

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. SAMUEL

Sur la reproductibilité des espaces l_p

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 26, p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979___A22_0

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : BCOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

SUR LA REPRODUCTIBILITE DES ESPACES ℓ_p

C. SAMUEL

(U.E.R. Marseille-Luminy)

RESUME Dans ce travail on étudie les propriétés de reproductibilité des espaces ℓ_p dans les produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach. (*)

1 - Introduction .

Deux espaces de Banach E et F sont isomorphes s'il existe une application linéaire T de E sur F et deux réels $0 < a \leq b$ tels que pour tout $x \in E$

$$a \|x\| \leq \|T(x)\| \leq b \|x\| .$$

Si E est un espace de Banach nous notons B_E la boule unité fermée de E et nous notons E' le dual topologique de E .

Rappelons que si E et F sont deux espaces de Banach, la norme ϵ sur $E \otimes F$ est définie par

$$\|u\|_{\epsilon} = \sup \{ |(\varphi \otimes \Psi)(u)| ; \varphi \in B_{E'} \text{ et } \Psi \in B_{F'} \}$$

et la norme π est définie par

$$\|u\|_{\pi} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| ; u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\} .$$

Nous notons $E \otimes_{\epsilon} F$ l'espace $E \otimes F$ muni de la norme ϵ , $\widehat{E \otimes F}$ le complété de $E \otimes_{\epsilon} F$, $E \otimes_{\pi} F$ l'espace $E \otimes F$ muni de la norme π et $\widehat{E \otimes F}$ le complété de $E \otimes_{\pi} F$.

Le symbole ℓ_{∞} notera ici l'espace des suites de scalaires qui convergent vers 0 muni de la norme sup. (habituellement noté c_0).

L'objet de ce travail est de montrer que si pour un espace de Banach E $\ell_p \widehat{\otimes} E$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q , $p < q \leq \infty$, alors E' a un sous-espace isomorphe à ℓ_q et si $\ell_p \widehat{\otimes} E$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_r , $1 \leq r < p$, alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_r . Pour obtenir ces résultats nous donnons tout d'abord une interprétation de $\ell_p \widehat{\otimes} E$ comme

(*) Cet article doit paraître dans *Mathematica Scandinavica*.

espace de suites d'éléments de E . Nous caractérisons ensuite les r pour lesquels ℓ_r est isomorphe à un sous-espace de $\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q$. De cette caractérisation nous déduisons que les résultats précédents ne peuvent pas être améliorés. Nous établissons ensuite que si pour un ordinal dénombrable α et un espace de Banach E , l'espace $C(\alpha; E)$ des fonctions continues de $\langle 1, \alpha \rangle$ dans E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q , $1 \leq q < \infty$, alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Etant donné $1 \leq p \leq \infty$ nous convenons de noter p' le réel défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ avec la convention $p' = \infty$ si $p = 1$ et $p' = 1$ si $p = \infty$.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'un espace de Banach E , on note $[x_n]_{n=1}^{\infty}$, le sous-espace fermé engendré par les vecteurs x_n , $n = 1, 2, \dots$.

Pour les définitions et propriétés classiques on pourra se reporter à [5] et [9].

2 - Etude de $\ell_p \widehat{\otimes} E$.

Soient E un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$; on note pour $1 \leq p < \infty$

$$sl_p(E) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \ x_n \in E \text{ et } \forall \varphi \in E' \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty \right\}$$

et pour $p = \infty$ $sl_{\infty}(E) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \ x_n \in E \text{ et } \forall \varphi \in E' \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = 0 \right\}$.

Il est immédiat que pour $1 \leq p \leq \infty$ $sl_p(E)$ est un espace vectoriel.

Remarques :

1) Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in sl_p(E)$ on a

$$\sup \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}; \varphi \in B_{E'} \right\} < \infty \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

et $\sup \left\{ |\varphi(x_n)|; \varphi \in B_{E'} \text{ et } n=1, 2, \dots \right\} < \infty$ si $p = \infty$.

Supposons $1 \leq p < \infty$, le cas $p = \infty$ se traite avec des modifications évidentes. Pour chaque entier m nous notons

$$U_m = \left\{ \varphi \in B_{E'}; \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq m \right\}.$$

Il est immédiat de vérifier que U_m est un sous-ensemble absolument convexe et fermé de B_{E_1} et que $B_{E_1} = \bigcup_m U_m$; il est clair, d'après le théorème de Baire, que 0 est point intérieur de U_m d'où le résultat.

2) Pour $x = (x_n)_n \in sl_p(E)$ notons

$$\|x\| = \sup \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; \varphi \in B_{E_1} \right\} \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

et $\|x\| = \sup \{ |\varphi(x_n)| ; \varphi \in B_{E_1} \text{ et } n = 1, 2, \dots \}$ si $p = \infty$;

on définit ainsi une norme sur $sl_p(E)$. Il est immédiat de vérifier que, muni de cette norme, $sl_p(E)$ est un espace de Banach. On trouve une étude des espaces $sl_p(E)$ dans [7] exposé n°9.

3) $l_p \otimes_{\epsilon} E$ est isométrique à un sous-espace de $sl_p(E)$. Notons $(e_m)_m$ la base canonique de l_p . Donnons-nous

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i \in l_p \otimes E$$

Nous avons pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$a_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_i(m) e_i .$$

Soit $\Psi \in B_{E_1}$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varphi(a_i) \Psi(y_i) \right| ; \varphi \in B_{l_{p'}} \right\} &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \Psi(y_i) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_i(m) \varphi(e_m) \right) \right| ; \varphi \in B_{l_{p'}} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i(m) \Psi(y_i) \right) \varphi(e_m) \right| ; \varphi \in B_{l_{p'}} \right\} \\ &= \begin{cases} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^n a_i(m) \Psi(y_i) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < \infty . \\ \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n a_i(m) \Psi(y_i) \right| ; m=1, 2, \dots \right\} \text{ si } p = \infty . \end{cases} \end{aligned}$$

Il est à remarquer que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i(m) y_i = 0$

$$\text{donc} \quad \|u\|_{\epsilon} = \left\| \left(\sum_{i=1}^n a_i(m) y_i \right)_m \right\|$$

Nous concluons alors que nous définissons bien une application

$$T : \ell_p \otimes_{\epsilon} E \rightarrow s\ell_p(E)$$

en posant pour $u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i$, $T(u) = (\sum_{i=1}^n a_i^{(m)} y_i)_m$

et que T ainsi définie est linéaire et isométrique. Par cette application nous identifions $\ell_p \otimes_{\epsilon} E$ à un sous-espace de $s\ell_p(E)$.

4) Pour chaque entier $n = 0, 1, 2, \dots$ notons

$$P^n : s\ell_p(E) \rightarrow s\ell_p(E)$$

l'application linéaire continue qui à $x = (x_i) \in s\ell_p(E)$ associe $P^n(x) = (y_i)_i$ où $y_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $y_i = x_i$ pour $i \geq n+1$. Notons aussi $P_n = I - P^n$.

On note : $F_p = \{x \in s\ell_p(E) ; \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = 0\}$,

F_p est visiblement un sous-espace fermé de $s\ell_p(E)$.

Nous allons établir que $\ell_p \otimes E$ est dense dans F_p . Vérifions tout d'abord que $\ell_p \otimes E \subset F_p$. Soit $u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i \in \ell_p \otimes E$; pour chaque entier m et pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$ nous notons :

$$a_i^m = \sum_{\ell=m+1}^{\infty} a_i^{(\ell)} e_{\ell}, \text{ nous avons alors clairement}$$

pour $m=0, 1, 2, \dots$ $P^m(T(u)) = T(\sum_{i=1}^n a_i^m \otimes y_i)$

donc $\|P^m(T(u))\| = \|\sum_{i=1}^n a_i^m \otimes y_i\|_{\epsilon} \leq \sum_{i=1}^n \|a_i^m\| \|y_i\|$

d'où le résultat. Pour achever de prouver que $\ell_p \otimes E$ est dense dans F_p il suffit de remarquer qu'étant donné $x = (x_1, \dots, x_M, 0, \dots) \in F_p$

on peut toujours trouver $a_1, \dots, a_k \in \ell_p$ et $y_1, \dots, y_k \in E$ tels que

$$T(\sum_{\ell=1}^k a_{\ell} \otimes y_{\ell}) = x$$

L'application T se prolonge en une application linéaire et isométrique de $\widehat{\ell_p \otimes E}$ sur F_p .

3 - Etude de $\ell_q \widehat{\otimes} X$.

Soit X un espace de Banach. Rappelons que $(\ell_q \widehat{\otimes} X)' = B(\ell_q, X)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $\ell_q \times X$ (cf. [3]) et qu'il existe une identification canonique entre $B(\ell_q, X)$ et $\mathcal{L}(\ell_q, X')$ l'espace des applications linéaires continues de ℓ_q dans X' , rappelons aussi que pour $1 < q \leq \infty$

$$s\ell_{q'}(X') = \mathcal{L}(\ell_q, X')$$

(cf. [7] exposé n°9). Soient pour $i = 1, 2, \dots, n$ $b_i = (b_i(m))_m \in \ell_q$, $x_i \in X$, $u = \sum_{i=1}^n b_i \otimes x_i$ et soit $\varphi = (\varphi_m)_m \in s\ell_{q'}(X')$, $1 < q \leq \infty$; la dualité canonique s'exprime alors par :

$$\varphi(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n b_i(m) \varphi_m(x_i).$$

Théorème. Soient $1 \leq q \leq \infty$ et X un espace de Banach, alors pour tout $u \in \ell_q \otimes X$ on a $\|u\|_{\pi} = \sup \{ |\varphi(u)| ; \varphi \in B_{\ell_{q'} \widehat{\otimes} X'} \}$.

Le résultat est bien connu pour $q = 1$ car nous savons que :

$$\ell_1 \widehat{\otimes} X = (X \oplus X \oplus \dots)_{\ell_1} \quad \text{et} \quad c_0 \widehat{\otimes} X' = (X' \oplus X' \oplus \dots)_{c_0} \quad (\text{cf. [3]}).$$

Dans ce qui suit nous supposons $1 < q \leq \infty$. Soit

$$u \in \ell_q \otimes X \quad \text{tel que} \quad \|u\|_{\pi} = 1$$

et soit $\delta > 0$ un réel arbitraire, il existe $\varphi \in s\ell_{q'}(X')$ tel que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(u) = 1$. Pour N assez grand on a $|P^N(\varphi)(u)| \leq \delta$ d'où le résultat puisque $\|\varphi - P^N(\varphi)\| \leq 1$. On déduit du théorème que $\ell_q \widehat{\otimes} X$ est canoniquement isométriquement isomorphe à un sous-espace de $(\ell_{q'} \widehat{\otimes} X')'$.

4 - Reproductibilité des espaces ℓ_q .

Le premier théorème que nous allons établir semble bien connu, comme nous n'avons pas de référence pour ce résultat que nous serons amenés à utiliser, nous en donnons une preuve rapide.

Soient E et F deux espaces de Banach, on munit $E \times F$ de la norme $\|(u, v)\| = \max(\|u\|, \|v\|)$.

Théorème 1 Soient E et F deux espaces de Banach et $1 \leq q \leq \infty$. E ou F contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q si et seulement si $E \times F$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Nous traitons le cas $1 \leq q < \infty$, pour le cas $q = \infty$ il suffit de faire des modifications évidentes.

Nous notons P_1 (resp. P_2) l'application $(u, v) \in E \times F \rightarrow u \in E$ (resp. $(u, v) \in E \times F \rightarrow v \in F$). Supposons que $E \times F$ ait un sous-espace isomorphe à ℓ_q , il existe alors $(f_i)_i$ une suite de $E \times F$ et deux réels $0 < a \leq b$ tels que pour tout entier n et toute famille a_1, \dots, a_n de scalaires nous ayons

$$a \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q} \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\| \leq b \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q} .$$

Supposons en outre que E ne contienne pas de sous-espace isomorphe à ℓ_q , on peut alors trouver $(X_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_i)_i$ telle que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|P_1(X_k)\|^{q'} \right)^{1/q'} \leq \frac{a}{2} \quad \text{si } q > 1$$

$$\text{et} \quad \sup_k \|P_1(X_k)\| \leq \frac{a}{2} \quad \text{si } q = 1 .$$

Nous aurons alors pour tout entier n et toute famille a_1, \dots, a_n de scalaires,

$$\|P_1\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|P_1(X_i)\| \leq \frac{a}{2} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q} \quad (\text{inégalité de Hölder})$$

donc $\left\| \sum_{i=1}^n a_i P_2(X_i) \right\| \geq a \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q}$, nous avons ainsi prouvé que F contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Remarque.

Nous avons prouvé que si $E \times F$ contient une suite-base $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique de ℓ_q alors il existe $(X_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_n)_n$ telle que $(P_1(X_k))_k$ ou $(P_2(X_k))_k$ soit équivalente à la base canonique de ℓ_q .

Théorème 2. Soient E et F deux espaces de Banach et $1 \leq q \leq \infty$. E ou F a un quotient isomorphe à ℓ_q si et seulement si $E \times F$ a un quotient isomorphe à ℓ_q

Supposons que $E \times F$ a un quotient isomorphe à ℓ_q ; soit $Q : E \times F \rightarrow \ell_q$ une application linéaire continue surjective, alors $T = Q^1 : \ell_{q^1} \rightarrow E^1 \times F^1$ est un plongement. Notons $i_E : E \rightarrow E \times F$ et $i_F : F \rightarrow E \times F$ les injections canoniques respectives. D'après la remarque précédente, il est toujours possible de trouver $(\varphi_n)_n$ une suite-base bloc normalisée de la base canonique de ℓ_{q^1} telle que par exemple :

$$i_E^1 \circ T : [\varphi_n]_{n=1}^\infty \rightarrow E^1$$

soit un plongement. Notons, pour $n = 1, 2, \dots$, $f_n = i_E^1(T(\varphi_n))$; il suffit alors d'appliquer un résultat de W. B. Johnson et H. P. Rosenthal (cf. [4]) qui affirme que si le dual E^1 contient une suite normalisée $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique ℓ_{q^1} et si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ pour la topologie $\sigma(E^1, E)$ alors E a un quotient isomorphe à ℓ_q .

Théorème 3 Soient E un espace de Banach et $1 \leq q < p \leq \infty$. Alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q si et seulement si $\ell_p \hat{\otimes} E$ contient un sous-espace isomorphe ℓ_q .

Nous conservons les notations du 2. Nous supposons que F_p contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q , il existe alors $(X_i)_i$ une suite de F_p et deux réels $0 < \lambda \leq \mu$ tels que pour tout entier n et toute famille a_1, \dots, a_n de scalaires

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q} \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i X_i \right\| \leq \mu \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q}.$$

Nous supposons que E ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ_q , alors, d'après le théorème 1, pour chaque entier m , $E \times \dots \times E$ (m fois E) ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Soit $0 < \epsilon < \frac{\lambda}{\mu}$; puisque $(X_i)_i$ est équivalente à la base canonique de ℓ_q et puisque $X_i \in F_p$ pour $i = 1, 2, \dots$, nous pouvons construire par récurrence $(Y_k)_k$ une suite-base bloc normalisé de $(X_i)_i$ et $n_0 = 0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$ une suite strictement croissante d'entiers tels que pour $k = 1, 2, \dots$

$$\|Y_k - (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k)\| \leq \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Soit, pour $k = 1, 2, \dots$

$$Z_k = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k),$$

Puisque $0 < \epsilon < \frac{\lambda}{\mu}$, $(Z_k)_k$ est une suite-base semi-normalisée de F_p équivalente à la base canonique de ℓ_q (cf. [1] théorème 1). Notons $K = \sup_k \|Z_k\|$ et pour $k = 1, 2, \dots$, notons $Z_k = (Z_{k,\ell})_\ell$ nous avons $Z_{k,\ell} = 0$ pour $\ell = 1, 2, \dots, n_{k-1}$ et $\ell \geq n_k + 1$.

Soit m un entier et a_1, \dots, a_m des scalaires, alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i Z_i \right\| &= \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p \left(\sum_{\ell=n_{i-1}+1}^{n_i} |\varphi(Z_{i,\ell})|^p \right)^{1/p} \right)^{1/p}; \varphi \in B_E \right\} \\ &\leq K \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

d'où une contradiction puisque $(Z_i)_i$ est équivalente à la base canonique de ℓ_q .

Théorème 4. Soient E un espace de Banach et $1 \leq q < p \leq \infty$. Alors E a un quotient isomorphe à ℓ_q si et seulement si $\ell_p \widehat{\otimes} E$ a un quotient isomorphe à ℓ_q .

Soit $T : \ell_p \widehat{\otimes} E \rightarrow \ell_q$ une application linéaire continue surjective et soit

$$r(T) = \inf \left\{ r > 0, \forall y \in \ell_q \exists x \in \ell_p \widehat{\otimes} E, T(x) = y \text{ et } \|x\| \leq r \|y\| \right\}.$$

Supposons que E n'a aucun quotient isomorphe à ℓ_q , nous allons établir que

(1) $\forall r > r(T), \forall \epsilon \in]0, 1[, \forall n, \exists x \in \ell_p \widehat{\otimes} E, x = P^n(x)$ et $\|x\| \leq r$ et $\|T(x)\| \geq \epsilon$.

Dans le cas contraire, il existe $r > r(T)$, $\epsilon_0 \in]0, 1[$ et un entier n_0 tels que pour $x \in \ell_p \widehat{\otimes} E$, $x = P^{n_0}(x)$ et $\|x\| \leq r$ entraîne $\|T(x)\| < \epsilon_0$. Soit $y \in B_{\ell_q}$, puisque $r > r(T)$ il existe $t \in \ell_p \widehat{\otimes} E$ tel que $\|t\| \leq r$ et $T(t) = y$. Notons $x = P_{n_0}(t)$ et $u = P^{n_0}(t)$, visiblement $P^{n_0}(u) = u$ et $\|u\| \leq \|t\| \leq r$ donc :

$$\|y - T(x)\| = \|T(u)\| < \epsilon_0.$$

Nous avons établi qu'il existe $\epsilon_0 \in]0, 1[$, un réel $r > 0$ et un entier n_0 tel que pour tout $y \in B_{\ell_q}$ il existe $x \in \ell_p \widehat{\otimes} E$ vérifiant $\|x\| \leq r$, $x = P_{n_0}(x)$ et $\|y - T(x)\| < \epsilon_0$; il est bien connu que cette propriété entraîne que $T(I_m(P_{n_0})) = \ell_q$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse sur E (cf. Théorème 3). L'affirmation (1) est bien établie.

De l'affirmation (1) on déduit immédiatement :

$$(2) \forall r > r(T), \forall n, \exists x \in \ell_p \widehat{\otimes} E, \exists m > n \text{ tels que } x = (P_m - P_n)(x), \|x\| \leq r \text{ et } \|T(x)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Notons pour $m = 0, 1, \dots, Q^m$ l'application linéaire de ℓ_q dans ℓ_q qui à $a = (\alpha_i)_i \in \ell_q$ associe $Q^m(a) = (\beta_j)_j$ où $\beta_j = 0$ pour $1 \leq j \leq m$ et $\beta_j = \alpha_j$ pour $j = m+1, m+2, \dots$; nous notons aussi $Q_m = I - Q^m$.

Fixons $r > r(T)$. On peut alors construire par récurrence $(n_k)_k$, $(m_k)_k$ deux suites strictement croissantes d'entiers, $(x_k)_k$ une suite d'éléments de $\ell_p \widehat{\otimes} E$ tels que $m_0 = n_0 = 0$ et

$$(3) \|x_k\| \leq r \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

$$(4) x_k = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(x_k) \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

$$(5) \|Q^{m_{k-1}}(T(x_k))\| \geq \frac{1}{2} \text{ et } \|Q^{m_k}(T(x_k))\| \leq \frac{1}{2^2} \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

Supposons $(n_i)_{0 \leq i \leq k}$, $(m_i)_{0 \leq i \leq k}$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ construits et vérifiant (3), (4) et (5); montrons que nous pouvons poursuivre. L'application $Q^{m_k} \circ T$ est une application linéaire continue surjective de $\ell_p \widehat{\otimes} E$ sur un espace de Banach isométrique à ℓ_q et $r(Q^{m_k} \circ T) \leq r(T)$; en substituant $Q^{m_k} \circ T$ à T dans (2) nous déduisons qu'il existe $x_{k+1} \in \ell_p \widehat{\otimes} E$ et $n_{k+1} > n_k$ tels que $\|x_{k+1}\| \leq r$, $x_{k+1} = (P_{n_{k+1}} - P_{n_k})(x_{k+1})$ et $\|Q^{m_k} \circ T(x_{k+1})\| \geq \frac{1}{2}$.

Nous fixons alors $m_{k+1} > m_k$ tels que $\|Q^{m_{k+1}}(T(x_{k+1}))\| \leq \frac{1}{2}$. Notons pour chaque entier k , $y_k = T(x_k)$.

Quitte à extraire une sous-suite de $(y_k)_k$ on peut supposer que $(y_k)_k$ est une suite de Cauchy pour la topologie $\sigma(\ell_q, \ell_{q'})$. Notons pour

$k = 1, 2, \dots$ $z_k = y_{2k-1} - y_{2k}$ et $v_k = x_{2k-1} - x_{2k}$ on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0 \text{ pour la topologie } \sigma(\ell_q, \ell_{q'})$$

et pour $k = 1, 2, \dots$ $\|z_k\| \geq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1} - y_{2k})\| \geq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k})\| - \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1})\|$
 $\geq \frac{1}{2}$ d'après (5).

Quitte à extraire de $(z_k)_k$ une sous-suite on peut supposer que $(z_k)_k$ est équivalente à la base canonique de ℓ_q . Il existe alors $C > 0$ tel que pour tout entier n et toute famille a_1, \dots, a_n de scalaires on a :

$$\|\sum_{i=1}^n a_i z_i\| \geq C (\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q}$$

De (3) et (4) nous déduisons que :

$$\|\sum_{i=1}^n a_i v_i\| \leq 2r (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$$

donc, puisque $T(v_i) = z_i$, $(\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q} \leq \frac{2r \|T\|}{C} (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$ ce qui est

impossible car $p > q$; nous concluons alors que E a un quotient isomorphe à ℓ_q .

Théorème 5. Soient E un espace de Banach et $1 \leq p < q \leq \infty$. Si $\ell_p \widehat{\otimes} E$ a un sous-espace isomorphe à ℓ_q alors E' a un sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Supposons que $\ell_p \widehat{\otimes} E$ a une suite-base $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique de ℓ_q , $p < q \leq \infty$. De la dualité $\langle \ell_p \widehat{\otimes} E, \ell_{p'} \widehat{\otimes} E' \rangle$ et du théorème du 3 nous déduisons que $(f_n)_n$ est une suite-base de $(\ell_{p'} \widehat{\otimes} E')'$ équivalente à la base canonique de ℓ_q . On a clairement $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ pour la topologie $\sigma((\ell_{p'} \widehat{\otimes} E')', \ell_{p'} \widehat{\otimes} E')$ donc $\ell_{p'} \widehat{\otimes} E'$ a un quotient isomorphe à $\ell_{q'}$, $1 \leq q' < p'$ et par conséquent E' a un quotient isomorphe à $\ell_{q'}$ d'où le résultat.

Soit α un ordinal dénombrable, $\langle 1, \alpha \rangle$ note l'ensemble des ordinaux $1 \leq \gamma \leq \alpha$ muni de la topologie d'intervalles ; $C(\alpha)$ note l'espace de Banach des applications numériques continues sur $\langle 1, \alpha \rangle$ muni de la norme uniforme ; soit E un espace de Banach, $C(\alpha ; E)$ note l'espace de Banach des applications continues de $\langle 1, \alpha \rangle$ dans E muni de la norme uniforme. Nous savons que $C(\alpha ; E)$ est isométrique à $C(\alpha) \hat{\otimes} E$ (cf. [3]).
 Nous notons $C_0(\alpha ; E) = \{f \in C(\alpha ; E) ; f(\alpha) = 0\}$,

nous savons que pour $\alpha \geq \omega$, $C_0(\alpha ; E)$ est isomorphe à $C(\alpha ; E)$. (cf. [2])

Théorème 6 Soient α un ordinal dénombrable, E un espace de Banach et $1 \leq q < \infty$; alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q si et seulement si $C(\alpha ; E)$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Fixons $1 \leq q < \infty$. D'après le résultat classique de C. Bessaga et A. Pelczynski (cf. [2]) il suffit de prouver le théorème pour les ordinaux ω^{ω^λ} où λ est un ordinal dénombrable ; nous allons établir le théorème par une récurrence transfinie sur λ .

Le résultat a déjà été établi dans le cas $\lambda = 0$ (théorème 3). Soit donc λ un ordinal dénombrable > 0 et supposons que pour tout ordinal $\beta < \lambda$ la propriété ℓ_q isomorphe à un sous-espace de $C(\omega^{\omega^\beta} ; E)$ entraîne ℓ_q isomorphe à un sous-espace de E . Supposons que ℓ_q soit isomorphe à un sous-espace de $C(\omega^{\omega^\lambda} ; E)$ donc de $C_0(\omega^{\omega^\lambda} ; E)$ et que ℓ_q ne soit pas isomorphe à un sous-espace de E .

Rappelons que pour tout ordinal $\alpha < \omega^{\omega^\lambda}$ il existe un ordinal $\beta < \lambda$ tel que $C(\alpha)$ et $C(\omega^{\omega^\beta})$ soient isomorphes (cf. [2] et [8]) ; alors, pour tout ordinal $\alpha < \omega^{\omega^\lambda}$, ℓ_q n'est pas isomorphe à un sous-espace de $C(\alpha ; E)$.

Soit $(f_n)_n$ une suite-base normalisée de $C_0(\omega^{\omega^\lambda} ; E)$ équivalente à la base canonique de ℓ_q . Il est possible de construire par récurrence $(g_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_n)_n$ et $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < \dots < \omega^{\omega^\lambda}$ une suite strictement croissante d'ordinaux tels que pour $k = 1, 2, \dots$

$$\forall \gamma \in \langle 1, \omega^{\omega^\lambda} \rangle ; \gamma \notin \langle \alpha_{k-1} + 1, \alpha_k \rangle \Rightarrow \|g_k(\gamma)\| \leq \frac{1}{2^k}$$

mais alors la suite $(g_k)_k$ est équivalente à la base canonique de c_0 (cf. [1]) d'où une contradiction.

5 - Sous-espaces de $\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q$ isomorphes à ℓ_r .

Nous considérons $\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q$ comme sous-espace de $sl_q(\ell_p)$. Notons $(e_n)_n$ la base canonique de ℓ_p et $(f_n)_n$ la suite des formes coefficients de la base $(e_n)_n$; on note pour chaque entier m :

$$Q_m : \ell_p \rightarrow \ell_p$$

l'application qui à $x = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} e_{\ell} \in \ell_p$ associe $Q_m(x) = \sum_{\ell=1}^m a_{\ell} e_{\ell}$.

Il est clair que pour chaque entier m et $x = (x_i)_i \in sl_q(\ell_p)$ on a :

$$\tilde{Q}_m(x) = (Q_m(x_i))_i \in sl_q(\ell_p)$$

$$\|\tilde{Q}_m\| = 1$$

et que pour chaque entier n , $P^n \circ \tilde{Q}_m = \tilde{Q}_m \circ P^n$; on a alors visiblement

$$\tilde{Q}_m(\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q) \subset \ell_p \widehat{\otimes} \ell_q.$$

Lemme 1. Pour chaque entier m les espaces $\tilde{Q}_m(\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q)$ et ℓ_q sont isomorphes.

Notons $X = \{(x_i)_i \in sl_q(\ell_p); \exists n \forall i, i \geq n \Rightarrow x_i = 0 \text{ et } \forall j, Q_m(x_j) = x_j\}$.

Clairement X est un sous-espace dense de $\tilde{Q}_m(\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q)$. Pour $x = (x_i)_i \in X$ on a

$$\|x\|^q = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m f_j(x_i) \varphi(e_j) \right|^q ; \varphi \in B_{(\ell_p)_1} \right\}$$

donc en particulier, puisque $f_1, \dots, f_m \in B_{(\ell_p)_1}$ on a

$$\|x\| \geq \max_{1 \leq k \leq m} \left(\sum_{i=1}^n |f_k(x_i)|^q \right)^{1/q}.$$

On a par ailleurs :

$$\|x\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |f_j(x_i)|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |f_j(x_i)|^q \right) \right)^{1/q}$$

$$\cong \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n |f_j(x_i)|^q \right)^{1/q} \cong m \max_{1 \leq k \leq m} \left(\sum_{i=1}^n (f_k(x_i))^q \right)^{1/q}$$

ce qui prouve que $\tilde{Q}_m(\ell_p \hat{\otimes} \ell_q)$ est isomorphe à un produit fini d'espaces ℓ_q donc à ℓ_q .

Lemme 2. Pour tout $x \in \ell_p \hat{\otimes} \ell_q$ on a $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{Q}_m(x) = x$.

Notons $Y = \{x = (x_i)_i \in s\ell_q(\ell_p) ; \exists n \forall i, i \geq n \Rightarrow x_i = 0\}$.

Visiblement Y est un sous-espace dense de $\ell_p \hat{\otimes} \ell_q$. Soit $x = (x_i)_i \in Y$ et n un entier tel que $i \geq n \Rightarrow x_i = 0$. On a alors pour tout entier m

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{Q}_m(x)\|^q &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} f_j(x_i) \varphi(e_j) \right|^q ; \varphi \in B_{(\ell_p)_i} \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i - Q_m(x_i)\|^q \end{aligned}$$

donc $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{Q}_m(x) = x$; la conclusion découle alors du théorème de Banach-Steinhaus.

Rappelons la proposition suivante de A. Tong (cf. [10]) :

Proposition. Soient n un entier, a_1, \dots, a_n des scalaires et $T : \ell_s^n \rightarrow \ell_q^n$ l'opérateur qui à $x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_s^n$ associe $T(x) = (a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$. On a alors

$$\|T\| = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^{\frac{sq}{s-q}} \right)^{\frac{s-q}{sq}} \text{ si } s > q \text{ et } \|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \text{ si } s \leq q.$$

Théorème. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$; alors ℓ_r est isomorphe à un sous-espace de $\ell_p \hat{\otimes} \ell_q$ si et seulement si $r = p$, $r = q$ ou $r = \frac{1}{\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1}$ si $q' \geq p$ ou $r = \infty$ si $q' \leq p$.

Nous conservons les notations du 2. On suppose $q < \infty$, le cas $q = \infty$ se traite avec des modifications évidentes. Supposons tout d'abord que ℓ_r est isomorphe à un sous-espace de $\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q$ et que $r \neq p$ et $r \neq q$; soit $(X_n)_n$ une suite-base normalisée de $\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q$ équivalente à la base canonique de ℓ_r . Soit $\epsilon > 0$; puisque $r \neq p$ on peut trouver $(n_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers et $(Y_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(X_n)_n$ telle que :

$$\|Y_k - (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k)\| \leq \frac{\epsilon}{2^k}$$

pour $k = 1, 2, \dots$. Dès que $\epsilon > 0$ est assez petit la suite $(Z_k = \frac{(P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k)}{\|(P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k)\|})_k$

est équivalente à la base canonique de ℓ_r .

Soit δ un réel > 0 ; puisque $r \neq q$ en utilisant les lemmes 1 et 2, on peut trouver $(m_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers et $(U_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(Z_k)_k$ telle que pour $k = 1, 2, \dots$

$$\|U_k - (\tilde{Q}_{m_k} - \tilde{Q}_{m_{k-1}})(U_k)\| \leq \frac{\delta}{2^k}.$$

Dès que $\delta > 0$ est assez petit la suite $((\tilde{Q}_{m_k} - \tilde{Q}_{m_{k-1}})(U_k))_k$ est équivalente à la base canonique de ℓ_r .

En résumé, on peut trouver une suite normalisée $(V_k)_k$ de $\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q$ équivalente à la base canonique de ℓ_r et deux suites strictement croissantes d'entiers $(N_k)_k$ et $(M_k)_k$ telles que :

$$(1) \quad V_k = (P_{N_k} - P_{N_{k-1}})(V_k) = (\tilde{Q}_{M_k} - \tilde{Q}_{M_{k-1}})(V_k).$$

Pour chaque entier k , notons $V_k = (V_{k,i})_i$; nous pouvons fixer $\varphi_k \in [f_{M_{k-1}+1}, \dots, f_{M_k}]$ tel que $\|\varphi_k\| = 1$ et $\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\varphi_k(V_{k,i})|^q = 1$.

Soit $\Psi = (\Psi_i)_i \in (\ell_p)'$; pour chaque entier k notons

$$\Psi^k = (0, \dots, 0, \Psi_{M_{k-1}+1}, \dots, \Psi_{M_k}, 0, \dots).$$

Nous avons $\|\Psi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\Psi^k\|^{p'}\right)^{1/p'}$ si $p \neq 1$ et $\|\Psi\| = \sup_k \|\Psi^k\|$ si $p = 1$.

Pour chaque k et i il est clair d'après (1) que $\Psi(V_{k,i}) = \Psi^k(V_{k,i})$ donc

$$(2) \quad \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\Psi(V_{k,i})|^q = \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\Psi^k(V_{k,i})|^q \leq \|\Psi^k\|^q.$$

Soit n un entier et a_1, \dots, a_n des scalaires, on a alors d'après (2)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} V_{\ell} \right\| &= \sup \left\{ \left(\sum_{\ell=1}^n |a_{\ell}|^q \sum_{i=N_{\ell-1}+1}^{N_{\ell}} |\Psi(V_{\ell,i})|^q \right)^{1/q}; \Psi \in B_{(\ell_p)} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left(\sum_{\ell=1}^n |a_{\ell}|^q \|\Psi^{\ell}\|^q \right)^{1/q}; \Psi \in B_{(\ell_p)} \right\}. \end{aligned}$$

On a évidemment

$$\left\| \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} V_{\ell} \right\| \geq \sup \left\{ \left(\sum_{\ell=1}^n |a_{\ell}|^q \sum_{i=N_{\ell-1}+1}^{N_{\ell}} |\Psi(V_{\ell,i})|^q \right)^{1/q}; \Psi = \sum_{\ell=1}^n \lambda_{\ell} \varphi_{\ell} \in \left\{ \sum_{\ell=1}^n |\lambda_{\ell}|^{p'} \leq 1 \right\} \right\}$$

$$\text{donc} \quad \left\| \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} V_{\ell} \right\| = \sup \left\{ \left(\sum_{\ell=1}^n |a_{\ell}|^q |\lambda_{\ell}|^q \right)^{1/q}; \left(\sum_{\ell=1}^n |\lambda_{\ell}|^{p'} \right)^{1/p'} \leq 1 \right\}.$$

On conclut en utilisant la proposition précédente.

Notons $(\epsilon_j)_j$ la base canonique de ℓ_q . Soient n un entier et a_1, \dots, a_n des scalaires, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \otimes \epsilon_i \right\|_{\epsilon} &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \theta_i \right|; (\lambda_i)_i \in B_{(\ell_p)}, (\theta_i)_i \in B_{(\ell_q)} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q |\lambda_i|^q \right)^{1/q}; (\lambda_i)_i \in B_{(\ell_p)} \right\} \\ &= \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^r \right)^{1/r} & \text{si } p' > q \text{ avec } r = \frac{p'q}{p'-q} \\ \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| & \text{si } q \geq p' \end{cases}. \end{aligned}$$

donc $(e_i \otimes \epsilon_i)_i$ est isométriquement équivalente à la base canonique de l_r .

Corollaire. Si $p \geq q$ l'espace $l_p \widehat{\otimes} l_q$ n'est pas réflexif.

Corollaire. Si $s \leq r'$ l'espace $l_r \widehat{\otimes} l_s$ contient un sous-espace isomorphe à l_1 .

Le résultat est évident si $1 = s$ ou $r' = \infty$; nous supposons donc $1 < s \leq r' < \infty$. Il est clair d'après 2 et 3 que l'espace $l_{r'} \widehat{\otimes} l_s$ est isométrique à un sous-espace fermé de

$$s l_{s'}(l_{r'}) = \mathcal{L}(l_s, l_{r'}) = B(l_s, l_r) = (l_r \widehat{\otimes} l_s)'.$$

D'après le théorème précédent l'espace $(l_r \widehat{\otimes} l_s)'$ contient un sous-espace isomorphe à c_0 , le résultat découle alors du théorème 4 de [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Bessaga et A. Pelczynski. "On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces " *Studia Math.* 17(1958) p 151-164 .
 - [2] C. Bessaga et A. Pelczynski. "Spaces of continuous functions IV." *Studia Math.* 19 (1960) p. 53-62 .
 - [3] A. Grothendieck. "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires" *Mem. Amer. Math. Soc.* 16 (1955).
 - [4] W. B. Johnson et H. P Rosenthal. "On w^* -basic sequences and their applications to the study of Banach spaces " *Studia Math* 43 (1972) p. 77-92
 - [5] J. Lindenstrauss et L. Tzafrini . "Classical Banach spaces I" Springer Verlag (1977) .
 - [6] A. Pelczynski. "Projections in certain Banach spaces" *Studia Math* 19 (1960). p. 209-228 .
 - [7] Séminaire L. Schwartz 1969-1970 .
 - [8] W. Sierpinski. "Cardinal and ordinal numbers" P. W. N (1965).
 - [9] I. Singer . "Basis in Banach spaces I " Springer Verlag (1970) .
 - [10] A. Tong. "Diagonal nuclear operators on ℓ_p spaces " *Trans. Amer. Math. Soc.* 143 (1969) p. 235-247 .
-