B. Maurey

Isomorphismes entre espaces H_1

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 19 et 20, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

ISOMORPHISMES ENTRE ESPACES H_1

B. MAUREY

Exposés No XIX-XX

2-9 Mars 1979

L'espace de Hardy H_1 des fonctions holomorphes F dans le disque unité telle que :

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})| d\theta < \infty$$

a été étudié depuis de nombreuses années. Plus récemment, après la découverte de la dualité H_1-BMO, une théorie parallèle des espaces H_1 de martingales s'est développée. Si $(\Omega,\mathcal{A},P)$ est un espace de probabilité et $(\mathfrak{F}_n)$ une suite croissante de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, on introduit l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ des $\mathfrak{F}_n$-martingales dont la fonction maximale est intégrable (voir le paragraphe 1 pour les définitions précises). Nous étudions en particulier le cas où les $(\mathfrak{F}_n)$ sont les algèbres dyadiques sur $[0,1]$, et nous appelons $H_1(\delta)$ l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ obtenu dans ce cas.

La similitude des résultats obtenus dans la théorie classique et dans la théorie "martingales" amène à se poser la question de la comparaison de H_1 et $H_1(\delta)$.

Notre résultat essentiel est le suivant :

[<u>Théorème</u> : Les espaces H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes.

La question de l'existence d'une base inconditionnelle pour H_1 est restée ouverte. Au contraire $H_1(\delta)$ admet le système de Haar pour base inconditionnelle. Nous obtenons par conséquent :

[<u>Corollaire</u> : L'espace H_1 admet une base inconditionnelle.

Nous n'explicitons pas la base de H_1 dont l'existence résulte du théorème. Ce système de fonctions serait de toute façon trop compliqué pour être utilisable. Le problème suivant reste donc posé :

<u>Problème</u> : Trouver une base inconditionnelle explicite pour H_1.

Pour démontrer le théorème principal, on peut utiliser la méthode de décomposition, car on constate aisément que les espaces H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes à leurs carrés respectifs. Il suffit donc de voir que H_1 et $H_1(\delta)$ sont chacun isomorphe à un sous-espace complémenté de l'autre. Nous donnerons des indications sur la manière de plonger

H_1 de façon complémentée dans $H_1(\delta)$ au paragraphe 2. Pour la possibilité de plonger $H_1(\delta)$ de façon complémentée dans H_1, nous nous contentons de renvoyer à [3] ou [4].

Avant de passer au détail, mentionnons quelques résultats complémentaires. Supposons que $(\mathfrak{F}_n)$ soit une suite croissante d'algèbres finies de parties de Ω et posons :

$$\delta_n = \sup \{P(A) \,;\, A \text{ atome de } \mathfrak{F}_n\} \quad .$$

On démontre dans [4] :

<u>Théorème 2</u> : Si $\lim_n \delta_n = 0$, l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ est isomorphe à $H_1(\delta)$ (donc à H_1).

On obtient aussi le résultat suivant :

<u>Théorème 3</u> : Pour tout $n \geq 1$, les espaces $H_1(\mathbb{R}^n)$ et $H_1(S^n)$ sont isomorphes à H_1.

Mentionnons pour finir que l'espace $H_1(T^2)$ (cas des fonctions holomorphes dans le bidisque $D \times D$) est isomorphe à l'espace $H_1(\delta^2)$ des martingales dyadiques à deux indices.

<u>§ 1. ESPACES H_1 DE MARTINGALES</u>.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathfrak{F}_n)$ une suite croissante de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$. On définit l'espace $H_1[\Omega, (\mathfrak{F}_n), P]$, en abrégé $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, comme l'espace des martingales (complexes) (f_n) telles que :

$$\sup_{n \geq 0} |f_n| \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad .$$

On sait d'après [1] que cette condition équivaut à l'intégrabilité de la fonction des carrés, c'est-à-dire :

$$(|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2)^{1/2} \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad .$$

Sous la condition précédente, on sait que la martingale (f_n) converge dans $L_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ vers une limite f, qui est $\mathfrak{F}_\infty$-mesurable, $\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ étant la σ-algèbre engendrée par la réunion $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$. Inversement la donnée de f permet de retrouver la martingale (f_n) par $f_n = E(f|\mathfrak{F}_n)$. On peut donc considérer $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ comme un espace de fonctions $\mathfrak{F}_\infty$-mesurables, l'espace des fonctions $f \in L_1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ telles que la martingale $f_n = E(f|\mathfrak{F}_n)$ ait une fonction maximale intégrable.Cet espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ peut être muni de deux normes équivalentes :

$$\|f\|_{H_1,1} = E(|f_o|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2)^{1/2}$$

$$\|f\|_{H_1,2} = E \sup_{n\geq 0} |f_n| \quad .$$

Rappelons la définition des martingales BMO. Soit (f_n) une $\mathfrak{F}_n$-martingale, posons $d_o = f_o$ et pour $n \geq 1$, $d_n = f_n - f_{n-1}$. On dit que la martingale (f_n) est une martingale BMO, de norme BMO $\leq c$, si on a :

$$\forall\, k \geq 0 \quad , \qquad E(\sum_{n\geq k} |d_n|^2 \mid \mathfrak{F}_k) \leq c^2 \quad .$$

(Noter que $E(\sum_{n\geq k} |d_n|^2 \mid \mathfrak{F}_k) = E(|f - f_{k-1}|^2 \mid \mathfrak{F}_k)$.)

Ici encore, on peut identifier l'espace $BMO[(\mathfrak{F}_n)]$ à un espace de fonctions $\mathfrak{F}_\infty$-mesurables.

Dans le cas d'une famille continue $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-σ-algèbres de $\mathcal{A}$, on définira l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_t)]$ comme l'espace des fonctions $f \in L_1(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ telles que

$$E \sup_{t\geq 0} |f_t| < \infty \quad , \quad \text{où} \quad f_t = E(f|\mathfrak{F}_t) \quad .$$

Nous utiliserons la dualité entre les espaces H_1 et BMO de martingales, que l'on trouvera dans [1]. Cette dualité s'accompagne d'une difficulté : en général le produit fg n'est pas intégrable pour $f \in H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, $g \in BMO[(\mathfrak{F}_n)]$. Nous nous limiterons ici au cas où $f \in L_2(\Omega,\mathcal{A},P)$. Dans ce cas on peut écrire :

$$|Efg| \leq C \, \|f\|_{H_1[(\mathfrak{F}_n)]} \cdot \|g\|_{BMO[(\mathfrak{F}_n)]} \quad ,$$

où C est une constante universelle. Le résultat analogue est vrai dans le cas des familles continues $(\mathfrak{F}_t)$.

§ 2. L'ESPACE H_1 ET LES MARTINGALES DU BROWNIEN.

Désignons par $(X_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien complexe partant de 0, normalisé par $E|X_t|^2 = 2t$, par $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ la famille des σ-algèbres du brownien et par τ le premier temps t tel que X_t atteigne le cercle unité $\{|z| = 1\}$. Rappelons la formule d'Ito : si f est une fonction réelle de classe C^2 dans un voisinage du disque unité, on peut écrire :

$$f(X_{t\wedge\tau}) = f(0) + \int_0^{t\wedge\tau} \operatorname{grad} f(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \Delta f(X_s) \cdot ds$$

(où $t\wedge\tau = \inf(t,\tau)$).

On voit facilement que le processus :

$$Y_t = \int_0^{t\wedge\tau} \operatorname{grad} f(X_s) \cdot dX_s$$

est une martingale par rapport aux tribus $(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})$. On voit donc que $(f(X_{t\wedge\tau}))$ est une martingale lorsque f est harmonique. Ceci implique que $(F(X_{t\wedge\tau}))$ est une martingale complexe lorsque F est holomorphe. De plus :

Proposition 1 : L'application $T : F \to (F(X_{t\wedge\tau}))$ est continue de H_1 dans $H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$.

Démonstration : Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. On voit que la fonction $g = |F|^{1/2}$ vérifie $\Delta g \geq 0$ (g est sous-harmonique), donc d'après la formule d'Ito $(g(X_{t\wedge\tau}))$ est une sous-martingale. En utilisant l'inégalité de Doob dans L^2, nous aurons :

$$E \sup_{t\geq 0} g^2(X_{t\wedge\tau}) \leq 4\, E\, g^2(X_\tau) \quad .$$

Si on remarque que $E\, g^2(X_\tau) = \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$, (car la loi de X_τ est la loi uniforme sur le cercle) on obtient :

$$E \sup_{t\geq 0} |F(X_{t\wedge\tau})| \leq 4\, \|F\|_1 \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

Soit f une fonction harmonique réelle dans le disque unité. Nous désignerons par $\tilde{f}$ la fonction harmonique réelle telle que $f + i\tilde{f}$ soit holomorphe et que $\tilde{f}(0) = 0$. D'après les relations de Cauchy, on a :

$$|\text{grad } f| = |\text{grad } \tilde{f}| \quad .$$

Supposons que f soit bornée dans le disque unité (c'est-à-dire sur le cercle unité). Il est clair que $(f(X_{t\wedge\tau}))$ est une martingale BMO, de norme BMO $\leq 2\,\|f\|_\infty$. Mais la martingale $(\tilde{f}(X_{t\wedge\tau}))$ est également BMO. En effet :

$$\begin{aligned} E(|\tilde{f}(X_\tau) - \tilde{f}(X_{t\wedge\tau})|^2 \mid \mathfrak{F}_{t\wedge\tau}) & \\ &= E(2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} |\text{grad } \tilde{f}(X_s)|^2\, ds \mid \mathfrak{F}_{t\wedge\tau}) \\ &= E(2\int_{t\wedge\tau}^{\tau} |\text{grad } f(X_s)|^2\, ds \mid \mathfrak{F}_{t\wedge\tau}) \\ &= E(|f(X_\tau) - f(X_{t\wedge\tau})|^2 \mid \mathfrak{F}_{t\wedge\tau}) \quad . \end{aligned}$$

Considérons dans $L^2(\Omega,\mathfrak{F}_\tau,P)$ le sous-espace X formé par les fonctions $F(X_\tau)$, avec $F \in H_2$, et désignons par Q la projection orthogonale de $L^2(\Omega,\mathfrak{F}_\tau,P)$ sur X.

Soit u une fonction de $L_2(\Omega,\mathfrak{F}_\tau,P)$. La projection Qu est de la forme $F(X_\tau)$, où $F \in H_2$. Nous avons :

[<u>Proposition 2</u> : $\|F\|_1 \leq 9C\,\|u\|_{H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]}$.

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord $Eu = 0$. On a alors $F(0) = 0$, et on peut écrire $F = f + i\tilde{f}$. On a :

$$\|F\|_1 \leq 2\max(\|f\|_1 \,,\, \|\tilde{f}\|_1) \quad .$$

Dans le cas $\|f\|_1 \geq \|\tilde{f}\|_1$, on définit g sur le cercle unité par $g = \text{sign } f$, dans le cas $\|\tilde{f}\|_1 > \|f\|_1$ on posera $g = \text{sign } \tilde{f}$. On désigne encore par g le prolongement harmonique de g dans le disque unité. Posons $G = g + i\tilde{g}$. Notons que $\int_0^{2\pi} FG(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} = F(0)G(0) = 0$ donc :

$$\int_0^{2\pi} fg\, d\theta = \int_0^{2\pi} \widetilde{\widetilde{fg}}\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} (f\tilde{g} + \tilde{f}g)\, d\theta = 0 \quad .$$

On aura dans tous les cas :

$$\left|\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\, \overline{G(e^{i\theta})}\, \frac{d\theta}{2\pi}\right| \geq 2 \max(\|f\|_1 \,, \|\tilde{f}\|_1) \geq \|F\|_1 \quad .$$

D'après les considérations qui précèdent la proposition 2, $\overline{G(X_{t\wedge\tau})}$ est une martingale de norme BMO ≤ 4. On a donc, en utilisant $G(X_\tau) \in X$ et la dualité H_1-BMO :

$$\|F\|_1 \leq \left|\int_0^{2\pi} F\overline{G}\, \frac{d\theta}{2\pi}\right| = E(F(X_\tau)\overline{G(X_\tau)})$$

$$= (Qu \mid G(X_\tau)) = (u \mid G(X_\tau))$$

$$\leq 4\, C\, \|u\|_{H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]} \quad ,$$

ce qui démontre la proposition 2 lorsque $Eu = 0$.
Si on applique la proposition 2 à $u = F(X_\tau)$, on voit que $\|F\|_1 \leq 9C\, \|T(F)\|_{H_1}$, ce qui montre que T est en fait un plongement de H_1 dans $H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]$, et la proposition 2 montre que ce plongement est complémenté.

Ce résultat n'est pas ce que nous cherchions, car nous voulions plonger H_1 dans $H_1(\delta)$ de façon complémentée. Néanmoins il est facile d'obtenir ce résultat à partir de ce qui précède : il suffit de discrétiser convenablement les tribus du brownien. On montre ainsi dans [4] :

<u>Proposition 3</u> : Il existe une constante K et une suite croissante $(\mathfrak{F}_n)$ de sous-algèbres finies de $\mathfrak{F}_\tau$, isomorphe à la suite dyadique $(\mathcal{A}_n)$ telle que pour tout polynôme F on ait :

$$\frac{1}{K}\, \|F(X_\tau)\|_{H_1[(\mathfrak{F}_n)]} \leq \|F(X_\tau)\|_{H_1[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]} \leq K\, \|F(X_\tau)\|_{H_1[(F_n)]}$$

et

$$\|F(X_\tau)\|_{BMO[(\mathfrak{F}_n)]} \leq K\, \|F(X_\tau)\|_{BMO[(\mathfrak{F}_{t\wedge\tau})]} \quad .$$

A partir de la proposition 3 et du raisonnement de la proposition 2 il est clair que H_1 se plonge de façon complémentée dans $H_1[(\mathfrak{J}_n)]$, qui est isométrique à $H_1(\delta)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.M. Garsia : Martingale inequalities, Benjamin.

[2] B. Maurey : Plongement de H_1 dans un espace à base inconditionnelle, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287, p. 865-867.

[3] B. Maurey : Isomorphismes entre espaces H_1, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, p. 272-273.

[4] B. Maurey : Isomorphismes entre espaces H_1, article en préparation.
