J. BOURGAIN

Walsh subspaces of L^p-product spaces

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 4, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

WALSH SUBSPACES OF L^p-PRODUCT SPACES

J. BOURGAIN
(Université de Bruxelles)

Exposé No IV

16 Novembre 1979

PRELIMINAIRE

Abstract : An extension is obtained of certain properties of the classical Walsh subspaces of the L^p-spaces on the Cantor group.

1. PRELIMINARIES

Let us start by recalling the classical Khintchine-inequalities for the Rademacher functions (r_i) on $[0,1]$.

Proposition 1 : For each $1 \le p < \infty$ there is a constant $0 < k_p < \infty$ such that

$$k_p^{-1}(\sum_i a_i^2)^{1/2} \le \|\sum_i a_i\, r_i\|_p \le k_p(\sum_i a_i^2)^{1/2}$$

holds, for any finite sequence (a_i) of reals.

The reader is supposed to be familiar with the notions of martingale and martingale difference sequence, which are explained in [2]. We also refer to [2] for the following result, due to Burkholder and Gundy.

Proposition 2 : Let $1 < p < \infty$. Then there exists a constant $0 < b_p < \infty$ such that

$$b_p^{-1}\|(\sum_i d_i^2)^{1/2}\|_p \le \|\sum_i d_i\|_p \le b_p\|(\sum_i d_i^2)^{1/2}\|_p$$

holds, for any martingale difference sequence (d_i) in L^p.

Let $1 \le p \le \infty$ be fixed.

For given subspaces X of $L^p(\mu)$ and Y of $L^p(\nu)$, let $X \otimes Y$ be the subspace of $L^p(\mu \otimes \nu)$ generated by the functions $f \otimes g$ where $f \in X$ and $g \in Y$. If moreover $U : X \to L^p(\mu')$ and $V : Y \to L^p(\nu')$ are bounded linear operators, then $U \otimes V : X \otimes Y \to L^p(\mu' \otimes \nu')$ is defined by taking $(U \otimes V)(f \otimes g) = U(f) \otimes V(g)$. It is indeed easily verified that $U \otimes V$ is still an operator and in fact $\|U \otimes V\| = \|U\| \cdot \|V\|$.

2. WALSH SUBSPACES OF $L^p(G)$.

The results of this section are known and can be found in [3] for instance. However, since they are important for what follows, we also include proofs here.

$G = \{1,-1\}^N$ is the Cantor-group equipped with the Haar-measure m, which is the product measure $\otimes_i m_i$ of the measures m_i on $\{1,-1\}$ with $m_i(1) = \frac{1}{2} = m_i(1)$.

The i^{th} Rademacher function r_i on G is defined by $r_i(g) = g_i$ for all $g \in G$. To each finite subset S of N corresponds a Walsh function $w_S = \prod_{i\in S} r_i$ and this system of Walsh functions generated $L^p(G)$ for any $1 \le p < \infty$.

Following [3], define for each positive integer k the linear space W_k generated by the functions w_S where $|S| = k$ and the linear space Y_k generated by $\bigcup_{j=0}^{k} W_j$.

The next result shows that on each Y_k all L^p-norms $(1 \le p < \infty)$ coincide

Proposition 3 : For each $1 \le p < \infty$, there exists a constant $K_p < \infty$ such that

$$\|f\|_2 \le K_p^k \|f\|_p \quad \text{if} \quad 1 \le p \le 2 \quad \text{and} \quad f \in Y_k \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

and

$$\|f\|_p \le K_p^k \|f\|_2 \quad \text{if} \quad 2 \le p < \infty \quad \text{and} \quad f \in Y_k \quad (k = 0,1,2,\dots) \quad .$$

Proof : We may restrict ourselves to the case $2 \le p < \infty$. The inequality for $1 < p < \infty$ follows then from a duality argument using the self-duality of the Y_k-spaces and for $p = 1$ we use the classical Hölder trick.
If $2 \le p < \infty$, we prove the inequalities for $K_p = k_1 b_p$ inductively on k.
The case $k = 0$ is obvious.
Now assume the inequality correct for Y_k and let $f \in Y_{k+1}$. Then f can be written in the form

$$f = f_o + \sum_{n>0} g_n \otimes r_n \qquad (*)$$

where f_o is a constant function and g_n a member of Y_k only depending on the coordinates $1 \le i < n$. Since (*) is the sum of a martingale difference sequence, prop. 2 gives

$$\|f\|_p \leq b_p \|(f_o^2 + \sum_{n>0}{}' g_n^2)^{1/2}\|_p$$

and hence

$$\|f\|_p \leq k_1 b_p \int \|r_o(w) f_o + \sum_{n>0}{}' r_n(w) g_n\|_p dw \quad .$$

Since $r_o(w) + \Sigma' r_n(w) g_n$ is in Y_k for each w, the induction hypothesis yields

$$\|f\|_p \leq K_p^{k+1} \|(f_o^2 + \sum_{n>0} g_n^2)^{1/2}\|_2 = K_p^{k+1} \|f\|_2 \quad ,$$

completing the proof.

As a straightforward consequence of prop. 3, we find

Proposition 4 : 1. For $1 \leq p < \infty$ and $k = 0,1,2,\ldots$, the closure Y_k^p of Y_k in $L^p(G)$ is a Hilbert space and for fixed k, the Y_k^p $(1 \leq p < \infty)$ consist of the same functions.

2. For $1 < p < \infty$ and $k = 0,1,2,\ldots$, Y_k^p is complemented in $L^p(G)$ by the orthogonal projection, whose L^p-norm is bounded by K_p^k.

3. WALSH-SUBSPACES OF L^p-PRODUCT SPACES.

In this section, (μ_i) is a fixed sequence of probability spaces. For each $1 \leq p \leq \infty$ and each i, let R_i^p be the subspace of $L^p(\mu_i)$ consisting of the mean zero functions. For finite subsets S of N, take $R_S^p = \bigotimes_{i \in S} R_i^p$. For each k, W_k^p will be the subspace of $L^p(\bigotimes_i \mu_i)$ generated by the R_S^p with $|S| = k$ and Y_k^p the space generated by the W_j^p $(0 \leq j \leq k)$.
Thus the W_k^p $(k = 0,1,2,\ldots)$ generate $L^p(\bigotimes_i \mu_i)$ for $1 \leq p < \infty$.

Lemma 5 : 1. If $1 \leq p \leq \infty$ and $0 \leq \delta \leq 1$, then $\|a + \delta f\|_p \leq \|a + f\|_p$ for any scalar a and $f \in L^p$ with $\int f = 0$.

2. For each $1 < p < \infty$, there exists some $\delta_p = \delta$, $0 < \delta \leq 1$ such that $\|a - \delta f\|_p \leq \|a + f\|_p$ for any scalar a and $f \in L^p$ with $\int f = 0$.

Proof : 1. If $p' = \dfrac{p}{p-1}$ and $g \in L^{p'}$ with $\|g\|_{p'} = 1$, take $h = \delta g + (1 - \delta) \int g$. Since $\|h\|_{p'} \leq 1$, we get

$$\|a + f\|_p \geq \langle a + f, h\rangle = a \int g + \delta \langle f, g\rangle = \langle a + \delta f, g\rangle \quad .$$

Hence $\|a + \delta f\|_p \leq \|a + f\|_p$.

2. For $p = 2$, any $0 \leq \delta < 1$ works. The case $1 < p < 2$ follows from the case $2 < p < \infty$, using a standard duality argument. For $2 < p < \infty$, it suffices to prove the result if p is an even integer. We can then indeed apply the Riesz-Thorin interpolation theorem (see [4]) in order to deal with the general case. So assume p of the form $p = 2q$ where q is some positive integer. We claim that it is possible to find some $\delta > 0$, satisfying

$$(1 - \delta x)^{2q} + 2q\ \delta x \leq (1 + x)^{2q} - 2qx \qquad (*)$$

for any real number x.
By binomial expansion, it is easily seen that

$$(1 - \delta x)^{2q} + 2q\ \delta x \leq 1 + 4^q(\delta^2\ x^2 + \delta^{2q}\ x^{2q})$$

and

$$(1 + x)^{2q} - 2qx \geq (1 - |x|)^{2q} + 2q\ |x| \quad .$$

Now, it is an easy calculus exercise to show the existence of some $\tau > 0$ for which

$$(1 - t)^{2q} + 2q\ t \geq 1 + \tau(t^2 + t^{2q})$$

holds, whenever t is a positive real.
Combining these facts leads to (*) for some $\delta > 0$.
It follows from (*) that for $f \in L^{2q}$, $\int f = 0$

$$\int (1 - \delta f)^{2q} \leq \int (1 + f)^{2q}$$

and thus

$$\|1 - \delta f\|_p \leq \|1 + f\|_p \quad .$$

If $a \neq 0$ is a scalar, we get

$$\|a - \delta f\|_p = |a|\ \|1 - \delta \tfrac{f}{a}\|_p \leq |a|\ \|1 + \tfrac{f}{a}\|_p = \|a + f\|_p$$

completing the proof.

We are now able to show the following proposition :

<u>Proposition 6</u> : For all $1<p<\infty$, there is a constant $0<C_p<\infty$ so that for each k.

1. The orthogonal projection in $L^p(\otimes_i \mu_i)$ on Y_k^p is bounded in p-norm by C_p^k.
2. If $f\in Y_k^p$ and $f = \sum'_{|S|=k} f_S$ where $f_S\in R_S^p$ for each S, then

$$C_p^{-k}\,\|(\Sigma\,|f_S|^2)^{1/2}\|_p \le \|f\|_p \le C_p^k\,\|(\Sigma\,|f_S|^2)^{1/2}\|_p \quad .$$

<u>Proof</u> : Fix $1<p<\infty$ and let K_p be the constant of prop. 3 and $\delta=\delta_p$ as in lemma 5. We use the same notations as in section 2. For each $i\in\mathbb{N}$, consider the operators

$$U_i\ :\ L^p(\mu_i)\longrightarrow L^p(\mu_i\otimes m_i)$$

and

$$V_i\ :\ L^p(\mu_i\otimes m_i)\longrightarrow L^p(\mu_i)$$

defined respectively by

$$U_i(a+f) = a+\delta(f\otimes r_i)$$

and

$$V_i((a+f)\oplus(b+g)) = \frac{a+b}{2}+\delta\,\frac{f-g}{2}$$

for scalars a, b and $f,g\in L^p(\mu_i)$ with $\int f=\int g=0$.

Since now, by the previous lemma, $\|a+\delta(f\otimes r_i)\|_p^p=\frac{1}{2}\,\|a+\delta f\|_p^p+\frac{1}{2}\,\|a-\delta f\|_p^p\le\|a+f\|_p^p$, we get $\|U_i\|_p=1$. In the same way, also $\|V_i\|_p=1$.

Take

$$U=\otimes_i U_i\ :\ L^p(\otimes_i \mu_i)\longrightarrow L^p(\otimes_i \mu_i\otimes m)$$

and

$$V=\otimes_i V_i\ :\ L^p(\otimes_i \mu_i\otimes m)\longrightarrow L^p(\otimes_i \mu_i)$$

for which still $\|U\|_p=1=\|V\|_p$ holds.

It is clear that if $f\in R_S^p$, then $U(f)=\delta^{|S|}\ f\otimes w_S$ and $V(f\otimes w_S)=\delta^{|S|}\ f$.

So if $f=\sum'_S f_S$ where $f_S\in R_S^p$ for each S, then

$$\|f\|_p\ge\|U(f)\|_p=\|\sum_S\delta^{|S|}\ f_S\otimes w_S\|_p \quad .$$

Hence, by prop. 4.2, we find by orthogonal projection in $L^p(G)$ on Y_k^p

$$\|f\|_p \geq K_p^{-k} \, \Big\| \sum_{|S|\leq k} \delta^{|S|} \, f_S \otimes w_S \Big\|_p \quad . \tag{*}$$

If in particular $f \in Y_k^p$, then applications of prop. 3 gives

$$\|f\|_p \geq K_p^{-k} \, \|(\Sigma \, \delta^{2|S|} \, |f_S|^2)^{1/2}\|_p$$

$$\geq (\delta \, K_p^{-1})^k \, \|(\Sigma \, |f_S|^2)^{1/2}\|_p \quad .$$

Now also $\qquad \Big\|\Big(\sum_{|S|\leq k} |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \geq$

$$(\delta \, K_p^{-1})^k \, \|\Sigma \, \delta^{-|S|} \, f_S \otimes w_S\|_p \geq (\delta \, K_p^{-1})^k \, \|\Sigma \, \delta^{-|S|} \, V(f_S \otimes w_S)\|_p =$$

$$(\delta \, K_p^{-1})^k \, \|f\|_p \quad .$$

From (*), we get for all $f \in L^p(\bigotimes_i \mu_i)$

$$\|f\|_p \geq K_p^{-2k} \, \Big\|\Big(\sum_{|S|\leq k} \delta^{2|S|} \, |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \geq$$

$$(\delta \, K_p^{-2})^k \Big\|\Big(\sum_{|S|\leq k} |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \geq (\delta^2 \, K_p^{-3})^k \, \Big\|\sum_{|S|\leq k} f_S\Big\|_p \quad .$$

So it remains to take $C_p = \delta_p^{-2} \, K_p^3$.

Our next aim is to study the subspaces Y_k^1 of $L^1(\bigotimes_i \mu_i)$. We will show that also on each Y_k^1 the norm is given by the square function. Thus

<u>Proposition 7</u> : For each k there exists a constant $0 < D_k < \infty$ such that for any $f = \sum_{|S|\leq k} f_S$, $f_S \in R_S^1$ for each S

$$D_k^{-1} \, \|(\Sigma \, |f_S|^2)^{1/2}\|_1 \leq \|f\|_1 \leq D_k \, \|(\Sigma \, |f_S|^2)^{1/2}\|_1 \quad .$$

<u>Proof</u> : We prove the inequalities by induction on k. For $k = 0$, they are obvious. Now assume the statement correct on Y_k^1 and let $D = D_k$.
Fix $f = \sum_{|S|\leq k+1} f_S$ with $f_S \in R_S^1$ for each S.
Assume N the disjoint union of sets P and Q and take $S' = S \cap P$, $S'' = S \cap Q$ for each $S \subset N$ with $|S| \leq k+1$. Applying the induction hypothesis and prop. 1 and prop. 3, we get

$$\Big\| \sum_{\substack{S\cap P\neq\emptyset \\ S\cap Q\neq\emptyset}} f_S \Big\|_1 = \Big\| \sum_{\substack{S'\neq\emptyset \\ S''\neq\emptyset}} f_{S'\cup S''} \Big\|_1$$

$$\Big\| \sum_{S'\neq\emptyset} \Big(\sum_{S''\neq\emptyset} f_{S'\cup S''} \Big) \Big\|_1$$

$$(\geq D^{-1}, \leq D) \ \Big\| \Big(\sum_{S'\neq\emptyset} \Big(\sum_{S''\neq\emptyset} f_{S'\cup S''} \Big)^2 \Big)^{1/2} \Big\|_1$$

$$(\geq D^{-1}, \leq Dk_1) \int \Big\| \sum_{S''\neq\emptyset} \Big(\sum_{S'\neq\emptyset} r_{S'}(w')\, f_{S'\cup S''} \Big) \Big\|_1 \, dw'$$

$$(\geq D^{-2}, \leq D^2 k_1) \int \Big\| \Big(\sum_{S''\neq\emptyset} \Big(\sum_{S'\neq\emptyset} r_{S'}(w')\, f_{S'\cup S''} \Big)^2 \Big)^{1/2} \Big\|_1 \, dw'$$

$$(\geq D^{-2}, \leq D^2 k_1^2) \iint \Big\| \sum_{\substack{S'\neq\emptyset \\ S''\neq\emptyset}} r_{S'}(w')\, r_{S''}(w'')\, f_{S'\cup S''} \Big\|_1 \, dw'\, dw''$$

$$(\geq D^{-2} K_1^{-2}, \leq D^2 k_1^2) \ \Big\| \Big(\sum_{\substack{S\cap P\neq\emptyset \\ S\cap Q\neq\emptyset}} |f_S|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_1 \quad .$$

Fix now a sequence (ε_i) of signs and define

$$g = \sum_{\substack{j\leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \ \sum_{|S|=j} f_S + \sum_{\substack{j\leq k+1 \\ j \text{ even}}} \ \sum_{|S|=j} \Big(\prod_{i\in S} \varepsilon_i \Big) f_S \quad .$$

Take $P=\{i\in N \ ; \ \varepsilon_i = 1\}$, $Q=\{i\in N \ ; \ \varepsilon_i = -1\}$ and $\mathcal{E}_P$, $\mathcal{E}_Q$ the conditional expectations with respect to the P and Q-variables respectively. It is easily verified that $\mathcal{E}_P[g] = \mathcal{E}_P[f]$ and $\mathcal{E}_Q[g] = \mathcal{E}_Q[f]$. By the preceding

$$\begin{aligned} \|g\|_1 &\leq \|\mathcal{E}_P[g]\|_1 + \|\mathcal{E}_Q[g]\|_1 + \|g - \mathcal{E}_P[g] - \mathcal{E}_Q[g]\|_1 \\ &\leq 2\,\|f\|_1 + D^2 k_1^2 \ \Big\| \Big(\sum_{\substack{S\cap P\neq\emptyset \\ S\cap Q\neq\emptyset}} |f_S|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_1 \\ &\leq 2\,\|f\|_1 + D^4 k_1^2 K_1^2 \ \Big\| \sum_{\substack{S\cap P\neq\emptyset \\ S\cap Q\neq\emptyset}} f_S \Big\|_1 \\ &\leq (2 + 3\, D^4 k_1^2 K_1^2)\ \|f\|_1 \quad . \end{aligned}$$

Hence, by the preceding we also have

$$\Big\| \sum_{\substack{j\leq k+1 \\ j \text{ even}}} \ \sum_{|S|=j} \Big(\prod_{i\in S} \varepsilon_i \Big) f_S \Big\|_1 \leq (2 + 3\, D^4 k_1^2 K_1^2) \ \Big\| \sum_{\substack{j\leq k+1 \\ j \text{ even}}} \ \sum_{|S|=j} f_S \Big\|_1 \qquad \text{(i)}$$

and a similar reasoning gives

$$\Big\| \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} \Big(\prod_{i\in S} \varepsilon_i\Big) f_S\Big\|_1 \le (2+3\,D^4\,k_1^2\,K_1^2)\,\Big\| \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S\Big\|_1 \,. \qquad \text{(ii)}$$

Since $\Big\| \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S + \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} f_S \otimes w_S\Big\|_1 \le (2+3\,D^4\,k_1^2\,K_1^2)\,\|f\|_1$,

integration on G and subtraction yields

$$\Big\| \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S\Big\|_1 \le 3(1+D^4\,k_1^2\,K_1^2)\,\|f\|_1 \qquad \text{(iii)}$$

and

$$\Big\| \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} f_S\Big\|_1 \le (4+3\,D^4\,k_1^2\,K_1^2)\,\|f\|_1 \,. \qquad \text{(iv)}$$

Combination of (i), (ii), (iii), (iv) and prop. 3 yields

$$\Big\|\Big(\sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 \le 12(1+D^4\,k_1^2\,K_1^2)^2\,K_1^{k+1}\,\|f\|_1$$

and

$$\Big\|\Big(\sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 \le 9(1+D^4\,k_1^2\,K_1^2)\,K_1^{k+1}\,\|f\|_1 \,.$$

Thus

$$\Big\|\Big(\sum |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 \le 21(1+D^4\,k_1^2\,K_1^2)^2\,K_1^{k+1}\,\|f\|_1 \,.$$

Since in (i) and (ii) the factors $\prod_{i\in S} \varepsilon_i$ may as well be written in the right members, also

$$\|f\|_1 \le \Big\| \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} f_S\Big\|_1 + \Big\| \sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S\Big\|_1 \le$$

$$(2+3\,D^4\,k_1^2\,K_1^2)\,K_1^{k+1}\,\Big\{\Big\|\Big(\sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 + \Big\|\Big(\sum_{\substack{j\le k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1\Big\}$$

$$\le 6(1+D^4\,k_1^2\,K_1^2)\,K_1^{k+1}\,\Big\|\Big(\sum |f_S|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 \,.$$

So we may take $D_{k+1} = 21(1+D_k^4\,k_1^2\,K_1^2)^2\,K_1^{k+1}$, which completes the proof.

REFERENCES

[1] D. Burkholder and R. Gundy : Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math. 124 (1970) 249-304.

[2] A. Garsia : Martingale inequalities, Seminar Notes on Recent Progress, Math. Lecture Note Series.

[3] H. Rosenthal : Biased coin convolution operators, The Altgeld Book. University of Illinois at Urbana, 1976.

[4] A. Zygmund : Trigonometric series, Cambridge University Press.

UNE NOUVELLE CLASSE D'ESPACES $\mathcal{L}^1$

Nous démontrons le résultat suivant, qui répond à une question posée par A. Pełczynski (cf. [2]).

Théorème 1 : La classe des espaces $\mathcal{L}^1$ séparables ne contenant pas de sous-espace L^1 ne possède pas d'élément universel.

Rappelons que l'espace de Banach B est universel pour la classe $\mathcal{K}$ d'espaces de Banach ssi chaque membre de $\mathcal{K}$ est isomorphe à un sous-espace de B. De plus, on dit qu'un opérateur T "fixe une copie de L^1" s'il existe un sous-espace isomorphe à L^1 sur lequel la restriction de T est un isomorphisme.Le point de départ est une construction assez générale d'espaces $\mathcal{L}^1$ à partir de certains opérateurs sur L^1.

Proposition 2 : Soit $T: L^1 \to L^1$ un opérateur ne fixant pas de copie de L^1 et E un sous-espace de L^1 tel que $Tf = f$ pour tout $f \in E$. Alors E se plonge dans un espace $\mathcal{L}^1$ ne contenant pas L^1.

Démonstration : Celle-ci est simple. On emploie la notation "d" pour la distance de Banach-Mazur. Fixons $\rho > 1$. On peut alors trouver une suite de sous-espaces U_i de L^1 qui satisfont les conditions suivantes :

1. Tout U_i est fini-dimensionnel, soit $d_i = \dim U_i$.
2. $d(U_i, \ell^1(d_i)) < \rho$.
3. $U_i \subset U_{i+1}$.
4. $T(U_i) \subset U_{i+1}$.

5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ est dense dans L^1.

6. $\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap U_i)$ est dense dans E.

Dans ce qui suit, $\oplus$ dénotera toujours la somme au sens ℓ^1. Posons

$$\mathfrak{X} = L^1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i$$

et soient $P : \mathfrak{X} \to L^1$ et $P_i : \mathfrak{X} \to U_i$ les projections. On définit aussi pour tout entier j

$$\mathfrak{X}_j = U_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{j} U_i$$

qui s'injectent dans $\mathfrak{X}$ de façon naturelle.
Pour tout j, soit $I_j : \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}$ l'opérateur suivant

$$\begin{cases} P\ I_j(x) = T\ P(x) \\ P_i\ I_j(x) = P_i(x) \qquad \text{pour } i = 1,\dots,j \\ P_{j+1}\ I_j(x) = P(x) - T\ P(x) - \sum_{i \leq j} P_i(x) \\ P_i\ I_j(x) = 0 \qquad \text{pour } i > j+1 \quad , \end{cases}$$

ce qui est possible par les conditions (3) et (4) sur les U_i. On remarque que

$$P(x) = (P + \sum_i P_i)\ I_j(x) \tag{*}$$

pour tout $x \in \mathfrak{X}_j$.

Les inégalités suivantes sont aisément vérifiées

$$\frac{1}{2}\ \|x\| \leq \|I_j(x)\| \leq 2(1 + \|T\|)\ \|x\|$$

et elles entraînent que I_j est un isomorphisme sur son image B_j. Plus précisément, on a

$$d(B_j, \mathfrak{X}_j) \leq 4(1 + \|T\|)$$

et donc

$$d(B_j, \ell^1(d_j)) \leq 4\rho(1 + \|T\|) \quad .$$

Nous prétendons que B_j est un sous-espace de B_{j+1}. Afin de voir cela, fixons x dans $\mathfrak{X}_j$ et considérons y donné par

$$\begin{cases} P(y) = P(x) \\ P_i(y) = P_i(x) \qquad \text{pour } i = 1, \dots, j \\ P_{j+1}(y) = P(x) - T\,P(x) - \sum\limits_{i \leq j} P_i(x) \\ P_i(y) = 0 \qquad \text{pour } i > j+1 \quad , \end{cases}$$

qui appartient clairement à $\mathfrak{X}_{j+1}$. On vérifie facilement que $I_{j+1}(y) = I_j(x)$. Donc $B_j \subset B_{j+1}$.

Posons $B = \overline{\bigcup_j B_j}$, le sous-espace de $\mathfrak{X}$ engendré par les B_j. Par ce qui précède, B est $\mathcal{L}^1_{\lambda+\varepsilon}$ pour $\lambda = 4\rho(1 + \|T\|)$.
L^1 s'injecte dans $\mathfrak{X}$ par identification avec la première coordonnée. Par hypothèse sur T, $I_j(x) = x$ pour tout $x \in E \cap U_j \hookrightarrow \mathfrak{X}_j$. Donc, $E \cap U_j$ est sous-espace de B_j et E sous-espace de B.

Il reste à montrer que L^1 ne s'injecte pas dans B si T ne fixe pas de copie de L^1. Il découle de (*) que

$$P(x) = T(P + \sum_i P_i)(x) \qquad \text{pour } x \in B$$

ce qui donne le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, hook, "I"] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{X} \arrow[r, "P + \sum_i P_i"] & L^1 \arrow[ddl, "T"] \\ & \mathfrak{X} \arrow[dl, "\oplus_i P_i"'] \arrow[dr, "P"] & & \\ \oplus_i U_i & & L^1 & \end{tikzcd}$$

où $\oplus_i U_i$ est isomorphe à ℓ^1.
Si B contient un sous-espace L^1, l'un des opérateurs $\oplus_i P_i \circ I$, $P \circ I$ fixera une copie de L^1 (cf. [3]). Puisque $\oplus_i P_i \circ I$ a son image dans $\oplus_i U_i$, $P \circ I$

et donc T fixera une copie de L^1, ce qui achève la démonstration.
Afin de démontrer le Th. 1, on va construire un système d'opérateurs sur L^1.
On commence par introduire un système de sous-espaces de L^1 sous-forme d'une suite transfinie (voir [2] pour détails et autres propriétés).
R_o est l'espace de dimension 1 engendré par les fonctions constantes.
Soit $\alpha < \omega_1$ et R_α obtenu. On pose alors $R_{\alpha+1} = R_\alpha \underset{1}{\oplus} R_\alpha$. Plus précisément, si R_α est sous-espace de $L^1(\Omega)$, $R_{\alpha+1}$ est le sous-espace de $L^1(\Omega\oplus\Omega)$ suivant

$$R_{\alpha+1} = \{f\oplus g \ ; \ f\in R_\alpha \quad \text{et} \quad g\in R_\alpha\} \quad .$$

Si γ est un ordinal limite et $R_\alpha \hookrightarrow L^1(\Omega_\alpha)$ obtenu pour tout $\alpha<\gamma$, R_γ sera le sous-espace de $L^1(\underset{\alpha<\gamma}{\otimes} \Omega_\alpha)$ défini par

$$R_\gamma = [\sum_\alpha{}' \ f_\alpha(t_\alpha) \ ; \ f_\alpha \in R_\alpha \quad \text{pour tout } \alpha<\gamma]$$

où $t = (t_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ est la variable produit.

La démonstration du résultat suivant est de nature ensembliste et peut être trouvée dans [2].

<u>Proposition 3</u> : Tout espace B séparable universel pour le système $(R_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ contient un sous-espace L^1.

On montre que chaque R_α se plonge dans un espace $\mathcal{L}^1$ ne contenant pas L^1. Ceci démontre Th. 1. Par la prop. 2, cette propriété sera une conséquence de la

<u>Proposition 4</u> : Pour tout $\alpha<\omega_1$ et pour tout $\lambda>1$, il existe un opérateur $T : L^1 \to L^1$, tel que

1. $\int Tf = \int f$ pour tout $f\in L^1$.
2. $T(1) = 1$.
3. $\|T\|_p \le \lambda$ pour tout $1\le p\le\infty$.
4. T ne fixe pas d'espace L^1.
5. $Tf = f$ si $f\in R_\alpha$.

(L'injection de R_α dans L^1 étant celle décrite précédemment.)

La construction de ces opérateurs se passe par induction sur

$\alpha < \omega_1$. Le cas $\alpha \Rightarrow \alpha+1$ étant presque trivial, montrons comment on procède pour les ordinaux limites.

Soit donc $\gamma < \omega_1$ ordinal limite et $\lambda > 1$. Soit pour tout $\alpha < \gamma$, $\lambda_\alpha > 1$ tel que $\lambda' = \prod_{\alpha<\gamma} \lambda_\alpha < \lambda$.

Par hypothèse, il existe pour tout $\alpha < \gamma$ un opérateur $S_\alpha : L^1(\Omega_\alpha) \to L^1(\Omega_\alpha)$ qui satisfait (1), (2), (3), (4), (5) par rapport à R_α et en posant $\lambda = \lambda_\alpha$. Considérons d'abord l'opérateur

$$S = \bigotimes_{\alpha<\gamma} S_\alpha : L^1(\bigotimes_\alpha \Omega_\alpha) \longrightarrow L^1(\bigotimes_\alpha \Omega_\alpha)$$

défini par $S(f_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes f_{\alpha_k}) = S_{\alpha_1}(f_{\alpha_1}) \otimes \dots \otimes S_{\alpha_k}(f_{\alpha_k})$.

S satisfait toujours (1) et (2) et aussi $\|S\|_p = \prod_{\alpha<\gamma} \|S_\alpha\|_p \leq \prod_{\alpha<\gamma} \lambda_\alpha = \lambda$.

Pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, soit $\Gamma_\varepsilon : L^1(\bigotimes_\alpha \Omega_\alpha) \to L^1(\bigotimes_\alpha \Omega_\alpha)$ l'opérateur donné par

$$\Gamma_\varepsilon = \bigotimes_{\alpha<\gamma} \gamma_{\alpha,\varepsilon}$$

où

$\gamma_{\alpha,\varepsilon} : L^1(\Omega_\alpha) \longrightarrow L^1(\Omega_\alpha)$ est l'opérateur $\gamma_{\alpha,\varepsilon}(f) = \varepsilon f + (1-\varepsilon) \int f$

(Γ_ε s'obtient en fait par convolution)

et $\tau_\varepsilon : L^1(\bigotimes_\alpha \Omega_\alpha) \longrightarrow L^1(\bigotimes_\alpha \Omega_\alpha)$ l'opérateur $\tau_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon} f + (1 - \frac{1}{\varepsilon}) \int f$.

Fixons $0 < \varepsilon < 1$ tel que $(\frac{2}{\varepsilon} - 1)\lambda' \leq \lambda$ et posons $T = \tau_\varepsilon \Gamma_\varepsilon S$.

Les conditions (1) et (2) sont satisfaites et

$$\|T\|_p \leq \|\tau_\varepsilon\|_p \|\Gamma_\varepsilon\|_p \|S\|_p \leq (\frac{2}{\varepsilon} - 1)\lambda' \leq \lambda \quad \text{pour tout } 1 \leq p < \infty .$$

Vérifions la condition (5). Si $f = \sum'_{\alpha<\gamma} f_\alpha$ où $f_\alpha \in R_\alpha \hookrightarrow L^1(\Omega_\alpha)$, on trouve

$$T(f) = \sum_\alpha T(f_\alpha) = \sum_\alpha \tau_\varepsilon \Gamma_\varepsilon S_\alpha(f_\alpha) = \sum_\alpha \tau_\varepsilon \Gamma_\varepsilon(f_\alpha) = \sum_\alpha \tau_\varepsilon \gamma_{\alpha,\varepsilon}(f_\alpha)$$

$$= \sum_\alpha (\frac{1}{\varepsilon} \gamma_{\alpha,\varepsilon}(f_\alpha) + (1 - \frac{1}{\varepsilon}) \int f_\alpha) = \sum_\alpha f_\alpha = f .$$

La condition (4) est alors une conséquence de la propriété suivante

<u>Proposition 5</u> : Soit (μ_i) une suite d'espaces probabilisés et $T_i : L^1(\mu_i) \to L^1(\mu_i)$ une suite d'opérateurs telle que

1. $\int T_i f = \int f$ pour tout $f \in L^1$.
2. $T_i(1) = 1$.
3. $\prod_i \|T_i\|_p < \infty$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

4. Les T_i ne fixent pas de sous-espace L^1.
Alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, la composition $I_\varepsilon \circ \underset{i}{\otimes} T_i : L^1(\underset{i}{\otimes} \mu_i) \longrightarrow L^1(\underset{i}{\otimes} \mu_i)$ ne fixe pas d'espace L^1 non plus.

La démonstration de la prop. 5 est assez technique et utilise la caractérisation, due à P. Enflo et T. Starbird, d'opérateurs sur L^1 fixant une copie de L^1 (voir [3]).

<u>Remarque</u> : En fait, on peut montrer que les espaces $\mathcal{L}^1$ construits de cette manière ont la propriété de Radon-Nikodym, ce qui donne l'amélioration suivante du Th. 1 :

Si B est séparable et universel pour la classe des espaces $\mathcal{L}^1$ séparables possédant la propriété de R-N, alors L^1 se plonge dans B.

REFERENCES

[1] J. Bourgain : A characterization of non-Dunford-Pettis operators on L^1, to appear.

[2] J. Bourgain, H.P. Rosenthal and G. Schechtman : An ordinal L^p-index for Banach spaces, with applications to complemented subspaces of L^p, Annals of Math., to appear.

[3] P. Enflo and T. Starbird : Subspaces of L^1 containing L^1, to appear in Studia Math. 65.

[4] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss : Examples of $\mathcal{L}^1$-spaces, to appear.

[5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri : Classical Banach Spaces, Springer MLN, vol. 338.

[6] H.P. Rosenthal : Convolution by a biased coin, the Altged Book 1975-76, University of Illinois.

[7] T. Starbird : Subspaces of L^1 containing L^1, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1976.
