L. Schwartz

Les semi-martingales et la théorie de la mesure

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 26, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

LES SEMI-MARTINGALES ET LA THEORIE DE LA MESURE

L. SCHWARTZ

Exposé No XXVI

30 Mai 1980

C'est Pellaumail [1] qui, le premier, a considéré les semimartingales comme définissant des mesures sur la tribu prévisible à valeurs dans l'espace L^0 des fonctions mesurables (théorème (3.2)). Les choses ont lentement progressé, et sont arrivées à un certain aboutissement définitif avec le théorème réciproque de Dellacherie (théorème 4.2)). Il y a de nombreux articles de Pellaumail et Métivier sur ce sujet.

§ 1. MESURES VECTORIELLES.

Soient Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$, et E un espace vectoriel topologique, métrisable pour simplifier, et complet. Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{O})$, à valeurs dans E, pour E Banach, est une fonction sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans E, dénombrablement additive. Elle est alors automatiquement bornée : $\{\mu(B) , B \in \mathcal{O}\}$ est une partie bornée de E. Mais il n'en est plus ainsi si B n'est pas localement convexe, et on a même besoin de rajouter la condition supplémentaire : l'enveloppe convexe de l'ensemble ci-dessus est bornée. On a alors une bonne théorie de l'intégration, et en particulier le "petit" théorème de convergence dominée de Lebesgue, ou théorème de la convergence simple bornée : si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes, $|\varphi_n| \leq 1$, convergeant simplement vers 0, $\mu(\varphi_n)$ converge vers 0. Mais alors, s'il est vrai que beaucoup de mesures sont données comme fonctions d'ensembles plus que comme fonctionnelles, et même la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ n'est donnée initialement que comme fonction d'intervalles, il y a intérêt à considérer cela comme une des manières de trouver une mesure, mais à donner la définition d'une mesure comme fonctionnelle :

(1.1) une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{O})$ à valeurs dans E, est une application linéaire de l'espace $B\mathcal{O}$ des fonctions boréliennes bornées, dans E, séquentiellement continue pour la convergence simple bornée, c-à-d. vérifiant le petit théorème de convergence bornée de Lebesgue.

Erik Thomas [2] a écrit de très intéressants articles sur ces intégrales vectorielles, et plus récemment Bichteler [3].

Il n'y a plus alors de condition de convexité, car la boule unité de $B\mathcal{O}$ est convexe, et $\mu \in \mathcal{L}(B\mathcal{O};E)$.

Pour E Banach, on introduit alors des μ^* de fonctions ≥ 0, et pour E quelconque d'autres fonctionnelles un peu plus compliquées, et on fait une théorie de l'intégration. Un borélien $B \in \mathcal{B}$ est μ-négligeable si $\mu(B') = 0$ pour $B' \in \mathcal{B}$, $B' \subset B$; un ensemble quelconque A est μ-négligeable s'il est contenu dans un borélien μ-négligeable ; une fonction réelle f est μ-mesurable si elle μ-pp. égale à une fonction borélienne. Pour l'intégrabilité, il y a intérêt à introduire la topologie de $\mathcal{L}^1(\mu)$ sur l'espace $B\mathcal{B}$: toute fonction $\varphi \in B\mathcal{B}$ définit une mesure produit $\varphi\mu$ par $\psi \mapsto (\varphi\mu)(\psi) = \mu(\varphi\psi)$, et φ_i converge vers 0 dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ ssi $\varphi_i\mu$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}_b(B\mathcal{B};E)$, i.e. ssi $\mu(\varphi_i\psi)$ converge vers 0 dans E, uniformément pour $\psi \in B\mathcal{B}$. $|\psi| \leq 1$. Alors $\mathcal{L}^1$ est plus ou moins le complété de $B\mathcal{B}$ pour cette topologie : on dira que f est μ-intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $B\mathcal{B}$, convergeant μ pp. vers f, et qui est de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\mu)$. L'ensemble $\mathcal{L}^1(\mu)$ des fonctions μ-intégrables est un espace vectoriel, $|f|$ est intégrable si f est intégrable, $\mathcal{L}^1(\mu)$ est complet, et son quotient $L^1(\mu)$ est métrisable complet (Fischer-Riesz). On a le théorème général de convergence dominée de Lebesgue : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-pp. vers f, $|f_n| \leq g$, f_n et g μ-intégrables, alors f est μ-intégrable, f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, et en particulier $\int f_n\, d\mu$ converge vers $\int f\, d\mu$. Les mesures produits $h\mu$ jouent un rôle particulièrement important, h réelle μ-intégrable ; f est $h\mu$ intégrable ssi hf est μ-intégrable, et alors $(h\mu)(f) = \mu(hf)$, en même temps que, pour les produits, $f(h\mu) = (fh)\mu$.

§ 2. MARTINGALES, MARTINGALES LOCALES, SEMI-MARTINGALES.

Comme toujours, Ω sera un ensemble, $\mathcal{O}$ une tribu sur Ω, λ une probabilité sur $\mathcal{O}$, $(\mathcal{T}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ ($\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$, nous voulons qu'il y ait un temps terminal, $+\infty$ ou tout autre !) une famille de tribus λ-mesurables et contenant toutes les parties λ-négligeables, croissante ($\mathcal{T}_t \supset \mathcal{T}_s$ pour $t \geq s$) et continue à droite ($\mathcal{T}_t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{T}_{t'}$, pour $t < +\infty$). Un processus réel X est une fonction réelle sur $\overline{\mathbb{R}}_t \times \Omega$, $X(t,\omega) \in \mathbb{R}$, adaptée : la variable aléatoire $X_t : t \mapsto X(t.\omega)$ est $\mathcal{T}_t$-mesurable. Le processus est dit cadlag (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si, pour λ-presque tout ω, la trajectoire $X(\omega) : t \mapsto X(t,\omega)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$, est cadlag. On ne distingue pas entre deux processus indistinguables, c-à-d. dont la trajectoire est la même pour λ-presque tout ω ; $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ sera dit λ-négligeable si sa projection sur Ω est λ-négligeable.

Une martingale réelle M est un processus réel cadlag, intégrable : M_t et λ-intégrable pour tout t, vérifiant l'égalité :

(2.1) $\mathbb{E}(M_t / \mathcal{T}_s) = M_s$ λ ps. pour $t \geq s$, ou

(2.1 bis) pour $A \in \mathcal{T}_s$, et $t \geq s$, $\int_A M_s \, d\lambda = \int_A M_t \, d\lambda$.

La plus usuelle des martingales continues (à trajectoires continues et pas seulement cadlag) est le mouvement brownien réel B, pour lequel $B_0 = 0$ λ ps., et $B_t - B_s$, pour $t \geq s$, est indépendant de la tribu $\mathcal{T}_s$, et suit une loi de Gauss sur $\mathbb{R}$, de paramètre $\sqrt{t-s}$, c-à-d. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2(t-s)} \frac{dx}{\sqrt{t-s}}$.

Un temps d'arrêt est, intuitivement, "la première fois qu'un évènement physique se produit". Par exemple, si X est un processus cadlag, A une partie borélienne de $\mathbb{R}$, le temps d'entrée T de X dans A, défini par

$$T(\omega) = \mathrm{Inf}\{t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \, ; \, X(t,\omega) \in A\}$$

(pris égal à $+\infty$ si $X(t,\omega)$ n'est jamais dans A) est un temps d'arrêt. En toute rigueur, un temps d'arrêt T est une fonction sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que, $\forall \, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $\{\omega \in \Omega \, ; \, T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{T}_t$. C'est une variable aléatoire (i.e. λ-mesurable) ; si X est un processus, X_T est $\omega \to X(T(\omega),\omega)$.

Les temps d'arrêt permettent d'arrêter le processus : si X est un processus, T un temps d'arrêt, X^T, processus arrêté, est :

$$(t,\omega) \longmapsto X(t,\omega) \quad \text{si} \quad t \leq T(\omega) \quad , \quad X(T(\omega),\omega) \quad \text{si} \quad t \geq T(\omega) \quad .$$

Un théorème fondamental de Doob dit que, si M est une martingale et T un temps d'arrêt, le processus arrêté M^T est encore une martingale. D'où la notion de martingale locale, où le mot local n'a pas un sens topologique :

(2.2) M est une martingale locale s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de d'arrêt, tendant stationnairement vers $+\infty$ (pour tout ω, $T_n = +\infty$ pour n assez grand), telle que chaque processus arrêté $M^{T_n} - M_0$ soit une martingale.

D'après le théorème de Doob, une martingale est une martingale locale, mais la réciproque n'est pas vraie. En particulier, si M est une martingale locale, M_t n'est plus nécessairement intégrable !

Un processus réel V est à variation finie si, pour λ-presque tout ω, $V(\omega)$ est à variation finie, $\int_{s \in]0,+\infty]} |dV_s(\omega)| < +\infty$. Alors on appelle semi-martingale réelle un processus réel X qui peut s'exprimer comme somme $X = V + M$ d'un processus à variation finie et d'une martingale locale. En général, cette expression n'est pas unique. Cependant, si X est continue, et si on impose à V et M d'être continues, avec $M_0 = 0$, elle est unique (une martingale locale continue à variation finie, nulle au temps 0, est $\equiv 0$). Mais nous ne supposerons pas nécessairement X continue. Les semi-martingales ont une remarquable stabilité ; par exemple, un théorème d'Ito dit qu'une fonction réelle C^2 d'un nombre fini de semi-martingales est une semi-martingale.

§ 3. L'INTEGRALE STOCHASTIQUE COMME MESURE SUR LA TRIBU PREVISIBLE.

Si V est un processus à variation finie, et H un processus réel assez régulier, on voit bien qu'on peut définir une intégrale pour tout ω

$$\int_{]0,+\infty]} H_s(\omega)\, dV_s(\omega) \quad \text{(intégrale en s pour } \omega \text{ fixé)} \quad .$$

Mais, si M est une martingale locale, c'est beaucoup moins clair, puisque la trajectoire $M(\omega)$ n'est pas en général à variation finie. Cependant, il existe une intégrale stochastique, due à Ito, si H est prévisible bornée.

On appelle tribu optionnelle la tribu engendrée par les processus réels cadlag, et tribu prévisible la sous-tribu $\mathcal{P}$ré engendrée par les processus réels continus. La tribu optionnelle est aussi engendrée par les épigraphes fermés $[T,+\infty] = \{(t,\omega) \; ; \; t \geq T(\omega)\}$ des temps d'arrêt, et la tribu prévisible par les épigraphes ouverts $]T,+\infty] = \{(t,\omega) \; ; \; t > T(\omega)\}$ des temps d'arrêt, a fortiori par les intervalles stochastiques $]S,T] = \{(t,\omega) \; ; \; S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$, S et T temps d'arrêt, $S \leq T$.

Il se trouve alors que, si H est réelle bornée prévisible, et X semi-martingale, on peut définir

$$(3.1) \qquad \int_{]0,+\infty]} H_s\, dX_s = \mu_X(H) \quad ^{(\bullet)} \quad ,$$

non pas séparément pour tout ω, mais globalement : $\mu_X(H)$ est une λ-classe de fonctions λ-mesurables réelles (λ-classe, pour l'égalité λ-pp. : on ne peut pas assigner à $\mu_X(H)$ une valeur en un point ω déterminé, mais

(•) Puisqu'on prend $\int_{]0,+\infty]}$, l'intégrale par rapport à X est la même que par rapport à $X - X_0$.

seulement λ pp.) ; $\mu_X(H) \in L^o(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$. La méthode est relativement longue. On pose $X = V + M$; c'est trivial pour V, il reste à définir $\mu_M(H)$; c'est relativement facile si M est une martingale de carré intégrable, $M_t \in \mathcal{L}^2(\lambda)$ pour tout t. Ensuite, un théorème profond dit que, si M est une martingale locale, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de temps d'arrêt, tendant stationnairement vers $+\infty$, telle que chaque processus arrêté M^{T_n} soit (de manière non unique) somme d'une martingale à variation finie et d'une martingale de carré intégrable. On peut donc définir $\mu_{M^{T_n}}(H)$; et,en passant à la limite stationnaire pour $n \to +\infty$, obtenir $\mu_M(H)$. On a consacré trop de temps, sans doute, dans le passé , à trouver des constructions plus ou moins simples de l'intégrale stochastique (elles ne sont jamais simples). Il en est resté, dans l'idée des non-probabilistes, une grande confusion ; ils ont tendance à croire que l'intégrale stochastique est quelque chose "qui se construit" (avec peine !) (et ont même peut-être peur que le résultat ne dépende du procédé de construction). Or il existe un théorème d'existence et d'unicité analogue à celui qui dit qu'il existe une mesure ≥ 0 (non finie) unique sur $\mathbb{R}$, la mesure de Lebesgue, dont la valeur sur un intervalle $[a,b]$, $a \leq b$, est $b - a$:

Théorème (3.2) (énoncé par Pellaumail [1]) : Si X est une semi-martingale réelle, il existe une mesure unique μ_X sur $\mathbf{\Omega} = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, muni de la tribu prévisible $\mathcal{P} = \mathcal{P}$ré, à valeurs dans $E = L^o(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$, telle que, si S et T sont des temps d'arrêt, $S \leq T$,

(3.3) $$\mu_X]S,T] = X_T - X_S \quad .$$

L'existence résulte de la construction indiquée ; l'unicité de ce que les intervalles stochastiques $]S,T]$ engendrent $\mathcal{P}$ré. Si $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $|H_n| \leq 1$, $\mu_X(H_n)$ converge vers 0 dans L^o, c-à-d. en probabilité, mais pas λ-pp. ; on peut toutefois en extraire une suite partielle qui converge λ-pp. On montre même que, si on pose

$$(H \bullet X)_t = \int_{]0,t]} H_s \, dX_s = \mu_X(1_{]0,t]} H) \quad ,$$

les $(H \bullet X)_t$ définissent une semi-martingale $H \cdot X$, nulle au temps 0, et c'est en général cette semi-martingale qui est appelé l'intégrale stochastique de H par rapport à X. Si alors $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 simplement, $|H_n| \leq 1$, non seulement $(H_N \bullet X)_t$ converge vers 0 dans L^0 pour tout t, mais $(H_n \bullet X)^* = \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} |(H_n \bullet X)_t|$ converge vers 0 dans L^0.

§ 4. CARACTERISATION DES SEMI-MARTINGALES COMME MESURES SUR LA TRIBU PREVISIBLE.

Si X est une semi-martingale, la mesure μ_X sur $(\mathcal{\Omega}, \mathcal{P})$ a les propriétés fondamentales suivantes :

(4.1)
0) elle est nulle sur $\{0\} \times \Omega$ (évident) ;
1) elle est adaptée dans le temps : si H est portée par $]0,t] \times \Omega$, $\mu_X(H) \in L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$ est $\mathcal{T}_t$-mesurable (évident) ;
2) elle est Ω-localisable : si H est portée par $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'$, $\Omega' \subset \Omega$, $\mu_X(H)$ est portée par Ω' (•) .

Ce qui est intéressant, c'est qu'on a la réciproque, de sorte que c'est une caractérisation des semi-martingales :

Proposition 4.2 (Dellacherie, voir [5]) : Si μ est une mesure $(\mathcal{\Omega}, \mathcal{P}) = (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, \mathcal{P}ré)$ à valeurs dans $E = L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$, nulle sur $\{0\} \times \Omega$, adaptée dans le temps et Ω-localisable, il existe une semi-martingale X, unique à l'indistinguabilité près, nulle au temps 0, telle que $\mu = \mu_X$.

Le principe de la démonstration est le suivant. Une technique de temps d'arrêt permet d'abord de montrer que $|X|$ est majorée par une variable aléatoire $M : \Omega \to \mathbb{R}_+$; il existe alors une probabilité $\lambda' \sim \lambda$ par rapport à laquelle M est intégrable. Ensuite, l'espace $B\mathcal{P}$ des fonctions bornées prévisibles étant isomorphe (c'est une C^*-algèbre de Banach commutative !) à un espace $C(K)$, un théorème de Maurey (voir [6]) dit que $\mu : B\mathcal{P} \to L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$ factorise par

$$B\mathcal{P} \longrightarrow L^2(\Omega,\mathcal{O},\lambda) \xrightarrow{(\alpha)} L^\infty(\Omega,\mathcal{O},\lambda) \quad ,$$

où (α) est la multiplication par une fonction α mesurable. Si alors nous posons $\lambda'' = \text{const.} \dfrac{\lambda'}{1+\alpha^2}$, on voit que $\mu'' : B\mathcal{P} \to L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda'')$ est linéaire continue de $B\mathcal{P}$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{O},\lambda'')$; l'image par μ de la boule unité de $B\mathcal{P}$ est bornée dans $L^2(\Omega,\mathcal{O},\lambda'')$; et $\lambda'' \sim \lambda'$. Ceci permet aisément de montrer que, quelle que soit la subdivision

---

(•) Ce résultat est déjà ancien, il a été démontré peu à peu, par morceaux. On trouvera une démonstration dans Schwartz [4], prop. (3.2), page 17.

$t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n = +\infty$, $\mathbb{E}_{\lambda''} \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbb{E}_{\lambda''}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})/\mathcal{T}_{t_i}|$ est borné , c-à-d. que X est ce qu'on appelle une quasi-martingale pour λ''. Et on sait qu'une quasi-martingale, majorée par une variable aléatoire intégrable, et continue à droite en probabilité, est définie par une semi-martingale unique. Il reste à appliquer le théorème de Girsanov (voir [7]) : si X est une semi-martingale pour $\lambda'' \sim \lambda$, elle l'est pour λ.

§ 5. APPLICATIONS DIVERSES.

Il ne faut naturellement pas confondre le processus semi-martingale X et la mesure μ_X qu'il définit, qu'on peut appeler dX : X est une primitive de dX, $X_t = \int_{]0,t]} dX_s = \mu_X(]0,t] \times \Omega)$; il y a la même relation entre X et dX qu'entre une fonction à variation finie **F** sur $\mathbb{R}$ et la mesure dF qu'elle définit, F est une primitive de la mesure dF.
La caractérisation ci-dessus a de nombreuses applications :

(5.1) Des théorèmes délicats, démontrés ces dernières années sur les semi-martingales, deviennent évidents avec cette conception.
Par exemple le théorème de Girsanov est évident, parce que $L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda) = L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda')$ si $\lambda' \sim \lambda$. Malheureusement on a eu besoin de Girsanov pour démontrer la proposition (4.2). Mais prenons le théorème de Girsanov généralisé : si λ' est <u>de base</u> λ, non nécessairement équivalente à λ, si X est une semi-martingale pour λ, elle l'est pour λ'. Ce n'est pas du tout trivial par la décomposition $X = V + M$, car une λ-martingale n'est pas une λ'-martingale. Mais c'est évident ici parce qu'il y a une application linéaire continue canonique $L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda) \to L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda')$. D'autre part, si X est une semi-martingale pour Ω, $\mathcal{O}$, λ, $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, et si elle est adaptée pour une famille de sous-tribus $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, elle est aussi une semi-martingale pour Ω, $\mathcal{O}$, λ, $(\mathcal{S}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$. Ce n'est pas du tout évident, parce que si $X = V + M$ est adaptée pour $(\mathcal{S}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, cela n'entraîne pas du tout que V et M le soient. Mais c'est évident ici, parce que μ_X est $\mathcal{S}$-adaptée et Ω-localisable. (En fait, c'est plus ou moins indirectement comme ça qu'on le démontrait.)

(5.2) Ce n'est que récemment (voir Jacod [8]) qu'au lieu d'intégrer par rapport à dX des processus prévisibles bornés, on a intégré des processus prévisibles intégrables. Cela a donné des surprises. Par exemple, si $X = M$ est une martingale locale, et H prévisible borné, $H \bullet M$ est une martingale locale ; mais si H est seulement dM-intégrable, $H \bullet M$

n'est plus nécessairement une martingale locale. La définition même des H dX-intégrables a soulevé quelques difficultés. Or il suffit maintenant de se reporter à une théorie générale de l'intégration. En particulier, on a le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(5.3) Emery [9] a introduit récemment une topologie sur l'espace $\mathcal{S}\mathcal{M}$ des semi-martingales, qui le rend métrisable et complet. Il en a donné de remarquables propriétés (notamment pour le dépendance continue de la solution d'une équation différentielle stochastique, par rapport aux données). Cette topologie n'a pas été "acceptée" aussi bien qu'elle l'aurait dû. Or c'est la topologie induite par l'espace $\mathrm{Mes}(\mathcal{\Omega}, \mathcal{O}, E) \subset \mathcal{L}_b(B\mathcal{O}; E)$; $\mathcal{L}_b(B\mathcal{O}; E)$, c'est bien connu, est métrisable complet ; le sous-espace Mes des applications continues sur $B\mathcal{O}$ pour la convergence simple bornée des suites est fermé, et le sous-espace des mesures adaptées et localisables est fermé dans Mes, donc $\mathcal{S}\mathcal{M}$ est complet.

(5.4) Les mesures ≥ 0 non partout définies (c-à-d. non nécessairement finies) sont familières (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$!). L'espace des mesures <u>réelles</u> non partout définies l'est moins. Cependant il existe, ainsi que celui des mesures non partout définies à valeurs dans un espace vectoriel topologique métrisable complet E. On ne considère que les mesures σ-finies ; grosso modo, si μ est une telle mesure, $\mathcal{\Omega} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{\Omega}_k$, $\mathcal{\Omega}_k \in \mathcal{O}$, $\mathcal{\Omega}_k$ est μ-intégrable et μ est définie partout sur $\mathcal{\Omega}_k$. La théorie est très simple. Par exemple, si f est une fonction borélienne réelle arbitraire sur $\mathbb{R}$, f(x)dx est une telle mesure, avec $\mathcal{\Omega}_k = [-k,+k] \cap \{|f| \leq k\}$. (De telles mesures n'ont pas en général de primitive, parce qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ n'a pas de raison d'être intégrable.) Plutôt que mesures non partout définies, je dirai mesures formelles. On appellera alors semi-martingale formelle une mesure formelle sur $(\mathcal{\Omega}, \mathcal{O}) = (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, \mathcal{P}\mathrm{ré})$, à valeurs dans $L^0(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, adaptée et localisable. Si X est une semi-martingale formelle, $\mu_X(H)$ a un sens pour H μ_X-intégrable, donc pas nécessairement pour toute H prévisible bornée ; mais, pour toute H prévisible, μ_X-intégrable ou non, $H \bullet X$ a toujours un sens, comme semi-martingale formelle, et c'est une semi-martingale vraie ssi H est dX-intégrable. La possibilité d'écrire $H \bullet X$ sans restriction "libère" complètement des conditions d'intégrabilité, et facilite un grand nombre d'opérations ; il n'y a jamais qu'à regarder, à la fin des calculs, si le résultat est une semi-martingale formelle ou vraie (un peu comme pour résoudre des équations aux dérivées partielles, en utilisant des dérivées-distribution, on ne se préoccupe de la régularité des solutions qu'après les avoir trouvées en tant que distributions).

Je rédige actuellement un article sur les semi-martingales formelles, qui paraîtra ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Pellaumail : Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer, Astérisque No 9, Société Mathématique de France (1973).

[2] E. Thomas : L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle, Annales Inst. Fourier XX, fasc. 2 (1970), 55-191 ; et aussi : On Radon maps with values in arbitrary topological vector spaces, and their integral extensions, Preprint (Department of Mathematics, Yale University).

[3] K. Bichteler : Stochastic integration and L^p-theory of semi-martingales, Preprint (University of Austin (Texas), Sept. 1979).

[4] L. Schwartz : Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes, Lecture Notes in Math. No 780, Springer 1980.

[5] C. Dellacherie et P.A. Meyer : Probabilités et Potentiels, chap. V à VIII, chap. VIII, § 4, p. 400, Hermann No 1385, Paris 1980.

[6] B. Maurey : Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, exposé No XII, Ecole Polytechnique, Paris ; et aussi : Théorèmes de factorisation pour des opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p, Astérisque No 11, Société Mathématique de France (1974).

[7] P.A. Meyer : Séminaire de Probabilités X, Strasbourg 1974-75, Lecture Notes in Math. No 511, Springer 1976, p. 376.

[8] J. Jacod : Calcul stochastique et problèmes de martingales, Lecture Notes No 714, Springer 1979.

[9] C. Dellacherie, P.A. Meyer, M. Weil : Séminaire de Probabilités XIII, Strasbourg 1977-78, Lecture Notes in Math. No 721, Springer 1979.
