Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

S. Guerre

Procédé de convergence minimale dans les espaces de Banach. Une loi des grands nombres et un théorème ergodique

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 25, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

PROCEDE DE CONVERGENCE MINIMALE DANS LES ESPACES DE BANACH. UNE LOI DES GRANDS NOMBRES ET UN THEOREME ERGODIQUE

S. GUERRE

Exposé No XXV

26 Mai 1978

Nous définissons un procédé de sommation appelé procédé de convergence minimale qui généralise les sommes de Cesaro d'une suite donnée dans un espace de Banach. Les points de ces suites minimales sont des cas particuliers de points minimaux au sens de [1] et les résultats de [2] prouvent qu'elles sont particulièrement bien adaptées aux espaces $\ell^p(\mathbb{N})$. Après une étude générale de ce procédé, nous nous intéresserons plus spécialement au cas où la suite de départ est une suite de v.a. sur un espace de probabilité. Nous obtenons alors pour ce procédé deux résultats, l'un analogue à la loi des grands nombres et l'autre au théorème ergodique.

§ 1. DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES DE CE PROCEDE DE SOMMATION

Soit E un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E et p un réel strictement supérieur à 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $\varphi_n^{(p)}$ par : $\forall\, y\in E$

$$\varphi_n^{(p)}(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|y - x_i\|^p \quad .$$

Lorsque E est réflexif et strictement convexe, chaque fonction $\varphi_n^{(p)}$ admet un minimum unique, voir [1]. On notera $s_n^{(p)}$ (ou plus simplement s_n) ce minimum.

Rappelons quelques propriétés de ces suites minimales dans un espace E réflexif et strictement convexe, figurant dans [1] et [3] :

- les suites $(s_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ généralisent la suite des sommes de Césaro des x_i : si E est un Hilbert et $p=2$, on a :

$$s_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad .$$

- Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, la suite $(s_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi et on a :

$$\forall\, i\in\mathbb{N}^*\ \|x_i\| \le M \Longrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}^*\ \|s_n^{(p)}\| \le 2M \quad .$$

- Si on remplace la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par (λx_n) ou $(x_n + z)$, la suite $s_n^{(p)}$ est remplacée par $(\lambda s_n^{(p)})$ ou $(s_n^{(p)} + z)$.
- Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x dans E, la suite $(s_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers x.

Dans les espaces uniformément convexes, on peut préciser la façon dont la fonction φ_n croît au voisinage de son minimum. La proposition 1 permet de remplacer une question portant sur la suite $(s_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ par une question portant sur $(\varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 1 : Si E est uniformément convexe, pour tout p, $1 < p < \infty$, il existe une fonction réelle δ_p, croissante et strictement positive telle que :

si $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n\| \leq M$, alors $\forall\, y \in E$, $\|y\| \leq 2M$, on a :

$$\varphi_n^{(p)}(y) - \varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}) \geq \|y - s_n^{(p)}\|^p \, \delta_p\left(\frac{\|y - s_n^{(p)}\|}{3M}\right) .$$

La démonstration de cette propriété est faite dans [1] ou [3] et utilise le fait, voir par exemple [4] qu'un espace E est uniformément convexe si et seulement si pour tout p, $1 < p < \infty$, il existe δ'_p tel que les conditions

$$\|a\| \leq 1 \quad , \quad \|b\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|a - b\| \geq \varepsilon$$

impliquent $$\left\|\frac{a + b}{2}\right\|^p \leq \left(\frac{\|a\|^p + \|b\|^p}{2}\right)(1 - \delta'_p(\varepsilon)) .$$

On obtient le résultat indiqué en appliquant cette inégalité successivement aux points $a = y - x_i$ et $b = s_n - x_i$.

De ce résultat, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1 : Si E est uniformément convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n^{(p)}$ est une fonction continue des n variables $(x_1 \dots x_n)$.

Démonstration : On pose

$$\varphi_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|y - x_i\|^p$$

$$\varphi'_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|y - x'_i\|^p$$

$$M = \operatorname{Sup} \{\|x_i\|, \|x'_i\|, 1 \le i \le n\} .$$

Il est clair que si ε est donné, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, i \in [1,n],\ \|x_i - x'_i\| \le \alpha \Longrightarrow \forall\, y \in E,\ \|y\| \le 2M,\ \|\varphi_n(y) - \varphi'_n(y)\| \le \varepsilon .$$

Or si s_n est le point qui minimise φ_n et s'_n celui qui minimise φ'_n, on a $\|s_n\| \le 2M$ et $\|s'_n\| \le 2M$ et on peut leur appliquer le résultat précédent, soit :

$$\forall\, i \in [1,n],\ \|x_i - x'_i\| \le \alpha \Longrightarrow \varphi_n(s_n) \ge \varphi_n(s'_n) - \varepsilon \ge \varphi'_n(s'_n) - \varepsilon \ge \varphi_n(s'_n) - 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow 0 \le \varphi_n(s'_n) - \varphi_n(s_n) \le 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow 0 \le \|s_n - s'_n\|^p \, \delta\left(\frac{\|s_n - s'_n\|}{3M}\right) \le 2\varepsilon .$$

Ceci prouve le corollaire 1.

Pour la suite de cette étude, nous aurons besoin de préciser la proposition 1 dans certains cas particuliers :

A) - Cas des espaces p-convexes, $1 < p < \infty$.

Rappelons qu'un espace de Banach E est p-convexe si $\exists\, K > 0$ telle que $\forall\, a,b \in E$, on ait :

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^p \le \frac{\|a\|^p + \|b\|^p}{2} - \frac{1}{K}\|a-b\|^p .$$

Ceci est en paeticulier le cas des espaces $\mathbb{R}$, $\ell^p(\mathbb{N})$ et $L^p[0,1]$ pour $p \ge 2$.

A cause de cette inégalité, dans un espace p-convexe, il est naturel d'étudier précisément la p-ième suite miniale $s_n^{(p)}$. Par une démonstration analogue à celle de la proposition 1, on obtient alors :

<u>Proposition 2</u> : Soit E un espace p-convexe et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E. Alors il existe $C>0$ telle que :

$$\forall\, y\in E, \qquad \varphi_n^{(p)}(y)-\varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}) \geq \frac{1}{C}\,\|y-s_n^{(p)}\|^p \quad .$$

B) - <u>Cas des espaces possédant la propriété</u> (P_p), $1<p<\infty$.

<u>Définition</u> : On dira qu'un espace E possède la propriété (P_p) si :
$\forall\, R>0$, $\exists\, K_R>0$ telle que : $\forall\, a,b\in E$, avec $\|a\|\leq R$ et $\|b\|\leq R$ on ait :

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^p \leq \frac{\|a\|^p+\|b\|^p}{2} - \frac{1}{K_R}\,\|a-b\|^2 \quad .$$

Ceci est en particulier le cas des espaces $\mathbb{R}$, $\ell^p(\mathbb{N})$ et $L^p[0,1]$ pour $1<p<2$, voir par exemple [3] et [4].
Dans un espace possédant (P_p), on étudiera également la p-ième suite minimale $(s_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour le même p.

Nous allons utiliser la propriété (P_p) sous une forme un peu différente :

<u>Lemme 1</u> : Soit E un espace possédant la propriété (P_p). Alors, $\forall\, R>0$, $\exists\, K'_R>0$ telle que : $\forall\, a,b\in E$ avec $\|a\|\leq R$ ou $\|b\|\leq R$ on ait :

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^p \leq \frac{\|a\|^p+\|b\|^p}{2} - \frac{1}{K'_R}\,\mathrm{Inf}\,[\|a-b\|^2, \|a-b\|^p] \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Supposons par exemple $\|a\|\leq R$ et distingons deux cas :

- ou bien $\|a-b\|\leq 1$, alors $\|a\|\leq R+1$ et $\|b\|\leq R+1$ et on peut appliquer la propriété (P_p) soit :

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^p \leq \frac{\|a\|^p+\|b\|^p}{2} - \frac{1}{K_{R+1}}\,\|a-b\|^2 \quad ;$$

- ou bien $\|a-b\|\geq 1$, alors on a : $\left\|\frac{a}{\|a-b\|}\right\|\leq R+1$ et $\left\|\frac{b}{\|a-b\|}\right\|\leq R+1$

et on peut appliquer (P_p) à ces deux points, soit :

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^p \leq \frac{\|a\|^p+\|b\|^p}{2} - \frac{1}{K_{R+1}}\,\|a-b\|^p \quad .$$

Dans les deux cas le lemme 1 est bien vérifié avec $K'_R = K_{R+1}$.
De ce lemme, on déduit une autre forme de la proposition 1, particulière à ces espaces.

<u>Proposition 3</u> : Soit E un espace possédant la propriété (P_p). Posons $J_n(R) = \{i / 1 \leq i \leq n / \|x_i\| \leq R\}$. Alors, $\forall\, R > 0$, $\exists\, C_R > 0$ telle que : $\forall\, y \in E$, $\|y\| \leq 2R$ on ait :

$$\varphi_n^{(p)}(y) - \varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}) \geq \frac{1}{C_R} \frac{\mathrm{Card}\,[J_n(R)]}{n} \mathrm{Inf}[\|y - s_n^{(p)}\|^2 , \|y - s_n^{(p)}\|^p] .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $R > 0$ et y tel que $\|y\| \leq 2R$. Pour $i \in J_n(R)$, on applique le lemme 1 aux points $a_i = y - x_i$, $b_i = s_n^{(p)} - x_i$; on a $\|a_i\| = \|y - x_i\| \leq 3R$, d'où :

$$\left\|\frac{s_n^{(p)}+y}{2} - x_i\right\|^p \leq \frac{\|y - x_i\|^p + \|s_n^{(p)} - x_i\|^p}{2} - \frac{1}{K'_{3R}} \mathrm{Inf}[\|y - s_n^{(p)}\|^2, \|y - s_n^{(p)}\|^p] .$$

Pour $i \notin J_n(R)$, on écrit simplement

$$\left\|\frac{s_n^{(p)} + y}{2} - x_i\right\|^p \leq \frac{\|y - x_i\|^p + \|s_n^{(p)} - x_i\|^p}{2} .$$

En sommant ces inégalités pour $1 \leq i \leq n$ on obtient alors, en tenant compte du fait que $s_n^{(p)}$ réalise le minimum de $\varphi_n^{(p)}$:

$$\varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}) \leq \varphi_n^{(p)} \left(\frac{s_n^{(p)} + y}{2}\right) \leq \frac{\varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}) + \varphi_n^{(p)}(y)}{2}$$
$$- \frac{\mathrm{Card}\, J_n(R)}{n} \cdot \frac{1}{K'_{3R}} \mathrm{Inf}[\|y - s_n^{(p)}\|^2, \|y - s_n^{(p)}\|^p] .$$

Soit : $\varphi_n^{(p)}(y) - \varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}) \geq \dfrac{2}{K'_{3R}} \dfrac{\mathrm{Card}\, J_n(R)}{n} \mathrm{Inf}[\|y - s_n^{(p)}\|^2, \|y - s_n^{(p)}\|^p]$.

Ce qui prouve le résultat avec $C_R = \dfrac{K'_{3R}}{2}$.

Nous allons maintenant utiliser ces inégalités dans des espaces un peu plus particuliers pour obtenir une condition suffisante de convergence des suites minimales.

Rappelons que l'on dit qu'un espace E est lisse si sa norme est Gateaux-différentiable en tout point autre que l'origine (voir [4]). On vérifie aisément (voir [3]) que dans un tel espace, la fonction $y \mapsto \varphi_n^{(p)}(y)$ est Gateaux-différentiable en tout point. On notera $d\varphi_n^{(p)}(y)$ sa différentielle en y. Le point $s_n^{(p)}$ est caractérisé par $d\varphi_n^{(n)}(s_n^{(p)}) = 0$ et on a :

<u>Proposition 4</u> : Si E est uniformément convexe et lisse, alors, si $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n\| \leq M$, on a : $\forall\, y \in E$, $\|y\| \leq 2M$,

$$\|y - s_n^{(p)}\|^{p-1} \; \delta_p\left(\frac{\|y - s_n^{(p)}\|}{3M}\right) \leq \|d\varphi_n^{(p)}(y)\|_{E'} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Comme la fonction $y \mapsto \varphi_n^{(p)}(y)$ est convexe et Gateaux-différentiable, on peut écrire :

$$\varphi_n^{(p)}(y) - \varphi_n^{(p)}(s_n^{(p)}) \leq d\varphi_n^{(p)}(y)(y - s_n^{(p)})$$

$$\leq \|d\varphi_n^{(p)}(y)\|_{E'} \; \|y - s_n^{(p)}\|_E \quad .$$

Grâce à la proposition 1, ceci prouve la proposition 4. On déduit immédiatement de ce résultat, le corollaire suivant :

<u>Corollaire 2</u> : Si E est uniformément convexe et lisse et si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, on a : si $d\varphi_n^{(p)}(y)$ tend vers 0 dans E', alors $s_n^{(p)}$ tend vers y dans E.

Ce résultat permet de ramener l'étude de la suite $s_n^{(p)}$ à celle de la suite $d\varphi_n^{(p)}(y)$ dans E'. Or si f_x est la différentielle de la fonction $x \to \|x\|$ pour $x \neq 0$ et $f_o = 0$ on a :

$$d\varphi_n^{(p)}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|y - x_i\|^{p-1} \; f_{y-x_i}$$

et $d\varphi_n^{(p)}(y)$ est une somme de Césaro dans E'.

<u>Remarque 1</u> : Dans les cas particuliers A et B considérés précédemment grâce aux propositions 3 et 4, on peut améliorer les deux derniers résultats obtenus :

A) - <u>Cas des espaces p-convexes et lisses</u>.

<u>Proposition 6</u> : Si E est p-convexe et lisse, on a : $\exists\, C > 0$ tel que $\forall\, y \in E$

$$\frac{1}{C} \|y - s_n^{(p)}\|_E^{p-1} \leq \|d\varphi_n^{(p)}(y)\|_{E'} \quad .$$

<u>Corollaire 3</u> : Si E est p-convexe et lisse, on a : si $d\varphi_n^{(p)}(y) \to 0$ dans E', alors $s_n^{(p)} \to y$ dans E.

B) - Cas des espaces possédant (P_p) et lisses.

Proposition 7 : Si E possède (P_p) et est lisse, on a : $\forall R > 0$, $\exists\, C_R > 0$ telle que : $\forall\, y \in E$, $\|y\| \le 2R$, on ait :

$$\frac{1}{C_R}\,\frac{\operatorname{Card} J_n(R)}{n}\,\operatorname{Inf}[\|y - s_n^{(p)}\|^{p-1}, \|y - s_n^{(p)}\|] \le \|d\varphi_n^{(p)}(y)\|_{E'} \quad .$$

Corollaire 4 : Si E possède (P_p) et est lisse et si : $\exists\, R > 0$, $\exists\, \gamma$, $0 < \gamma < 1$ tel que : $\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \ge N \Rightarrow \operatorname{Card} J_n(R) \ge \gamma n$. Alors si $d\varphi_n(y) \to 0$ dans E', $s_n^{(p)} \to y$ dans E.

Remarque 2 : Dans certains espaces, on peut obtenir la réciproque du corollaire 2 :
Si E est uniformément lisse, voir [4], on vérifie aisément que l'application $y \to d\varphi_n(y)$ est uniformément continue sur les bornés de E et que son module d'uniforme continuité ne dépend pas de n (voir [3]).On en déduit :

Proposition 8 : Si E est uniformément convexe et uniformément lisse et si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, on a :

$$s_n^{(p)} \to y \text{ dans } E \Longleftrightarrow d\varphi_n^{(p)}(y) \to 0 \text{ dans } E' \quad .$$

§ 2. UNE LOI DES GRANDS NOMBRES.

Nous allons maintenant considérer le cas où les x_i sont les images d'une suite de v.a. réelles sur un espace de probabilité. Ce cas particulier a été intialement étudié dans [5].

Soit donc $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et X_n une suite de v.a. réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut définir le point $S_n^{(p)}$ où la fonction réelle

$$\tau \longmapsto \varphi_n^{(p)}(\tau,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\tau - X_i(\omega)|^p$$

prend son minimum.
D'après le corollaire 1 du paragraphe 1, pour ω fixé, $S_n^{(p)}(\omega)$ est une fonction continue des $(X_i(\omega))_{1\le i\le n}$ et par suite, la fonction $\omega \to S_n^{(p)}(\omega)$ ainsi définie est mesurable sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

A toute suite de v.a. réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on peut donc associer par ce procédé une suite de v.a. réelles $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ appelée p-ième suite minimale.

Remarquons que ces suites minimales possèdent les propriétés immédiates suivantes :

1) $S_n^{(2)}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$;

2) Si $X_i \in L^r$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $S_n^{(p)} \in L^r$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

3) Si $X_i \in L^p$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est précisément la p-ième suite miniale associée dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$ à la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire que le point $S_n^{(p)}$ de L^p réalise pour tout n le minimum de la fonction

$$y \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|y - X_i\|_{L^p}^p \quad .$$

Pour ces suites minimales, qui généralisent la suite des sommes de Césaro des v.a. $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ on obtient une loi des grands nombres :

<u>Proposition 9</u> : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes, équidistribuées et possédant un moment d'ordre p-1 et soit $(S_n^{(p)})$ la suite minimale de v.a. réelles qui lui est associée. Alors :

(a) Si $p \geq 2$, $S_n^{(p)}$ converge p.p., dans L^{p-1} et $\operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n^{(p)}(\omega)| \in \Lambda^{p-1}$. Si, en outre $\exists$ r, $p-1 < r < \infty$ tel que $X_i \in L^r$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, alors $S_n^{(p)}$ converge dans L^r et $\operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n^{(p)}(\omega)| \in L^r$.

(b) Si $1 < p < 2$, $S_n^{(p)}$ converge p.p. et si en outre $X_i \in L^p$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $S_n^{(p)}$ converge dans L^p.

<u>Démonstration</u> : Nous allons utiliser la proposition 6 dans le cas où $p \geq 2$ et la proposition 7 si $1 < p < 2$. On constate aisément que si l'on note $d\varphi_n^{(p)}(\tau,\omega)$ la dérivée de la fonction réelle $\tau \to \varphi_n^{(p)}(\tau,\omega)$ on a :

$$d\varphi_n^{(p)}(\tau,\omega) = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{n} |\tau - X_i(\omega)|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tau - X_i(\omega)) \quad .$$

Comme par hypothèse, les v.a. X_i possèdent un moment d'ordre p-1, les v.a. $|\lambda - X_i(\omega)|^{p-1} \operatorname{sgn}(\lambda - X_i(\omega))$ sont intégrables pour toute fonction constante λ. Or la fonction réelle

$$\lambda \longrightarrow \mathbb{E}\,[\,|\lambda - X_n|^{p-1} \operatorname{sgn}(\lambda - X_n)] = \int_{\mathbb{R}} |\lambda - x|^{p-1} \operatorname{sgn}(\lambda - x)\,d\mu(x)$$

[si μ désigne la loi commune des X_n] est continue, strictement croissante et tend vers $\pm\infty$ quand λ tend vers $\pm\infty$. Donc il existe un a réel unique tel que $\mathbb{E}[|a-X_n|^{p-1} \operatorname{sgn}(a-X_n)] = 0$ pour tout n.

D'après l'hypothèse les v.a. $|a-X_n|^{p-1} \operatorname{sgn}(a-X_n)$ sont indépendantes, équidistribuées et intégrables. De plus, on a choisi a de telle sorte qu'elles aient une espérance nulle. D'après la loi des grands nombres usuelle (voir par exemple [6]), la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a-X_i(\omega)|^{p-1}\operatorname{sgn}(a-X_i(\omega)) = \frac{1}{p}\, d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)$$

converge p.p. et dans L^1 vers 0. En outre

$$\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a-X_n|^{p-1}\operatorname{sgn}(a-X_n)\right| \in \Lambda^1 \quad .$$

Et si de plus $X_i \in L^r$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, pour $p-1<r<\infty$, les v.a. $|a-X_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(a-X_i)$ appartiennent à $L^{r/p-1}$ et la convergence a lieu dans $L^{r/p-1}$. En outre

$$\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a-X_i|^{p-1}\operatorname{sgn}(a-X_i)\right| \in L^{r/p-1} \quad .$$

<u>Distinguons alors deux cas</u> :

<u>1er cas. $p\geq 2$.</u>

Comme $\mathbb{R}$ est p-convexe pour tout $p\geq 2$, on peut appliquer la proposition 6 et il existe C tel que :

$$\frac{1}{C}\,|S_n^{(p)}(\omega)-a|^{p-1} \leq |d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)| = \left|\frac{p}{n}\sum_{i=1}^{n} |a-X_i(\omega)|^{p-1}\operatorname{sgn}(a-X_i(\omega))\right| \quad .$$

On déduit donc du résultat précédent que $S_n^{(p)}$ converge vers a p.p. , dans L^{p-1} et dans L^r si $X_i\in L^r$. En outre $\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*}|S_n^{(p)}| \in \Lambda^{p-1}$ et si $X_i\in L^r$ $\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}^*}|S_n^{(p)}|\in L^r$.

<u>2ème cas. $1<p\leq 2$.</u>

Comme $\mathbb{R}$ possède la propriété (P_p) pour tout p, $1<p<2$, on peut appliquer la proposition 7 et il existe C_R telle que :

$$\frac{1}{C_R}\frac{\operatorname{Card} J_n(R)}{n}\operatorname{Inf}(|S_n^{(p)}(\omega)-a|^{p-1},|S_n^{(p)}(\omega)-a|) \leq |d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)|$$

$$= \left|\frac{p}{n}\sum_{i=1}^{n} |a-X_i(\omega)|^{p-1}\operatorname{sgn}(a-X_i(\omega))\right| \quad .$$

Or

$$\frac{\text{Card } J_n(R)}{n} = \frac{1}{n} \text{Card}\{i\ ,\ 1 \le i \le n\ ,\ |X_i(\omega)| \le R\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{|X_i(\omega)| \le R\}}(\omega) \quad .$$

Les v.a. $1_{\{|X_i(\omega)|\le R\}}$ vérifient manifestement la loi des grands nombres usuelle et la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{|X_i(\omega)|\le R\}}(\omega)$ converge p.p. et dans L^r pour tout $1 \le r < \infty$ vers

$$\mathbb{E}\left[1_{\{|X_i(\omega)|\le R\}}\right] = \mu[-R,+R]$$

(où μ est la loi des X_i).

Choisissons R tel que $\mu[-R,+R] \ge \frac{1}{2}$. Alors pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $N(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \ge N(\omega) \Longrightarrow \frac{\text{Card } J_n(R)}{n} \ge \frac{1}{4} \quad .$$

Comme $d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)$ converge p.p. vers 0, ceci implique que $S_n^{(p)}$ converge p.p. vers a. Si maintenant $X_i \in L^p$, on sait que la suite $S_n^{(p)}$ est aussi la suite minimale associée aux X_i au sens de l'espace de Banach L^p et comme les v.a. X_i sont équidistribuées par hypothèse, la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans L^p.

Il est clair d'autre part que la fonction $\omega \mapsto d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)$ appartient à $L^{p/p-1}$ et est précisément la dérivée de la fonction $y \to \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|y - X_i\|_{L^p}^p$. Comme on sait qu'elle converge dans $L^{p/p-1}$ vers 0, on peut appliquer le corollaire 2 du paragraphe 1 et la suite $S_n^{(p)}$ converge vers a dans L^p.

On peut généraliser cette proposition de la façon suivante : considérons des v.a. X_i sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $L^p[0,1]$ (ou $\ell^p(\mathbb{N})$) pour $1 < p < \infty$. On peut alors définir une suite de v.a. $S_n^{(p)}(\omega)$ à valeurs dans $L^p[0,1]$ (ou $\ell^p(\mathbb{N})$) de tèlle sorte que pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n^{(p)}(\omega)$ réalise le minimum de la fonction $Y \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|Y - X_i(\omega)\|^p$. La démonstration de la proposition 9 s'applique alors mot pour mot pour démontrer le résultat suivant :

Proposition 10 : Soit X_i une suite de v.a. sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $L^p[0,1]$ (ou $\ell^p(\mathbb{N})$), équidistribuées, indépendantes et possédant un moment d'ordre p-1. Alors :

(a) Si $p \geq 2$, $S_n^{(p)}$ converge p.p. et dans $L^{p-1}((\Omega,\mathcal{A},P);L^p[0,1])$ (ou $L^{p-1}((\Omega,\mathcal{A},P);\ell^p(\mathbb{N})]$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n^{(p)}| \in \Lambda^{p-1}(L^p[0,1])$ (ou $\Lambda^{p-1}(\ell^p(\mathbb{N}))$), si en outre $X_i \in L^r((\Omega,\mathcal{A},P),L^p[0,1])$ [ou $L^r((\Omega,\mathcal{A},P);\ell^p(\mathbb{N})]$, pour $p-1 < r < \infty$, alors la convergence a lieu dans ces espaces et de plus $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n^{(p)}|$ appartient à ces espaces.

(b) Si $1 < p < \infty$, S_n^p converge p.p. et si $X_i \in L^p((\Omega,\mathcal{A},P);L^p[0,1])$ [ou $L^p(\Omega,\mathcal{A},P);\ell^p(\mathbb{N}))]$ la convergence a lieu dans ces espaces.

Notons que ce résultat s'étendrait naturellement au cas de v.a. X_i `valeurs dans un Banach E p-convexe ou possédant (P_p). Finalement, de la même façon on obtient un résultat analogue dans le cas où la suite des X_i n'est pas équidistribuée. Citons simplement ce résultat qui figure d'ailleurs dans [3] et [5], et dont la démonstration suit celle de la proposition 9 :

<u>Proposition 11</u> : Si les v.a. X_i à valeurs réelles, dans $L^p[0,1]$ ou dans $\ell^p(\mathbb{N})$, sont indépendantes et vérifient :

- $\exists\, q > p-1$ tel que $\quad \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}[\|X_i\|^q] < \infty$

- $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$ $\quad \mathbb{E}[|X_i|^{p-1} \operatorname{sgn}(X_i)] = 0$.

Alors $S_n^{(p)}(\omega)$ converge p.p. vers 0 sur Ω.

<u>§ 3. THEOREME ERGODIQUE</u>

Le même procédé va nous permettre d'obtenir un théorème ergodique. Reprenons les hypothèses du théorème ergodique classique, voir par exemple [7] :

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et φ une application de Ω dans Ω telle que :

1 $\qquad \varphi^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$

2 $\qquad \forall\, A \in \mathcal{A},\ P[\varphi^{-1}(A)] = P[A]$

3 $\qquad P[A\, \Delta \varphi^{-1}(A)] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{ou } P[A] = 0 \\ \text{ou } P[A^c] = 0 \end{cases}$.

Définissons l'opérateur T sur l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ par :

$$(\text{I}) \quad \forall\, \omega \in \Omega \qquad Tf(\omega) = f(\varphi(\omega)) \quad .$$

Grâce aux conditions 1 , 2 on vérifie aisément que cet opérateur T est linéaire continu de L^p dans L^p pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$ et que sa norme en tant qu'opérateur de L^p dans L^p (soit $\|T\|_p$) est telle que $\|T\|_p \leq 1$ pour tout p.

D'autre part, l'hypothèse 3 assure de plus que les points fixes de T sont les fonctions constantes (voir [7]).

Soit alors f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et considérons la suite $(T^i f)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut définir le point $S_n^{(p)}(\omega)$ où la fonction réelle

$$\tau \longmapsto \varphi_n^{(p)}(\tau,\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\tau - T^i f(\omega)|^p$$

prend son minimum.

On vérifie immédiatement que la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite possède les propriétés suivantes :

1) Si $p = 2$, $S_n^{(p)}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i f(\omega)$;

2) Si $f \in L^r$, $S_n^{(p)} \in L^r$;

3) Si $f \in L^p$, $S_n^{(p)}$ est la p-ième suite minimale associée à la suite $(T^i f)_{i\in\mathbb{N}^*}$ dans l'espace L^p.

Pour cette suite minimale qui généralise la suite des sommes de Cesaro de la suite $(T^i f)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on montre un théorème ergodique:

<u>Proposition 12</u> : Soit T l'opérateur défini par (I) et f une fonction de L^{p-1}. Alors :

(a) Si $p \geq 2$, $S_n^{(p)}$ converge p.p. et dans L^{p-1} vers un point fixe de T et $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n^{(p)}| \in \Lambda^{p-1}$. Si en outre $f \in L^r$, $p-1 < r < \infty$, la convergence a lieu dans L^r et $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n^{(p)}| \in L^r$.

(b) Si $1 < p < 2$, $S_n^{(p)}$ converge p.p. vers un point fixe de T et si en outre $f \in L^p$, la convergence a lieu dans L^p.

<u>Démonstration</u> : Elle suit pas à pas celle de la proposition 9. On a :

$$d\varphi_n^{(p)}(\tau,\omega) = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{n} |\tau - T^i f(\omega)|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tau - T^i f(\omega)) \quad .$$

Or si λ est une fonction constante (donc un point fixe de T) on a :

$$|\lambda - T^i f(\omega)|^{p-1} \operatorname{sgn}(\lambda - T^i f(\omega)) = T^i[\,|\lambda - f|^{p-1} \operatorname{sgn}(\lambda - f)] \quad .$$

Donc $$d\varphi_n^{(p)}(\lambda,\omega) = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i[\,|\lambda - f|^{p-1} \operatorname{sgn}(\lambda - f)] \quad .$$

Comme pour la proposition 9, on montre qu'il existe un a réel unique tel que :

$$\mathbb{E}\,[T^i[\,|a - f|^{p-1} \operatorname{sgn}(a - f)]] = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}^* \quad .$$

D'après l'hypothèse, la fonction $|a - f|^{p-1} \operatorname{sgn}(a - f)$ appartient à L^1 et le théorème ergodique usuel, voir [7], implique que la suite $d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)$ converge p.p. et dans L^1 vers 0, et que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)| \in \Lambda^1$. Si de plus $f \in L^r$ pour $p-1 < r < \infty$, la convergence a lieu dans $L^{r/p-1}$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |d\varphi_n^{(p)}(a,\omega)| \in L^{r/p-1}$. Si $p \geq 2$, la proposition 6 permet de conclure immédiatement comme pour la proposition 9. Si $1 < p < 2$, étudions le terme $\frac{1}{n}\operatorname{Card} J_n(R)$. On a

$$\frac{1}{n}\operatorname{Card} J_n(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{|T^i f| \leq R\}}(\omega) \quad .$$

On vérifie que :

$$1_{\{|T^i f| \leq R\}} = T^i(1_{\{|f| \leq R\}}) \quad .$$

Donc d'après le théorème ergodique usuel, la suite

$$\frac{1}{n}\operatorname{Card} J_n(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i(1_{\{|f| \leq R\}})$$

converge p.p. et dans L^r pour tout r, $1 \leqslant r < \infty$ vers $P\{|f| \leq R\}$. On peut choisir R tel que $P\{|f| \leq R\} \geq \gamma > 0$ et on conclut de la même façon que pour la proposition 9 en utilisant la proposition 7.
Si en outre $f \in L^p$, la suite $(T^i f)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans L^p et on applique le corollaire 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy et B. Maurey, Points minimaux et ensembles optimaux dans les espaces de Banach, J. Funct. An. 24 2 (1977).

[2] B. Beauzamy et P. Enflo, Théorèmes de points fixes et d'approximation, Centre de Maths. de l'Ecole Polytechnique, Juillet 1976.

[3] S. Guerre, Thèse de 3ème cycle, Paris VII, publiée par le Centre de Maths. de l'Ecole Polytechnique.

[4] Diestel et Uhl, Geometry of Banach spaces, Selected topics, Lecture Notes in Maths No 485, Springer-Verlag.

[5] B. Beauzamy et S. Guerre, Une loi des grands nombres pour des v.a. non intégrables, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris t. 286 (9/1/78).

[6] J. Neveu, Martingales à temps discret.

[7] N. Dunford et J.T. Schwartz, Linear Operators, part I, Interscience, p. 657-684.
