SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. BOURGAIN

Complémentation de sous-espaces L^1 dans les espaces L^1

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 27, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A24_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

COMPLEMENTATION DE SOUS-ESPACES L^1 DANS LES ESPACES L^1

J. BOURGAIN

(Université de Bruxelles)

Exposé No XXVII

6 Juin 1980

Le problème qui nous intéresse est la question classique suivante :

<u>Problème 1</u> : Soit $T : L^1(\mu) \to L^1(\nu)$ un isomorphisme sur son image R. Existe-t-il toujours une projection de $L^1(\nu)$ sur R ?

Cette question est équivalente au problème des trois espaces pour les espaces $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^\infty$, c-à-d.

<u>Problème 2</u> : Soit Y un sous-espace de X. Les implications suivantes sont-elles vraies

i) $X \quad \mathcal{L}^1, \; Y \quad \mathcal{L}^1 \qquad X/Y \quad \mathcal{L}^1$?

ii) $X \quad \mathcal{L}^\infty, \; X/Y \quad \mathcal{L}^\infty \qquad Y \quad \mathcal{L}^\infty$?

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [4] et [5].

L. Dor a démontré [3] que si $\|T\| \, \|T^{-1}\| < \sqrt{2}$, Prob. 1 a une réponse affirmative. On va démontrer cependant que, en général, le Prob. 1 est négatif (et par conséquent aussi le Prob. 2).

En fait, on a l'énoncé local plus précis suivant :

<u>Théorème 1</u> : Il existe $0 < C < \infty$ tel que pour tout $\tau > 0$ et $D = D_\tau$ suffisamment grand, on peut trouver un sous-espace D-dimensionnel E de L^1 tel que $\Delta(E, \ell^1_D) \le C$ et $\|P\| \ge (\log \log D)^{1-\tau}$ pour toute projection de L^1 sur E.

Introduisons quelques notations. Pour N entier positif, G_N sera le groupe $\{1,-1\}^N$ muni de sa mesure de Haar (= mesure produit) m_N. Pour $1 \le n \le N$, la n-ième fonction de Rademacher r_n sur G_N est définie par $r_n(x) = x_n$ pour $x \in G_N$. A toute partie S de $\{1,2,\dots,N\}$ correspond une fonction de Walsh $w_S = \prod_{n \in S} r_n$ et le groupe dual $\hat{G}_N = \{w_S \, ; \, S \subset \{1,\dots,N\}\}$.

Pour $0 \le \varepsilon \le 1$ fixé, soit $\mu = \otimes_n \mu_n$ la mesure produit sur G_N, où $\mu_n(1) = \frac{1+\varepsilon}{2}$ et $\mu_n(-1) = \frac{1-\varepsilon}{2}$ pour tout $n = 1,\dots,N$ Dénotons $T_\varepsilon : L^1(G_N) \to L^1(G_N)$ l'opérateur de convolution par μ. Donc

$$(T_\varepsilon f)(x) = \int f(x \cdot y) \, \mu(dy) \quad .$$

T_ε est positive et de norme 1 et vérifie $T_\varepsilon(w_S) = \varepsilon^{|S|}\, w_S$, où $|S|$ est la cardinalité de S.

Enfin, pour chaque $\nu \in G_N$, on considère la fonction $e_\nu = \prod_{n=1}^{N} (1 + \nu_n\, r_n)$ sur G_N. On remarque que $\{e_\nu ; \nu \in G_N\}$ engendre $L^1(G_N)$ est isométriquement équivalent à la base $\ell^1_{2^N}$.

On usera des deux lemmes suivants qui s'obtiennent par vérification directe

<u>Lemme 1</u> : Si $f \in L^1(G_N)$, on a $\|T_\varepsilon\|_2 \le |\int f\, dm_N| + \varepsilon\, \|f\|_2$.

<u>Lemme 2</u> : Pour tout $K > 0$, on a l'inégalité

$$m_N[T_\varepsilon(e_\nu) > K] < K^{-1/2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{N/2}$$

pour tout $\nu \in G_N$.

On utilisera aussi le lemme classique suivant :

<u>Lemme 3</u> : Soient $f_1, f_2, \dots, f_d$ des fonctions dans $L^1(G_N)$ telles que pour tout $i = 1, \dots, d$

1. $$\int f_i\, dm_N = 0$$

2. $$\int_{A_i} |f_i|\, dm_N \ge \delta\, \|f_i\|_1 \quad \text{où} \quad A_i = [\,|f_i| \ge d\, \|f\|_1]$$.

Alors

$$\int_{G_N \times \dots \times G_N} |f_1(x_1) + \dots + f_d(x_d)|\, dx_1 \dots dx_d \ge \frac{\delta}{6} \sum \|f_i\|_1 .$$

Passons maintenant à la description de l'exemple.

Fixons N et d et introduisons les espaces suivants

$$X = \underbrace{L^1(G_N) \oplus \dots \oplus L^1(G_N)}_{d \text{ copies}} \qquad (\oplus = \text{somme } \ell^1)$$

$$Y = \underbrace{L^1(G_N) \times \dots = G_N)}_{d \text{ facteurs}} .$$

On considère aussi les applications

$$\alpha : X \longrightarrow \ell^1(d)$$

$$\beta : X \longrightarrow Y$$

et pour $0 < \varepsilon < 1$ fixé

$$\gamma_\varepsilon : X \longrightarrow X$$

définies par

$$\alpha(f_1 \oplus \dots \oplus f_d) = (\int f_1 \, dm_N, \dots, \int f_d \, dm_N)$$

$$\beta(f_1 \oplus \dots \oplus f_d) = \sum_{i=1}^{d} (f_i(x_i) - \int f_i \, dm_N)$$

où $(x_1, \dots, x_d) \in G_N \times \dots \times G_N$ est la variable produit et

$$\gamma_\varepsilon(f_1 \oplus \dots \oplus f_d) = (f_1 - T_\varepsilon f_1) \oplus \dots \oplus (f_d - T_\varepsilon f_d) \quad .$$

On a clairement $\|\alpha\| \leq 1$, $\|\beta\| \leq 2$ et $\|\gamma_\varepsilon\| \leq 2$.
Soit finalement $\Lambda_\varepsilon : X \to \ell^1(d) \oplus Y \oplus X$ l'application obtenue par somme directe $\alpha \oplus \beta \oplus \gamma_\varepsilon$. Donc $\|\Lambda_\varepsilon\| \leq 5$. Remarquons aussi que $\ell^1(d) \oplus Y \oplus X$ est isométriquement un espace L^1.
Démontrons maintenant :

<u>Lemme 4</u> : Soit $4d\varepsilon \leq 1$. Alors
1. $\|\Lambda_\varepsilon(\varphi)\| \geq \frac{1}{24} \|\varphi\|$ pour tout $\varphi \in X$;
2. Si R_ε est l'image de Λ_ε, on a $\Delta(R_\varepsilon, \ell^1_{d.2^N}) \leq 120$.

<u>Démonstration</u> : 2. découle trivialement de 1.
Supposons maintenant $\varphi : f_1 \oplus \dots \oplus f_d$ et posons pour tout $i = 1, \dots, d$

$$g_i = f_i - \int f_i \, dm_N$$

$$A_i = [\,|g_i| \geq d \, \|g_i\|_1] \quad , \quad B_i = G_N \backslash A_i$$

$$g_i' = g_i \, \chi_{A_i} \qquad \text{et} \qquad g_i'' = \chi_{B_i} \quad .$$

Posons $I = \{i = 1, \dots, d \, ; \, \|g_i'\|_1 > \frac{1}{4} \|g_i\|_1\}$ et $J = \{1, \dots, d\} \backslash I$.

L'application du lemme 3 nous donne

$$\|\beta(f_1 \oplus \cdots \oplus f_d)\| \geq \int \Big| \sum_{i \in I} g_i(x_i) \Big| \, dx_1 \cdots dx_d \geq \frac{1}{24} \sum_{i \in I} \|g_i\|_1 \quad .$$

D'autre part, en usant du lemme 1

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon \, g_i\|_1 &\leq \|T_\varepsilon \, g_i'\|_1 + \|T_\varepsilon \, g_i''\|_2 \\ &\leq \|g_i'\|_1 + \Big|\int g_i'' \, dm_N\Big| + \varepsilon d \, \|g_i\|_1 \\ &\leq 2 \, \|g_i'\|_1 + \varepsilon d \, \|g_i\|_1 \quad , \end{aligned}$$

d'où pour $i \in J$:

$$\|f_i - T_\varepsilon \, f_i\|_1 = \|g_i - T_\varepsilon \, g_i\|_1 \geq \|g_i\|_1 - \|T_\varepsilon \, g_i\|_1 \geq \frac{1}{4} \|g_i\|_1 \quad .$$

Donc

$$\|\gamma_\varepsilon(f_1 \oplus \cdots \oplus f_d)\| \geq \frac{1}{4} \sum_{i \in J} \|g_i\|_1 \quad .$$

En combinant les inégalités, on obtient

$$\|\Lambda_\varepsilon(\varphi)\|_1 \geq \sum \Big|\int f_i \, dm_N\Big| + \frac{1}{24} \sum \|g_i\|_1 \geq \frac{1}{24} \|\varphi\| \quad ,$$

comme voulu.

Notre but est de montrer que R_ε est mal complémenté dans $\ell^1(d) \oplus Y \oplus X$ pour un certain choix de N, d et ε.

<u>Lemme 5</u> : Soit $d \geq 4$, $N = d^{6d}$ et $\varepsilon = 1/4d$. Alors $\|P\| \geq \frac{d}{384}$ pour toute projection P de $\ell^1(d) \oplus Y \oplus X$ sur R.

<u>Démonstration</u> : Pour tout $\nu \in G_N$, on définit

$$\xi_\nu = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} T_{\varepsilon^j}(e_\nu) \qquad \text{et} \qquad A_\nu = [\xi_\nu > \tfrac{1}{4}] \quad .$$

Puisque

$$A_\nu \in \bigcup_{j=0}^{d-1} [T_{\varepsilon^j}(e_\nu) > \tfrac{1}{4}] \quad ,$$

l'application du lemme 2 donne

$$m_N(A_\nu) \le \sum_{j=0}^{d-1} 2\left(1-\frac{\varepsilon^{2j}}{4}\right)^{N/2} \ge 2d\left(1-\frac{\varepsilon^{2d}}{4}\right)^{N/2} < \frac{1}{2}$$

en usant des hypothèses sur d, N, ε.
Il en résulte que si

$$\psi_\nu = \xi_\nu - 1$$

alors

$$\|\psi_\nu\|_1 \ge \int_{A_\nu} \xi_\nu - \frac{1}{2} \ge \int \xi_\nu - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad .$$

Pour tout $i = 1,\dots,d$ et $\nu \in G_N$, soit φ^i_ν la fonction ψ_ν considérée comme élément de la i-ème composante $L^1(G_N)$ dans la somme directe X. Donc

$$\alpha(\varphi^i_\nu) = 0$$

$$\beta(\varphi^i_\nu) = \psi_\nu(x_i)$$

$$\gamma(\varphi^i_\nu) = \varphi^i_\nu - T_\varepsilon(\varphi^i_\nu) = \frac{1}{d}\,(e_\nu - T_{\varepsilon^d}(e_\nu)) \quad .$$

Supposons P une projection de $\ell^1(d) \oplus Y \oplus X$ sur R. On peut alors considérer l'opérateur $Q = \Lambda_\varepsilon^{-1}P$ de $\ell^1(d) \oplus Y \oplus X$ dans X. Par un résultat bien connu concernant les opérateurs entre espaces L^1, on trouve

$$\int \max_i \sum_\nu |\varphi^i_\nu| = \int \max_i \sum_\nu |Q\Lambda_\varepsilon(\varphi^i_\nu)| \le \|Q\| \int \max_i \sum_\nu |\Lambda_\varepsilon(\varphi^i_\nu)| \quad .$$

Par symétrie, $\sum_\nu |\varphi^i_\nu|$ est la fonction constante $\sum_\nu |\psi_\nu|$. D'autre part

$$\int \max_i \sum_\nu |\Lambda_\varepsilon(\varphi^i_\nu)| =$$

$$\int \max_i \sum_\nu |\psi_\nu(x_i)|\, dx_1 \dots dx_d + d\int \sum_\nu |\psi_\nu - T_\varepsilon(\psi_\nu)|\, dm_N =$$

$$\int \sum_\nu |\psi_\nu|\, dm_N + \int \sum_\nu |e_\nu - T_{\varepsilon^d}(e_\nu)|\, dm_N \quad .$$

Puisque $\|Q\| \le 24\,\|P\|$, on obtient l'estimation

$$d\int \sum_\nu |\psi_\nu|\, dm_N \le 24\,\|P\|\,\{\int \sum_\nu |\psi_\nu|\, dm_N + 2^{N+1}\}$$

d'où

$$\|P\| \ge \frac{d2^{N-2}}{24(2^{N+1} + 2^{N+1})} \ge \frac{d}{384} \quad .$$

Ceci termine la démonstration du théorème 1.

Remarques :

1) Suivant L. Dor, on définit de la façon suivante les modules d'intégrabilité locale et uniforme pour E sous-espace de $L^1(\mu)$:

$$\alpha(E,\rho) = \sup\{\alpha(f,\rho)\ ;\ f \in E\}$$

où

$$\alpha(f,\rho) = \inf\{\mu(A)\ ;\ \int_A |f|\, d\mu \geq \rho\, \|f\|_1\}$$

et

$$\beta(E,\rho) = \inf\{\mu(A)\ ;\ \int_A |f|\, d\mu \geq \rho\, \|f\|_1 \text{ pour tout } f \in E\} .$$

En usant des techniques exposées plus haut, on peut démontrer le résultat suivant :

Lemme 6 : Il existe une suite (E_n) de sous-espace de L^1 et des constantes $c > 0$ et $C < \infty$, telles que

1. $$\Delta(E_n, \ell^1(\dim E_n)) \leq C$$
2. $$\lim_{n\to\infty} \alpha(E_n, c) = 0 .$$
3. pour tout $\rho > 0$ $$\inf \beta(E_n, \rho) > 0 .$$

L. Dor avait remarqué que ceci mène à un sous-espace ℓ^1 de L^1 non complémenté.

2) On obtient de la même manière pour $1 < p < 2$ des sous-espaces ℓ^p_n de L^p mal complémentés (en fait, il s'agit des mêmes espaces du point de vue linéaire).

3) Le contre-exemple décrit ci-dessus laisse les deux questions suivantes ouvertes :

1. Quel est le supremum des $\lambda < \infty$ tels que pour tout isomorphisme $T : L^1(\mu) \to L^1(\nu)$ à image R, la condition $\|T\|\ \|T^{-1}\| \leq \lambda$ entraîne la complémentation de R ?
2. Pour $\lambda < \infty$ et d fixés, posons

$$p(\lambda,d) = \sup\{p(E)\ ;\ E \hookrightarrow L^1 ,\ \dim E = d \text{ et } \Delta(E,\ell^1(d)) \leq \lambda\}$$

ou $$p(E) = \inf\{\|P\| \; ; \; P : L^1 \to E \text{ projection}\} .$$

On ne semble pas avoir de bonnes estimations pour $p(\lambda, d)$. Est-il vrai que

$$\lim_{d\to\infty} \frac{p(\lambda, d)}{\sqrt{d}} = 0 \quad \text{pour tout } \lambda < \infty \ ?$$

4) On peut démontrer [2] que pour tout $\lambda < \infty$ il existe une constante $c > 0$ telle que tout sous-espace fini-dimensionnel E de L^1 vérifiant une des conditions

(a) $\Delta(E, \ell^1(\dim E)) \leq \lambda$

(b) $p(E) \leq \lambda$

possède un sous-espace F pour lequel $\dim F \geq c \dim E$, $\Delta(F, \ell^1(\dim F)) \leq c^{-1}$ et $p(F) \leq c^{-1}$.

REFERENCES

[1] J. Bourgain : A couterexample to the ℓ^1-complementation problem, à paraître.

[2] J. Bourgain : A remark on finite dimensional P_λ-spaces, Studia Math., à paraître.

[3] L. Dor : On projections in L^1, Annals of Math. 102 (1975) 463-474.

[4] J. Lindenstrauss, H.P. Rosenthal : The $\mathcal{L}^p$-spaces, Israel J. Math.

[5] J. Lindenstrauss. L. Tzafriri : Classical Banach spaces, Lecture Notes in Math., Springer 1973.
