SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. GUERRE

Quelques propriétés des espaces de Banach stables

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 21, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

QUELQUES PROPRIETES DES ESPACES DE BANACH STABLES

S. GUERRE

Exposé No XXI

18 Avril 1980

La notion d'espace stable a été introduite par B. Maurey et J.L. Krivine dans [7]. Le but initial de cette définition était l'extension d'un rédultat de D. Aldous [0] : "tout sous-espace de L^1 contient un sous-espace isomorphe à un ℓ_p $(1 \leq p < +\infty)$". Rappelons les deux résultats essentiels de [7] :

- tout sous-espace d'un espace stable contient un ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$;
- si E est stable, alors $L^p(E)$ aussi $(1 \leq p < \infty)$.

Il est alors naturel d'étudier d'autres propriétés des espaces stables et également de chercher à obtenir de nouveaux espaces stables.

Nous allons exposer ici quelques résultats qui contribuent à cette étude et qui ont été montré initialement par S. Guerre et J.T. Lapresté dans [5].

Rappelons les définitions et propriétés de [7] dont nous aurons besoin :

Un espace de Banach séparable est stable si pour toutes suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{m\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n + y_m\| = \lim_{\substack{m\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n + y_m\| .$$

Une fonction σ de E dans $\mathbb{R}^+$ est un type sur E s'il existe une suite bornée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\, x \in E, \qquad \sigma(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + a_n\| .$$

Si $\sigma(x) = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + a_n\|$, $\tau(x) = \lim\limits_{\substack{m\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + b_m\|$, on définit le produit de convolution $\sigma * \tau$ de σ et τ par :

$$\forall\, x \in E, \qquad (\sigma * \tau)(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{m\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + a_n + b_m\| .$$

Le produit $\lambda\sigma$ du type σ par une constante λ est défini par :

$$\forall\, x \in E, \qquad \lambda\sigma(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + \lambda\, a_n\| .$$

On dira enfin qu'un type σ est symétrique si

$$\forall\, x \in E, \qquad \sigma(x) = \sigma(-x) .$$

On sait d'après [7] que l'espace des types sur un espace stable est fermé pour la topologie de la convergence simple dans l'espace des fonctions de E dans $\mathbb{R}^+$, que l'ensemble des types τ tels que $\tau(0) \leq c$ est compact pour cette topologie et enfin que le produit de convolution $\sigma * \tau$ est commutatif et séparément continu sur l'espace des types muni de cette topologie.

Les différentes notions que nous allons introduire maintenant ont été initialement définies par A. Brunel et L. Sucheston dans [2]. Bien que la terminologie que nous employons ici soit différente de celle de [2], on vérifie aisément que ce sont bien les mêmes définitions.

On appelle <u>modèle étalé au-dessus de</u> E <u>associé à la suite</u> $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>par l'ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$, le complété de $E \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la semi-norme :

$$\|x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\| = \lim_{\substack{n_1 \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \cdots \lim_{\substack{n_k \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{n_i}\| .$$

Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite de Cauchy (ce que l'on supposera toujours par la suite), cette semi-norme est en fait une norme. Si σ est le type défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, ceci s'écrit encore

$$\|x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\| = (\alpha_1\sigma * \cdots * \alpha_k \sigma)(x)$$

et on dira que chaque vecteur e_i réalise le type σ (i.e. : $\sigma(x) = \|x + e_i\| = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + x_n\|$). La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite sera appelée <u>suite fondamentale</u> du modèle étalé et l'espace de Banach $[e_i , i \in \mathbb{N}]$ qu'elle engendre <u>modèle étalé de</u> E <u>associé à la suite</u> $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>par</u> $\mathcal{U}$. On dira enfin que le modèle étalé $[e_i , i \in \mathbb{N}]$ est <u>représenté</u> par le type σ.

<u>Remarque 1</u> : La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est <u>écartable</u> (cf. [8]) c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in E, \qquad \|x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\| = \|x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{n_i}\|$$

pour toute suite croissante d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
Si l'espace E est stable, cette suite est également <u>symétrique</u>, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in E, \qquad \|x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\| = \|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_{\sigma(i)}\|$$

pour toute permutation des entiers σ.
On en déduit que si E est stable et si la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>basique</u> (ce qui est en particulier le cas dès que toute sous-suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite basique) alors c'est une <u>base symétrique</u> donc inconditionnelle du modèle étalé $[e_i, i\in\mathbb{N}]$ qu'elle engendre.

I. PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES ESPACES STABLES.

Le lemme qui suit est fondamental dans cette étude :

<u>Lemme 1</u> : Si un espace stable E a un modèle étalé $[e_i, i\in\mathbb{N}]$ associé à une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que :

(a) la suite fondamentale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est K-équivalente à la base canonique d'un ℓ_p $(1\le p<+\infty)$

$$\left[\text{i.e.: } \frac{1}{K}\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{1/p} \le \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| = (\alpha_1\sigma * \dots * \alpha_n\sigma)(0) \le \le K\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{1/p}\right].$$

(b) le type σ sur E défini par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{U}$

$$\left[\text{i.e. : } \forall x\in E, \qquad \sigma(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \mathcal{U}}}\|x+x_n\|\right]$$

est symétrique.

Alors il existe une suite de blocs disjoints $u_n = \sum_{i=P_n+1}^{P_{n+1}}\lambda_i x_i$, avec $\lambda_i\ge 0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$, sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

(1) $\forall k\in\mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\ge k}$ est $(1+\frac{1}{k})$-équivalente à la base canonique de ℓ_p

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$, $$\frac{1}{K}\le\left(\sum_{i=P_n+1}^{P_{n+1}}\lambda_i^p\right)^{1/p}\le K .$$

<u>Démonstration</u> : Considérons la <u>classe conique</u> C engendrée par le type σ, c'est-à-dire l'adhérence dans l'espace des types symétriques sur E de l'ensemble des types de la forme $\lambda_1\sigma*\dots*\lambda_k\sigma$ pour $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{R}_+^{(\mathbb{N})}$ (cf. [7]

<u>1ère étape</u>. Montrons que tout type τ de C tel que $\tau(0)=1$ définit un modèle étalé dont la suite fondamentale est K^2-équivalente à la base canonique de ℓ_p, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{K^2}\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leq (\alpha_1\tau * \ldots * \alpha_k\tau)(0) \leq K^2\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p\right)^{1/p} .$$

Tout type τ de C tel que $\tau(0)=1$ s'écrit :

$$\tau(x) = \lim_{\substack{u \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \tau_n(x) \quad \text{où} \quad \left[\begin{array}{l} \tau_n = \lambda_1^{(n)}\sigma * \ldots * \lambda_{p_n}^{(n)}\sigma \ ; \ \lambda_i^{(n)} \geq 0 \\ \tau_n(0) = 1 \ . \end{array}\right.$$

La condition $\tau_n(0)=1$ implique grâce à l'hypothèse (a) du lemme 1 :

$$(*) \quad \frac{1}{K}\left(\sum_{i=1}^{p_n}(\lambda_i^{(n)})^p\right)^{1/p} \leq 1 = (\lambda_1^{(n)}\sigma * \ldots * \lambda_{p_n}^{(n)}\sigma)(0) \leq K\left(\sum_{i=1}^{p_n}(\lambda_i^{(n)})^p\right)^{1/p} .$$

D'autre part, la continuité séparée du produit de convolution des types implique que, si $(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$ sont des réels quelconques donnés, on ait :

$$(\alpha_1\tau * \ldots * \alpha_k\tau)(0) = \lim_{\substack{n_1 \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \ldots \lim_{\substack{n_k \to +\infty \\ \mathcal{U}}} (\alpha_1\tau_{n_1} * \ldots * \alpha_k\,\tau_{n_k})(0) .$$

L'hypothèse (a) du lemme 1 et la propriété (*) prouvent alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{K^2}\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leq \\ &\leq \frac{1}{K}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_{n_i}}|\alpha_i\,\lambda_j^{(n_i)}|^p\right)^{1/p} \leq (\alpha_1\,\tau_{n_1} * \ldots * \alpha_k\,\tau_{n_k})(0) \\ &\leq K\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_{n_i}}|\alpha_i\,\lambda_j^{(n_i)}|^p\right)^{1/p} \leq K^2\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p\right)^{1/p} . \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\frac{1}{K^2}\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leq (\alpha_1\tau * \ldots * \alpha_k\tau)(0) \leq K^2\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^p\right)^{1/p}$$

et donc que τ définit bien un modèle étalé dont la suite fondamentale est K^2-équivalente à la base canonique de ℓ_p.

2ème étape : Montrons que tout type minimal (cf. [7]) τ_o de C tel que $\tau_o(0)=1$ peut être défini par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions (1) et (2) du lemme 1 :
si τ_o est un type minimal de C tel que $\tau_o(0)=1$, on sait, d'après [7] qu'il existe $q \geq 1$ vérifiant :

$\forall\, x \in E,\ \forall\, (\alpha_1,\dots,\alpha_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$,

$$(\alpha_1\tau_o * \dots * \alpha_k\tau_o)(x) = \left[\left(\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^q\right)^{1/q} \tau_o \right](x) \quad .$$

D'après la première étape du raisonnement, on a nécessairement $p = q$. Alors, on sait (voir [7]) que toute suite de E définissant τ_o a une sous-suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui possède la propriété (1) du lemme. Pour terminer la démonstration, il nous suffit de montrer que τ_o peut être défini par une suite de E vérifiant la propriété (2) du lemme 1 : or comme $\tau_o \in C$ et $\tau_o(0) = 1$, il existe une suite de type $\tau_n = \lambda_1^{(n)}\sigma * \dots * \lambda_{p_n}^{(n)}\sigma$, avec $\lambda_i^{(n)} \geq 0$ et $\tau_n(0) = 1$, telle que :

$$\forall\, x \in E, \qquad \tau_o(x) = \lim_{\substack{n \longrightarrow +\infty \\ \mathcal{U}}} \tau_n(x)$$

$$= \lim_{\substack{n \longrightarrow +\infty \\ \mathcal{U}}} (\lambda_1^{(n)}\sigma * \dots * \lambda_{p_n}^{(n)}\sigma)(x) \quad .$$

Il est clair que le type τ_n peut être défini par la suite $(a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,, \qquad a_k^{(n)} = \lambda_1^{(n)} x_{n_k} + \dots + \lambda_{p_n}^{(n)} x_{n_{k+1}-1}$$

où n_k est une suite croissante d'entiers telle que $n_{k+1} - n_k = p_n + 1$. Grâce à la condition $\tau_n(0) = 1$, les coefficients $\lambda_i^{(n)}$ de cette suite vérifient de plus :

$$(*) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad \frac{1}{K} \leq \left(\sum_{i=1}^{p_n} (\lambda_i^{(n)})^p \right)^{1/p} \leq K \quad .$$

On a donc :

$$\forall\, x \in E, \qquad \tau_o(x) = \lim_{\substack{n \longrightarrow +\infty \\ \mathcal{U}}} \ \lim_{\substack{k \longrightarrow +\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + a_k^{(n)}\| \quad .$$

Par un procédé diagonal, on peut trouver une suite d'entiers $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\, x \in E, \qquad \tau_o(x) = \lim_{\substack{n \longrightarrow +\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + a_{k(n)}^{(n)}\| \quad .$$

Quitte à extraire une sous-suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(a^{(n)}_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les supports des u_n soient disjoints, et grâce à la condition (*), on a bien trouvé une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissant τ_o et vérifiant la condition (2) du lemme 1.

Remarque 2 : La démonstration de ce lemme reste vraie si on remplace ℓ_p $(1 \le p < +\infty)$ par c_o. Mais, comme c_o n'est pas stable, la conclusion devient : "un espace stable E n'a pas de modèle étalé dont la suite fondamentale est équivalente à la base canonique de c_o et dont le type associé est symétrique".

Ce lemme permet de montrer une propriété topologique des espaces stables :

Théorème 1 : Tout espace de Banach stable E est faiblement séquentiellement complet (i.e. toute suite de Cauchy faible de E converge faiblement dans E).

Démonstration : Supposons qu'un espace stable E ne soit pas faiblement séquentiellement complet. Alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, faiblement de Cauchy non convergente. Etant donné que E est stable, et que toute sous-suite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite basique (cf. [6] ou [10]), la suite fondamentale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tout modèle étalé associé à $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est basique symétrique. Or, il est facile de voir que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie ne peut pas avoir de sous-suite qui converge faiblement vers 0 (cf. [5]). Par suite, d'après [2] et [8], elle est de type ℓ_1^+ et par conséquent équivalente à la base canonique de ℓ_1.
Soit alors $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une bonne sous-suite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de [2] et posons $x_k = y_{n_k} - y_{n_{k-1}}$. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge faiblement vers 0, a un modèle étalé dont la suite fondamentale est $(e_{2n} - e_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ donc qui est encore équivalente à la base canonique de ℓ_1 et définit un type symétrique car : $\forall\, x \in E$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to+\infty} \|x + x_k\| = \|x + e_{2n} - e_{2n-1}\| = \|x + e_{2n-1} - e_{2n}\| = \lim_{k\to+\infty} \|x - x_k\| .$$

On peut donc appliquer le lemme 1 à la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$: il existe une suite de blocs $u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i\, x_i$ avec $\lambda_i \ge 0$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, 2-équivalente à la

base canonique de ℓ_1 et telle qu'il existe $K > 0$ vérifiant :
$\frac{1}{K} \leq \sum_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} \lambda_i \leq K$. Cette dernière condition implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 et on aboutit donc à une contradiction. Un espace stable E ne peut donc pas avoir de suite faiblement de Cauchy non convergente, ce qui prouve le théorème 1.

Remarque 3 : La démonstration du théorème 1 montre qu'en outre, aucun modèle étalé d'un espace stable E associé à une suite tendant faiblement vers 0 ne peut être isomorphe à ℓ_1 et cette propriété, d'après un résultat de [1], équivaut à dire que E possède la propriété de Banach-Saks-Rosenthal (BSR) : "De toute suite convergeant faiblement vers 0 de E, on peut extraire une sous-suite dont les moyennes de Césaro convergent fortement vers 0."

On a donc montré la proposition suivante :

Proposition 1 : Un espace stable E possède la propriété de Banach-Saks-Rosenthal (BSR).

Du théorème 1, on déduit encore un corollaire :

Corollaire : Un espace stable E est réflexif si et seulement s'il ne contient pas ℓ_1.

Démonstration : Ceci est vrai de tous les espaces faiblement séquentiellement complets.

Une deuxième conséquence du lemme 1 est le théorème suivant :

Théorème 2 : Si un espace stable E a un modèle étalé qui contient un sous-espace isomorphe à ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_p.

Démonstration : Nous allons montrer que si E a un modèle étalé qui contient ℓ_p, E a un modèle étalé dont la suite fondamentale est équivalente à la base canonique de ℓ_p et donc le type associé est symétrique. Il suffira d'appliquer le lemme 1 pour conclure.

<u>Lemme 2</u> : (1) Tout modèle étalé au-dessus de E est isométrique à un modèle étalé <u>basique</u> au-dessus de E (i.e. : dont la suite fondamentale est basique).

(2) Tout modèle étalé de E est isomorphe à un modèle étalé <u>basique</u> de E.

<u>Démonstration du lemme 2</u> : Il est facile de voir (cf. [5]) que si la suite fondamentale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un modèle étalé au-dessus de E n'est pas basique, elle converge faiblement vers un élément $\ell \neq 0$ et que de plus, elle peut être définie à partir d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge faiblement vers ℓ. Le modèle étalé au-dessus de E associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est engendré par définition par E et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et il est isométrique à l'espace $E\oplus[(e_i-e), i\in\mathbb{N}]$. Ce dernier espace est un modèle étalé basique au-dessus de E car il est associé à la suite $(x_n-e)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge faiblement vers 0 et donc telle que toutes ses sous-suites possèdent une sous-suite basique (cf. [10]), ce qui démontre (1).

On remarque alors que l'espace de Banach $[e_i, i\in\mathbb{N}]$ est isomorphe à l'espace de Banach $[(e_i-e), i\in\mathbb{N}]$, ce qui prouve (2).

Revenons à la démonstration du théorème 2 : grâce au lemme 2, on peut supposer que E a un modèle étalé basique qui contient ℓ_p.

Le lemme qui suit est tout-à-fait classique.

<u>Lemme 3</u> : Si un espace de Banach possédant une base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_p $(1\leq p<+\infty)$ ou c_o, il existe une suite de blocs disjoints $u_n=\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}}\lambda_i e_i$ sur la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est encore équivalente à la base canonique de ℓ_p $(1\leq p<+\infty)$ ou c_o.

La démonstration de ce lemme repose sur le fait que si un tel espace contient ℓ_p $(1\leq p<+\infty)$ ou c_o, il existe une suite de cet espace qui d'une part, est équivalente à la base canonique de ℓ_p $(1\leq p<+\infty)$ ou c_o et qui, d'autre part, converge vers 0 pour la convergence coordonnées par coordonnées sur les éléments de la base.

Sous les hypothèses du théorème 2, on voit que l'espace E a un modèle étalé basique $[e_i, i\in\mathbb{N}]$ tel qu'il existe une suite de blocs disjoints $u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i e_i$ qui soit équivalente à la base canonique de ℓ_p. Soit τ_n le type sur E défini par u_n soit :

$$\forall x \in E, \quad \tau_n(x) = \|x + u_n\| = \lim_{\substack{n_1 \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \cdots \lim_{\substack{n_k \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + \sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_k x_{n_k}\| .$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut supposer que cette suite converge vers un type τ sur E.
Par définition du produit de convolution, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de blocs disjoints sur $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'égalité suivante :

$$(\alpha_1\tau * \ldots * \alpha_k\tau)(0) = \lim_{\substack{n_1 \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \cdots \lim_{\substack{n_k \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|\alpha_1 u_{n_1} + \ldots + \alpha_k u_{n_k}\| .$$

Et ceci prouve que la suite fondamentale du modèle étalé associé à τ est équivalente à la base canonique de ℓ_p. Il est alors immédiat que le type symétrique $\tau * (-\tau)$ définit un modèle étalé possédant la même propriété et ceci, grâce au lemme 1 achève la preuve du théorème 2.

La remarque 2 qui suit le lemme 1 et le fait que la démonstration du théorème 2 s'étend sans aucune modification au cas de c_o prouvent alors le résultat suivant :

Proposition 2 : Aucun modèle étalé sur un espace stable E ne contient de sous-espace isomorphe à c_o.

Nous allons maintenant étudier la stabilité de certains espaces.

II. EXTENSIONS STABLES D'ESPACES STABLES.

Les extensions les plus naturelles d'espaces stables sont les modèles étalés au-dessus de ces espaces et on a le résultat suivant :

Théorème 3 : Tout modèle étalé au-dessus d'un espace stable est stable.

Démonstration : Soit E un espace stable.
En vertu du lemme 2 de la partie I, il suffit de montrer ce résultat pour les modèles étalés basiques au-dessus de E.
Soit donc $F = E \oplus [e_i, i\in\mathbb{N}]$ un modèle étalé basique au-dessus de E

et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de F.
Pour tous entiers m et n, on peut décomposer f_n et g_m sur E et $[e_i, i\in\mathbb{N}]$, soit :

$$\begin{cases} f_n = x_n + u_n \quad , \quad \text{avec } x_n \in E,\ u_n \in [e_i, i \in \mathbb{N}] \\ g_m = y_m + v_m \quad , \quad \text{avec } y_m \in E,\ v_m \in [e_i, i \in \mathbb{N}] \ . \end{cases}$$

On veut montrer :

(L) : $$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|f_n + g_m\| = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|f_n + g_m\| \ .$$

<u>1er cas</u> : Supposons que les supports des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sur la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

(S) : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{Supp}\ u_n < \mathrm{Supp}\ v_n < \mathrm{Supp}\ u_{n+1} < \mathrm{Supp}\ v_{n+1}$.

Alors on va montrer :

(L') : $\forall\ z \in F$, $$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|z + (x_n + u_n) + (y_m + v_m) =$$

$$= \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|z + (x_n + u_n) + (y_m + v_m)\| \ .$$

Pour cela, posons :

$\forall\ z \in F$, $\qquad z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in E$ et $z_2 \in [e_i, i\in\mathbb{N}]$

$\forall\ x \in E$, $$\sigma(x) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + x_n + u_n\|$$

$$\tau(x) = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|x + y_m + v_m\|$$

$$\mu_z(x) = \|x + z\| = \|x + z_1 + z_2\|$$

σ, τ, μ_z sont des types sur E. Or si z est à support fini sur $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$

et si n et m sont assez grands, les supports de z_2, u_n et v_m sont disjoints deux à deux et par conséquent, par définition du produit de convolution des types sur E, on a :

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|z_1 + z_2 + (x_n + u_n) + (y_m + v_m)\| =$$

$$= (\mu_z * \sigma * \tau)(0) = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|z_1 + z_2 + (x_n + u_n) + (y_m + v_m)\| \quad .$$

On a donc montré (L') pour les éléments z de F tels que z_2 soit à support fini sur $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces éléments formant une partie dense dans F, il est immédiat que (L') est vraie pour tout z de F.

<u>2ème cas</u> : Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ étant maintenant quelconques, on va se ramener au 1er cas de la façon suivante : d'après la proposition 2 de la partie I, l'espace $[e_i, i\in\mathbb{N}]$ ne contient pas c_o. Donc, comme la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est inconditionnelle (d'après la remarque 1), elle est aussi "boundedly complete", ce qui implique que de toutes suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $[e_i, i\in\mathbb{N}]$, on peut extraire des sous-suites $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui convergent coordonnées par coordonnées sur la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers des éléments u et v de $[e_i, i\in\mathbb{N}]$, (voir [9]). Etant donné que les suites $(u'_n - u)_{u\in\mathbb{N}}$ et $(v'_m - v)_{m\in\mathbb{N}}$ convergent coordonnées par coordonnées vers 0 dans $[e_i, i\in\mathbb{N}]$, par un procédé classique, on peut montrer qu'il existe des sous-suites $(u''_n - u)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v''_m - v)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(u'_n - n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_m - v)_{m\in\mathbb{N}}$ et des suites $(u^o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v^o_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition (S) du 1er cas, telles que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \|u^o_n - (u''_n - u)\| = 0 \\ \lim\limits_{m\to+\infty} \|v^o_m - (v''_m - v)\| = 0 \quad . \end{cases}$$

On en déduit donc, en appliquant la condition (L') aux suites $(u^o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v^o_m)_{m\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|(x_n + u_n) + (y_m + v_m)\|$$

$$= \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|(x_n + u^o_n) + (y_m + v^o_m) + u + v\|$$

$$= \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|(x_n + u^o_n) + (y_m + v^o_m) + u + v\|$$

$$= \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \mathcal{U}}} \|(x_n + u_n) + (y_m + v_m)\| \quad .$$

Et les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de départ vérifient bien la condition (L), donc l'espace F est stable.

Le résultat du théorème 3 reste vrai pour des espaces plus généraux que les modèles étalés au-dessus d'un espace.
Si E est un espace stable, on appellera T-extension de E tout espace de Banach $F = (E, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ engendré par E et une suite de vecteurs $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

(1) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un type σ_i sur E tel que :
$\forall\, x \in E,\ \sigma_i(x) = \|x + \xi_i\|$.

(2) F est le complété de $E \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme :

$$\|x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \xi_i\| = (\lambda_1\sigma_1 * \dots * \lambda_k\sigma_k)(x) \quad .$$

(N.B. : Un modèle étalé au-dessus de E est une T-extension de E pour laquelle $\sigma_i = \sigma$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.)
On dira encore qu'un tel espace F est une T-extension inconditionnelle de E si la suite $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de l'espace de Banach $[\xi_i, i \in \mathbb{N}]$ qu'elle engendre.

La démonstration de la proposition 2 s'étend à ce cadre plus général et on obtient alors :

Proposition 3 : Aucune T-extension d'un espace stable E ne contient de sous-espace isomorphe à c_o.

Il est clair que le théorème 3 s'étend aussi à ce cadre-là de la façon suivante :

Théorème 4 : Tout espace isométrique à une T-extension inconditionnelle d'un espace stable E est stable.

On connaît des conditions suffisantes pour qu'une T-extension d'un espace stable E soit inconditionnelle ou isométrique à une T-extension inconditionnelle.

<u>Proposition 4</u> : Soit $F=(E,\xi_1,\dots,\xi_n,\dots)$ une T-extension d'un espace stable E et soit σ_i le type réalisé par ξ_i pour tout $i\in\mathbb{N}$.
Si pour tout $i\in\mathbb{N}$

(1) ou bien σ_i est un type symétrique
ou bien σ_i est défini par une suite $(a_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge faiblement vers 0

alors la T-extension F est une <u>T-extension inconditionnelle</u> de E

(2) ou bien σ_i est un type symétrique
ou bien σ_i est défini par une suite $(a_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement

alors la T-extension F est isométrique à une T-extension inconditionnelle de E.

<u>Démonstration</u> : Si σ_i est un type symétrique, on a :

$$\forall\, x\in E, \qquad \|x+\xi_i\| = \|x-\xi_i\| \geq \|x\| \;.$$

Si σ_i est représenté par une suite $(a_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers 0 on a de même :

$$\forall\, x\in E, \qquad \|x+\xi_i\| = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \mathcal{U}}} \|x+a_n^{(i)}\| \geq \|x\| \;.$$

Donc sous les hypothèses (1), on a bien : $\forall\,(\lambda_i,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

$$\|\lambda_1\xi_1+\dots+\lambda_k\xi_k\| =$$

$$= \lim_{\substack{n_1\to+\infty\\ \mathcal{U}}} \dots \lim_{\substack{n_k\to+\infty\\ \mathcal{U}}} \|\lambda_1 a_{n_1}^{(1)}+\dots+\lambda_k a_{n_k}^{(k)}\|$$

$$\geq \|\lambda_1\xi_1+\dots+\lambda_{k-1}\xi_{k-1}\| =$$

$$= \lim_{\substack{n_1\to+\infty\\ \mathcal{U}}} \dots \lim_{\substack{n_{k-1}\to+\infty\\ \mathcal{U}}} \|\lambda_1 a_{n_1}^{(1)}+\dots+\lambda_{k-1} a_{n_{k-1}}^{(k-1)}\| \;,$$

ce qui prouve que la suite $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est basique. Comme E est stable, ceci prouve aussi qu'elle est basique inconditionnelle.
Si maintenant σ_i est représenté par une suite $(a_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers $a^{(i)}\neq 0$, on considère le type τ_i défini par la suite

$(a_n^{(i)} - a^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on peut représenter par le vecteur $\xi_i - a^{(i)}$ et on vérifie aisément que la T-extension F est isométrique à la T-extension G engendrée par E et la suite $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i - a^{(i)}, \xi_{i+1}, \ldots)$, ce qui, grâce à la propriété (1) prouve la propriété (2).

Note : Etant donné que tout espace stable E est faiblement séquentiellement complet (théorème 1), le seul cas (cf. [11]) où l'on ne sait pas si une T-extension est inconditionnelle ou non est le cas où l'un au moins des types σ_i n'est pas symétrique et est représenté par une suite de E ayant une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ_1. On ne sait pas non plus si une telle T-extension d'un espace stable est stable.

BIBLIOGRAPHIE

[0] D. Aldous : Article à paraître.

[1] B. Beauzamy : Banach-Saks properties and spreading models, Math. Scand. 44 (1979), 357-384.

[2] A. Brunel and L. Sucheston : On B-convex Banach spaces, Math. systems theory, vol. 7, No 4 (1973).

[3] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators (part I), Pure and Applied Maths., vol. VII.

[4] S. Guerre et J.T. Lapresté : Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach, Pub. Math. de l'Université Paris VI, (Janvier 1980).

[5] S. Guerre et J.T. Lapresté, Quelques propriétés des espaces stables, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris (1980).

[6] M. I. Kadets and A. Pełczynski, Basic sequences and biorthogonal system and norming sets in Banach spaces, Studia Math. 25 (1965), 297-323 (en russe).

[7] J.L. Krivine et B. Maurey : Espaces de Banach stables, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 289 (26/11/79), p. 679.

[8] J.T. Lapresté : Suites écartables dans les espaces de Banach, exposé No XX du Séminaire de Géométrie sur les espaces de Banach, Ecole Polytechnique, 1977-1978.

[9] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri : Classical Banach spaces I, Springer Verlag.

[10] V.D. Millman, Geometric theory of Banach spaces (part I), Russian Math. Surveys (1970-1971), p. 111.

[11] H.P. Rosenthal : A characterization of Banach spaces containing ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.) 71 (1974), 2411-2413.
