J. L. Krivine

Plongement de l^p dans certains espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 12, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

PLONGEMENT DE ℓ^p DANS CERTAINS ESPACES DE BANACH

J.L. KRIVINE

(Université Paris VII)

Exposé No XII

25 Janvier 1980

Dans un exposé précédent à ce séminaire [1], a été donnée une preuve d'un résultat d'Aldous [2] : tout sous-espace de L^1 de dimension infinie contient un espace ℓ^p pour un $p \in [1,2]$. Bien que la preuve semble reposer de façon essentielle sur des techniques probabilistes (mesures aléatoires), on peut en fait les éliminer complètement, et donner une démonstration plus "géométrique" ; peut-être plus simple que la preuve d'Aldous, elle permet aussi d'étendre le résultat à une classe d'espaces de Banach, qui peut avoir un certain intérêt en elle-même. Les démonstrations complètes seront données dans [3].

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, que nous supposons séparable pour simplifier. On dira que E est <u>stable</u> si, quelles que soient les suites x_m, y_n dans la boule unité de E, et les ultrafiltres $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{V}}} \|x_m + y_n\| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_m + y_n\| .$$

On peut énoncer une condition équivalente ne faisant pas intervenir d'ultrafiltre :

$$\sup_{m<n} \|x_m + y_n\| \geq \inf_{m>n} \|x_m + y_n\|$$

quelles que soient les suites x_m, y_n dans la boule unité de E.

<u>Un type</u> sur E est une fonction $\sigma : E \to \mathbb{R}_+$ de la forme $\sigma(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|a_n + x\|$, a_n étant une suite bornée de E. Les types forment un espace localement compact métrisable $\mathcal{T}$, (pour la topologie de la convergence simple sur E) dans lequel E (muni de la topologie forte) est plongé de façon naturelle. On peut donc écrire $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_n$.

Le type $\mathbb{O}$ est défini par $\mathbb{O}(x) = \|x\|$ pour $x \in E$. On définit deux opérations sur les types : si $\sigma \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit le type $\lambda\sigma$ par $\lambda\sigma = \mathbb{O}$ si $\lambda = 0$; $(\lambda\sigma)(x) = |\lambda|\ \sigma(x/\lambda)$ si $\lambda \neq 0$. Si $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_m$, $\tau = \lim_{\mathcal{V}} b_n$ sont deux types, on définit leur "produit de convolution" $\sigma * \tau$ en posant $(\sigma * \tau)(x) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{V}}} \|a_m + b_n + x\|$.

Le fait que cette opération est bien définie, commutative et associative est une conséquence facile de la stabilité de l'espace E.

L'opération $(\sigma,\tau) \to \sigma * \tau$ est continue en chacune des variables, mais n'est pas continue en les deux variables (si E est de dimension infinie).

<u>Exemples</u> : Tout espace de dimension finie est stable ; ℓ^2 est stable : car on a, si x_m, $y_n \in \ell^2$, $\|x_m\|$, $\|y_n\| \leq 1$:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{V}}} (\|x_m + y_n\|^2 - \|x_m\|^2 - \|y_n\|^2) =$$

$$2 \langle x,y\rangle = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} (\|x_m + y_n\|^2 - \|x_m\|^2 - \|y_n\|^2)$$

où x (resp. y) est la limite faible de la suite x_m (resp. y_n) suivant $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$).

L'espace L^1 est stable : car la fonction $\|x - y\|$ est de type négatif sur L^1, donc la fonction $\|x\| + \|y\| - \|x - y\|$ est de type positif. Il existe donc une application (non linéaire) $U : L^2 \to H$ où H est un espace de Hilbert, telle que $\|x\| + \|y\| - \|x - y\| = \langle U(x),U(y)\rangle$.
On en déduit $\|U(x)\|^2 = 2\|x\|$. Donc, si x_m, $y_n \in L^1$, $\|x_m\|$, $\|y_n\| \leq 1$, on a $\|U(x_m)\|,\|U(y_n)\| \leq \sqrt{2}$. Par suite, en désignant par ξ (resp. η) la limite faible de $U(x_m)$ (resp. $U(y_n)$) suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$), on a :

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{V}}} (\|x_m\| + \|y_n\| - \|x_m - y_n\|) = \langle \xi,\eta\rangle =$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} (\|x_m\| + \|y_n\| - \|x_m - y_n\|) \quad .$$

En fait, l'espace L^p est stable pour $1 \leq p < +\infty$. Plus généralement, si E est un espace stable, $L^p(E)$ en est un aussi pour $1 \leq p < +\infty$ (voir [3]). On vérifie aisément que c_o n'est pas stable.

- Etant donné un type σ sur E, on définit le modèle étalé sur E associé à σ : c'est l'espace vectoriel engendré par E et une suite $e_1,\ldots,e_n,\ldots$ muni de la semi-norme $\|x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| = (\lambda_1\sigma) * \ldots * (\lambda_n\sigma)(x)$ pour $x \in E$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ (ou plutôt le séparé complété de cet espace).
- Un type σ sur E est dit <u>symétrique</u> si on a $\sigma(x) = \sigma(-x)$ pour $x \in E$. Si E est un espace stable de dimension infinie, il existe

un type symétrique $\sigma \neq \mathbb{D}$ sur E : il suffit de poser $\tau = \lim_{\mathcal{U}} b_n$, où b_n est une suite bornée de E sans sous-suite convergente, et de poser $\sigma = \tau * (-\tau)$.
Un type symétrique $\sigma \neq \mathbb{D}$ sur E sera appelé ℓ^p-type si on a $(\alpha\sigma) * (\beta\sigma) = \gamma\sigma$ pour $\alpha, \beta > 0$ avec $\gamma = (\alpha^p + \beta^p)^{1/p}$.

On montre sans difficulté la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u> : S'il existe un ℓ^p-type sur E, alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p (à c_o si $p = +\infty$).

c_o n'étant pas stable (ni aucun espace isomorphe à c_o) on en déduit qu'il n'existe pas de ℓ^∞-type sur E. On est ramené à montrer l'existence d'un ℓ^p-type ; on utilise pour cela la caractérisation suivante :

<u>Proposition 2</u> : Pour qu'un type symétrique $\sigma \neq \mathbb{D}$ sur l'espace stable E soit un ℓ^p-type pour un $p \geq 1$, il faut et il suffit que, quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha\sigma * \beta\sigma = \gamma\sigma$.

Soit $\mathcal{S}$ l'espace localement compact (fermé dans $\mathcal{T}$) des types symétriques. Une partie C non vide de $\mathcal{S}$ sera appelée une <u>classe conique</u> si :

C est fermée et $\neq \{\mathbb{D}\}$

$\sigma \in C,\ \lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda\sigma \in C$

$\sigma, \tau \in C \Rightarrow \sigma * \tau \in C$

α, β étant deux réels ≥ 0, une suite $\sigma_n \in \mathcal{S}$ sera dite (α,β)-approximante si on a

$$|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(x) - (\beta\sigma_n)(x)| \leq 1/n \quad \text{pour } x \in E \text{ et } x \geq 1 \quad .$$

<u>Proposition 3</u> : Soient C une classe conique et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe $\beta \geq 1$ et une suite $\sigma_n \in C$ qui est (α,β)-approximante, avec $\sigma_n(0) = 1$.

Pour montrer cette proposition, on utilise le

<u>Lemme</u> : Soit E un espace de Banach, $T : E \to E$ un opérateur linéaire continu et λ un point frontière du spectre de T. Alors il existe une suite $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$, telle que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

En effet, on peut supposer $\lambda = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α,

$|\alpha| \leq \varepsilon/2$ tel que $T - \alpha I$ soit inversible. Puisque T n'est pas inversible, on a :

$$\|(T - \alpha I)^{-1}\|^{-1} < |\alpha| \leq \varepsilon/2 \quad .$$

Il existe donc $y \in E$, $\|y\| = 1$ tel que

$$\|(T - \alpha I)^{-1} y\| > 2/\varepsilon \quad .$$

Posons $x = (T - \alpha I)^{-1} y / \|(T - \alpha I)^{-1} y\|$. On aura

$$\|(T - \alpha I)x\| \leq \varepsilon/2 \quad , \quad \text{d'où } \|Tx\| \leq \varepsilon \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Preuve de la proposition 3</u> : On prend $\sigma \in C$, $\sigma(0) = 1$ et on considère la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendrant le modèle étalé associé à σ ; H étant l'espace fermé engendré par les e_n, On définit $T : H \to H$ en posant

$$Te_n = e_{2n} + \alpha\, e_{2n+1} \quad .$$

Comme e_n est une base inconditionnelle (de constante 1) symétrique, on a $\|u\| \leq \|Tu\| \leq (1 + \alpha)\|u\|$ pour $u \in H$. Par ailleurs $\|Tu - \xi_1\| \geq 1$ pour $u \in H$, donc T n'est pas inversible. Soit $\beta \geq 0$ un point frontière du spectre de T, et $u_n \in H$ tels que $\|u_n\| = 1$ et $\|Tu_n - \beta u_n\| \leq 1/n$. Chaque u_n peut être pris comme combinaison linéaire finie des e_i. Par suite, si on pose $\sigma_n(x) = \|u_n + x\|$ pour $x \in E$, on a $\sigma \in C$. On a

$$\big|\|Tu_n + x\| - \|\beta u_n + x\|\big| \leq \|Tu_n - \beta u_n\| \leq \frac{1}{n} \quad ,$$

ce qui donne $\quad |(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(x) - (\beta\sigma_n)(x)| \leq \frac{1}{n}$. C.Q.F.D.

En appliquant le théorème de Zorn à l'ensemble des classes coniques (ou plutôt à leurs traces sur $\{\sigma \in \mathcal{S} ; \sigma(0) = 1\}$) on voit qu'il existe une classe conique C minimale

<u>Proposition 4</u> : Soient C une classe conique minimale et $\alpha \geq 0$. Alors il existe $\beta \geq 1$ tel que tout point de C soit limite d'une suite (α, β)-approximante d'éléments de C.

On prend dans C une suite σ_n qui est (α, β)-approximante avec $\sigma_n(0) = 1$; β étant ainsi fixé, soit C' l'ensemble des limites des suites

(α,β)-approximantes convergentes d'éléments de C. On vérifie que C' est une classe conique, ce qui donne le résultat cherché car $C' \subset C$ et C est minimale.

On pose $\mathcal{S}_1 = \{\sigma \in \mathcal{S}\ ;\ \sigma(0) \leq 1\}$ qui est un espace compact. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ et $a \in \Delta$ (partie dénombrable dense de E) on définit la fonction $\psi_{\alpha,a} : \mathcal{S}_1 \to \mathbb{R}_+$ en posant $\psi_{\alpha,a}(\sigma) = (\sigma * \alpha\sigma)(a)$. La fonction $(\sigma,\tau) \to (\sigma * \alpha\tau)(a)$ étant séparément continue sur $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_1$ est de première classe de Baire sur cet espace. Il en résulte que $\psi_{\alpha,a}$ est de première classe de Baire sur $\mathcal{S}_1$, donc sur le sous-espace $\{\sigma \in C\ ;\ 0 < \sigma(0) < 1\}$ qui est ouvert dans C, et est donc un espace de Baire.
Il existe donc un point $\tilde{\sigma}$ de cet espace qui est point de continuité pour toutes les fonctions $(\psi_{\alpha,a})_{\alpha\in\mathbb{Q}_+}$ qui forment une famille dénombrable de fonctions de première classe de Baire.
Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+$; d'après la proposition 4, il existe $\beta \geq 1$ et une suite $\sigma_n \in C$, (α,β)-approximante et tendant vers $\tilde{\sigma}$; donc $\psi_{\alpha,a}(\sigma_n) \to \psi_{\alpha,a}(\tilde{\sigma})$. Or $|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(a) - (\beta\sigma_n)(a)| \to 0$, et $(\beta\sigma_n)(a) \to (\beta\tilde{\sigma})(a)$. Il en résulte que $(\tilde{\sigma} * \alpha\tilde{\sigma})(a) = (\beta\tilde{\sigma})(a)$ pour tout $a \in \Delta$ d'où $\tilde{\sigma} * \alpha\tilde{\sigma} = \beta\tilde{\sigma}$. D'après la proposition 2, on en déduit que $\tilde{\sigma}$ est un ℓ^p-type.

La proposition 1 donne alors le théorème suivant qui généralise le résultat d'Aldous :

<u>Théorème</u> : Tout espace stable de dimension infinie contient un ℓ^p, pour un $p \geq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Maurey : Tout espace de L^1 contient un ℓ_p, d'après D. Aldous, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1979-1980, Exposés No I-II, Ecole Polytechnique, Palaiseau (France).

[2] D. Aldous : Subspaces of L^1 via random measures, (preprint).

[3] J.L. Krivine, B. Maurey : Espaces de Banach stables, (à paraître).
