, Studia Math. 44 (1972) 583-595.

[18] S. Kwapień : A theorem on the Rademacher series with vector valued coefficients, Probability in Banach spaces, Springer Lect. Notes in Math. No 526 (1976) 157-158.

[19] J. Lopez et K. Ross : Sidon sets, Lecture Notes in Pure and Applied Maths. No 13, Marcel Dekker, New York 1975.

[20] M.B. Marcus et G. Pisier : Random Fourier series with applications to harmonic analysis, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, à paraître.

[21] B. Maurey et G. Pisier : Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976) 45-90.

[22] Pei-Kee-Lin : Some problems in the geometry of Banach spaces, Ph.D. Thesis, Ohio State Univ. (ch. 13 : The p-convexity and q-concavity of unitary matrix spaces) 1980.

[23] G. Pisier : Some applications of the complex interpolation method to Banach lattices, Journal d'Analyse de Jerusalem 35 (1979) 264-281.

[24] G. Pisier : Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un Hilbert, Annales de l'E.N.S. 13 (1980) 23-43.

[25] G. Pisier : Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces, à paraître.

[26] M. Reed et B. Simon : Methods of modern mathematical physics, II, Fourier analysis, self-adjointness, academic Press, New-York, 1975.

[27] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, Ecole Polytechnique, Paris.

[28] Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977-78, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[29] Séminaire d'analyse fonctionnelle 1978-79, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[30] Séminaire d'analyse fonctionnelle 1979-80, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[31] E.M. Stein : Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory, Annals of Math. Studies No 63, Princeton University Press, 1970.

[32] L. Tzafriri : On Banach spaces with unconditional basis, Israel J. Math. 17 (1974) 84-93.

[33] E.B. Davies : One parameter semi-groups, London Math. Soc. Monographs No 15, Academic Press, London, 1980.
