B. HOST
F. PARREAU

Sur les mesures quasi-idempotentes et la fermeture de $\mu * L^1$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 21 et 22, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L A G E O M E T R I E

D E S E S P A C E S D E B A N A C H

1977-1978

SUR LES MESURES QUASI-IDEMPOTENTES ET LA FERMETURE DE $\mu * L^1$

B. HOST

F. PARREAU

(Université Paris-Nord)

Exposés No XXI-XXII

28 Avril - 5 Mai 1978

§ 1. INTRODUCTION.

G désigne un groupe abélien localement compact, Γ son dual, $M = M(G)$ l'algèbre de convolution des mesures de Radon bornées sur G, et $L^1 = L^1(G)$ est identifié à l'idéal de M formé des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Haar de G. Les notations d'analyse harmonique sont celles de [6], les groupes G et Γ étant notés multiplicativement.

Nous groupons au § 2 les définitions et résultats utilisés sur le spectre Δ de l'algèbre de Banach M. En particulier nous étudions les points critiques de l'adhérence $\overline{\Gamma}$ de Γ dans Δ, reprenant les résultats de Dunkl et Ramirez [2] [3] et nous incluons une démonstration du théorème des idempotents de Cohen.

Au § 3, nous étudions les mesures quasi-idempotentes et au § 4 nous caractérisons les mesures telles que $\mu * L^1$ soit fermé, Glicksberg ayant démontré dans [4] que ces mesures sont quasi-idempotentes.

§ 2. L'ADHERENCE DES CARACTERES FORTS DANS LE SPECTRE DE M(G).

2.1 Nous utiliserons les notations de [1] pour le spectre Δ de l'algèbre de Banach M. $\hat{\mu}$ désigne la transformée de Gelfand de $\mu \in M$.

Pour $\mu \in M$, la restriction d'un caractère $\chi \in \Delta$ à $L^1(\mu)$, identifié à un sous-espace de M, définit un élément χ_μ de $L^\infty(\mu)$. $\Delta(\mu)$ désigne l'ensemble de ces restrictions.

Dans Δ, le conjugué et le module d'un caractère χ, et le produit de deux caractères χ et φ, sont définis de façon que, pour tout $\mu \in M$,

$$(\overline{\chi})_\mu = \overline{\chi}_\mu \quad , \quad |\chi|_\mu = |\chi_\mu| \quad \text{et} \quad (\chi\varphi)_\mu = \chi_\mu \varphi_\mu \quad .$$

On définit une opération de Δ sur M de façon que, pour χ, $\varphi \in \Delta$ et $\mu, \nu \in M$,

$$\chi\mu = \chi_\mu \mu \quad , \quad \chi(\mu * \nu) = \chi\mu * \chi\nu \quad ,$$

$$\widehat{(\varphi\mu)}\,(\chi) = \widehat{(\chi\mu)}\,(\varphi) = \hat{\mu}(\varphi\chi) \quad .$$

Un caractère $\varphi \in \Delta$ est positif si pour toute mesure $\nu \geq 0$, $\hat{\nu}(\varphi)$ est positif ; alors, pour toute mesure $\mu \in M$, φ_μ est positif. L'ensemble Δ_+ des caractères positifs est ordonné de façon que $\varphi \leq \psi$ si et seulement si, pour $\nu \geq 0$, $\hat{\nu}(\varphi) \leq \hat{\nu}(\psi)$, ou, pour $\mu \in M$, $\varphi_\mu \leq \psi_\mu$.

Un élément γ de Γ définit un caractère de M par la transformation Fourier-Stieltjes : $\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma \, d\mu$, pour $\mu \in M$. On appelle ces caractères <u>les caractères forts</u>. En particulier $1 \in \Gamma$ est identifié à l'élément 1 de Δ, tel que, pour tout $\mu \in M$, $1_\mu = 1$ et $\hat{\mu}(1) = \int d\mu$. Les caractères forts sont de module 1. Inversement, si $\chi \in \Delta$ est de module 1, χ n'est pas identiquement nul sur L^1, donc est un caractère fort.

2.2 Pour l'étude des topologies sur Δ, on pourra se reporter à [7], chapitre 5. (J.L. Taylor y présente Δ comme le dual $\hat{S}$ d'un semi-groupe S.)

La <u>topologie faible de Δ</u> est la topologie de Gelfand ; elle correspond sur chaque $\Delta(\mu)$ à la topologie faible $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$. Pour cette topologie, Δ est compact ; Δ_+, et pour $\varphi \in \Delta_+$ l'ensemble des caractères de module $\leq \varphi$ sont fermés ; la conjugaison est continue, mais la multiplication est seulement séparément continue et $\chi \to |\chi|$ n'est pas continue.

<u>Proposition 1</u> : Si $\chi_\alpha \to \chi$ et $|\chi_\alpha| \to \varphi$ faiblement, on a $|\chi| \leq \varphi$.

En effet, soit $\mu \geq 0$ et $f \in L^\infty(\mu)$ tel que $f\chi_\mu = |\chi_\mu|$ et $|f| \leq 1$;

$$\hat{\mu}(|\chi|) = \widehat{(f\mu)}\ (\chi) = \lim \widehat{(f\mu)}\ (\chi_\alpha) \leq \lim \hat{\mu}(|\chi_\alpha|) = \hat{\mu}(\varphi) \quad .$$

Sauf mention explicite du contraire, la topologie considérée sur Δ sera toujours la topologie faible.

La <u>topologie forte</u> sur Δ est définie par l'opération de Δ sur M : χ_α tend fortement vers χ si, pour toute mesure μ, $\|\chi_\alpha\mu - \chi\mu\|$ tend vers 0. Pour cette topologie, la multiplication et les applications $\chi \to \bar{\chi}$, $\chi \to |\chi|$ sont continues.

<u>Proposition 2</u> : Si χ_α tend vers χ faiblement, χ_α tend fortement vers χ dès que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

a) $|\chi| \geq |\chi_\alpha|$;

b) $\chi_\alpha \geq \chi$.

En particulier les topologies fortes et faibles coïncident sur les parties de Δ formées de caractères ayant le même module.

<u>Proposition 3</u> : Toute partie fortement fermée non vide de Δ_+ admet un élément minimal.

Ces résultats sont démontrés par J.L. Taylor [7]. Il définit les points critiques qui sont les éléments minimaux des parties fortement ouvertes et fermées de Δ_+, et montre que ce sont les idempotents h_τ construits ci-dessous. Nous n'utiliserons pas ce résultat, mais nous ferons une construction analogue dans l'adhérence faible de Γ dans Δ.

2.3 Pour une topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale, on note G_τ le groupe G muni de cette topologie, et $M(G_\tau)$ la sous-algèbre de M formée des mesures régulières pour cette topologie. Toute mesure de M admet une décomposition

$$\mu = \mu_\tau + \nu_\tau \quad ,$$

où μ_τ appartient à $M(G_\tau)$ et ν_τ est étrangère à $M(G_\tau)$, c'est-à-dire que $|\nu_\tau|(K) = 0$ pour tout compact K de la topologie τ ; ces mesures forment un idéal, et le projecteur $\mu \to \mu_\tau$ est un homomorphisme de M.

<u>On définit un caractère</u> h_τ <u>de</u> Δ <u>par</u>

$$\hat{\mu}(h_\tau) = \hat{\mu}_\tau(1) = \int d\mu_\tau \quad ; \quad h_\tau \mu = \mu_\tau$$

h_τ <u>est un caractère idempotent</u>.

Si φ appartient au dual Γ_τ de G_τ, l'application $\mu \to \hat{\mu}_\tau(\varphi)$ est un caractère de M, qui est de module h_τ. Les caractères de module h_τ forment un groupe d'élément unité h_τ, isomorphe à Γ_τ (de même que les caractères de module 1 forment un groupe identifié à Γ). Sur ce groupe les topologies forte et faible, ainsi que la topologie du dual de G_τ, coïncident.

2.4 <u>Notations</u> : L'adhérence faible $\overline{\Gamma}$ de Γ dans Δ est un semi-groupe stable par conjugaison. On note $\underline{\overline{\Gamma}_+ = \overline{\Gamma} \cap \Delta_+}$; si $\chi \in \overline{\Gamma}$, $|\chi|$ n'est pas en général dans $\overline{\Gamma}$, mais $|\chi|^2 = \chi\overline{\chi} \in \overline{\Gamma}_+$.

Si h est un idempotent de $\overline{\Gamma}_+$, les caractères de $\overline{\Gamma}$ de module h forment <u>un groupe d'élément unité</u> h, <u>qu'on note</u> Γ_h. Sur Γ_h les topologies forte et faible coïncident (proposition 3).

Par analogie avec les points critiques de J.L. Taylor, on définit :

<u>Définition</u> : Soit $h \in \overline{\Gamma}_+$ un idempotent ; on dit que <u>h est critique dans $\overline{\Gamma}$</u> si h n'est pas limite de caractères de $\overline{\Gamma}_+$ strictement inférieurs à h.

Dans cette définition, les convergences forte et faible sont équivalentes. Il suffit (et d'ailleurs il faut) que <u>l'idempotent h soit un élément minimal d'une partie fortement ouverte et fermée de</u> $\overline{\Gamma}_+$.

<u>Théorème 1</u> : Les idempotents critiques dans $\overline{\Gamma}$ sont les caractères h_τ associés aux topologies τ de groupe localement compact sur G plus fines que la topologie initiale.

a) Soit h un idempotent critique dans $\overline{\Gamma}$ et $\varphi \in \Gamma_h$; si $\varphi_\alpha \to \varphi$ avec $\varphi_\alpha \in \overline{\Gamma}$ et $|\varphi_\alpha| \leq |\varphi| = h$, la convergence est forte (proposition 3) et on a aussi

$$|\varphi_\alpha|^2 \longrightarrow |\varphi|^2 = h \quad , \quad |\varphi_\alpha|^2 \leq h \quad , \quad |\varphi_\alpha|^2 \in \overline{\Gamma}_+ \quad ;$$

donc $|\varphi_\alpha| = h$ pour α assez grand, c'est-à-dire $\varphi_\alpha \in \Gamma_h$.
Γ_h est donc ouvert dans l'ensemble compact des caractères de $\overline{\Gamma}$ de module inférieur ou égal à h ; Γ_h <u>est un groupe localement compact</u>.

C. Dunkl et D. Ramirez [2], [3], ont caractérisé les groupes localement compacts dans $\overline{\Gamma}$, avec le résultat donné par le théorème (le groupe Γ_h est alors isomorphe à un groupe Γ_τ). Nous en donnons une démonstration plus directe.

b) Soit G_h le groupe dual de Γ_h. L'homomorphisme $j : \gamma \to h\gamma$ de Γ dans Γ_h est continu, d'image dense dans

$$\overline{h\Gamma} = h\overline{\Gamma} = \{\chi \in \overline{\Gamma} \ ; \ h\chi = \chi\} = \{\chi \in \overline{\Gamma} \ ; \ |\chi| \leq h\} \quad .$$

Donc l'adjoint $j^* : G_h \to G$ de j est une injection continue.
Soit d'autre part δ_g la mesure de Dirac en $g \in G$; pour $\chi \in \Delta$, $\chi \cdot \delta_g$ est

de la forme $\lambda\delta_g$; en intégrant on trouve $\lambda = \hat{\delta}_g(\chi) \neq 0$ puisque δ_g est inversible. Pour $\chi, \psi \in \Delta$, il vient

$$\chi\psi \cdot \delta_g = \hat{\delta}_g(\chi\psi)\delta_g = \hat{\delta}_g(\chi)\, \hat{\delta}_g(\psi)\delta_g \neq 0 \quad .$$

$\varphi \to \hat{\delta}_g(\varphi)$ définit donc un caractère $\tilde{g}$ continu sur Γ_h -en particulier $\hat{\delta}_g(h) = 1$- et pour $\gamma \in \Gamma$

$$<\tilde{g}, j(\gamma)> = \hat{\delta}_g(h\gamma) = \hat{\delta}_g(h)\, \hat{\delta}_g(\gamma) = \hat{\delta}_g(\gamma) = <g,\gamma> \quad ,$$

soit $g = j^*(\tilde{g})$, ce qui montre que j^* est surjectif.

j^* est donc une bijection continue de G_h sur G ; on identifie G_h au groupe G muni de sa topologie τ plus fine que la topologie initiale de G.

c) Pour montrer $h = h_\tau$, il suffit de montrer que, pour $\mu \in M$, $h\mu \in M(G_\tau)$ et que, pour $\nu \in M(G_\tau)$, $h\nu = \nu$.
Soit $\mu \in M$; comme $h|\mu| = |h\mu|$ et que toute mesure absolument continue par rapport à une mesure de $M(G_\tau)$ est dans $M(G_\tau)$, on peut se restreindre au cas où μ est positive. Alors la restriction de $\hat{\mu}$ à Γ_h est définie et continue ; c'est donc, d'après le théorème de Bochner, la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure $\nu \in M(G_h)$. En identifiant G_h à G_τ , on a plongé $M(G_h)$ dans M de façon que, pour $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\nu}(\gamma) = \hat{\nu}(j(\gamma)) = \hat{\mu}(h\gamma) = \widehat{(h\mu)}\ (\gamma) \quad ;$$

alors $h\mu = \nu \in M(G_\tau)$.

Inversement, soit $\nu \in M(G_\tau)$ et $\gamma_\alpha \to h$; $h\gamma_\alpha \to h$, donc γ_α converge vers l'unité dans la topologie induite sur Γ par j, qui est la topologie sur Γ duale de la topologie τ sur G ; pour cette topologie $\hat{\nu}$ est continue, et pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\hat{\nu}(h\gamma) = \lim \hat{\nu}(\gamma_\alpha\gamma) = \hat{\nu}(\gamma) \quad .$$

Donc $\nu = h\nu$, ce qui achève de démontrer que $h = h_\tau$.

d) Il reste à montrer que, pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale, l'idempotent h_τ est un idempotent critique dans $\overline{\Gamma}$.
Soit Ω l'ensemble des caractères de $\overline{\Gamma}_+$ supérieurs ou égaux à h_τ ; Ω est

fermé et $1 \in \Omega$, donc Ω admet un élément minimal h ; il est clair que $h^2 \leq h$ et $h^2 \in \Omega$, donc h est idempotent.

Soit μ une mesure de probabilité dans $L^1(G_\tau)$; si $\chi \in \overline{\Gamma}$ et si $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$, la restriction de χ à $M(G_\tau)$, non nulle sur $L^1(G_\tau)$, est un caractère fort de $M(G_\tau)$, et $|\chi| \geq h_\tau$. Ω est donc aussi l'ensemble des caractères φ de $\overline{\Gamma}_+$ tels que $\hat{\mu}(\varphi) \neq 0$; c'est un ouvert de $\overline{\Gamma}_+$, et h est critique.

Soient alors $j : \Gamma \to \Gamma_h$, $j_\tau : \Gamma \to \Gamma_\tau$ et $k : \Gamma_h \to \Gamma_\tau$ les homomorphismes définis par $j(\gamma) = h\gamma$, $j_\tau(\gamma) = h_\tau\gamma$ et $k(\varphi) = h_\tau\varphi$; ils sont continus et $j_\tau = k \circ j$; les adjoints de j et j_τ sont les identités continues $G_h \to G$ et $G_\tau \to G$; l'adjoint k^* de k est donc l'identité de G_τ dans G_h et est continu ; pour montrer $h_\tau = h$, il suffit d'après ce qui précède de montrer que k^* est un isomorphisme ; k est injectif et d'image dense (adjoint de l'identité) et il reste à vérifier que l'image réciproque par k d'un compact K de Γ_τ est un compact de Γ_h ; soit K' le compact de $\overline{\Gamma}$

$$K' = \{\chi \in \overline{\Gamma} \ ; \ |\chi| \leq h \quad \text{et} \ h\chi \in K\} \quad ;$$

$k^{-1}(K)$ est inclus dans K', et, si $\chi \in K'$, $|h_\tau\chi| = h_\tau$ donc $|\chi| \geq h_\tau$; on a alors $h_\tau \leq |\chi^2| \leq h$, et, d'après la définition de h comme élément minimal de Ω, $|\chi|^2 = h$; χ est donc dans Γ_h , $K' = k^{-1}(K)$.

$k^{-1}(K)$ est compact, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Cette dernière partie de la démonstration (d) montre que pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale et pour toute mesure $\mu \in M$, on a

$$\hat{\mu}_\tau(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)} \quad .$$

2.5 Dans la suite de ce paragraphe, nous étudions, pour une mesure η idempotente -plus généralement pour une mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes a ses valeurs entières, le <u>semi-groupe $\overline{\Gamma}(\eta)$</u> des restrictions à $L^1(\eta)$ des caractères de $\overline{\Gamma}$, qui est aussi l'adhérence pour la topologie $\sigma(L^\infty(\eta), L^1(\eta))$ du groupe $\Gamma(\eta)$ des caractères forts dans $L^\infty(\eta)$.

<u>Proposition 4</u> : Soit η une mesure telle que $\hat{\eta}(\Gamma) \subset \mathbb{Z}$;

a) La topologie forte est discrète dans $\overline{\Gamma}(\eta)$,

b) tout $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ a son module idempotent ,

c) $\overline{\Gamma}_+(\eta) = \{\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta) \ ; \ \varphi \geq 0\}$ est fini.

a) On a encore $\hat{\eta}(\overline{\Gamma}) \subset \mathbb{Z}$, et si $\varphi,\psi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ avec $\varphi \neq \psi$, $\varphi\eta$ est différente de $\psi\eta$; il existe donc un $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$|(\widehat{\varphi\eta})\ (\gamma) - (\widehat{\psi\eta})\ (\gamma)| = |\hat{\eta}(\varphi\gamma) - \hat{\eta}(\psi\gamma)| \geq 1 \quad ;$$

donc
$$\|\varphi\eta - \psi\eta\| \geq 1 \quad .$$

b) Soit $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$; il suffit de montrer que $|\varphi^2|$ est idempotent ; on peut donc supposer $\varphi \geq 0$. Alors la suite (φ^n) converge fortement dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, donc est stationnaire ; or si $\varphi^n = \varphi^{n+1}$ pour un n, il est clair que φ est idempotent.

c) On suppose que φ_α converge vers φ faiblement, avec $\varphi_\alpha, \varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$;

$$\|\varphi\eta - \varphi\varphi_\alpha\eta\| = \int (\varphi - \varphi\varphi_\alpha)\ d|\eta| = \widehat{|\eta|}\ (\varphi) - \widehat{|\eta|}\ (\varphi\varphi_\alpha) \longrightarrow 0$$

$$\|\varphi_\alpha\eta - \varphi\varphi_\alpha\eta\| = \int (\varphi_\alpha - \varphi\varphi_\alpha)\ d|\eta| = \widehat{|\eta|}\ (\varphi_\alpha) - \widehat{|\eta|}\ (\varphi\varphi_\alpha) \longrightarrow 0$$

donc $\|\varphi\eta - \varphi_\alpha\eta\| \to 0$, la topologie faible (compacte) coïncide avec la topologie forte (discrète) sur $\overline{\Gamma}_+(\eta)$, qui est donc fini.

Le dernier argument montre plus généralement que pour un idempotent φ de Δ les convergences forte et faible vers φ dans Δ_+ sont équivalentes.

$\Gamma(\eta)$ est dense dans le groupe des caractères de module 1 de $\overline{\Gamma}(\eta)$, et celui-ci est discret car la topologie forte y coïncide avec la topologie faible ; dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, tout caractère de module 1 est donc un caractère fort.

Soit H le groupe support de η ; $H^\perp = \{\gamma \in \Gamma \ ;\ \gamma\eta = \eta\}$ est le noyau de la projection $\Gamma \to \Gamma(\eta)$; $H^\perp$ est ouvert, donc H est compact.

On dira que η est une <u>mesure élémentaire</u> si 1 est le seul élément positif non nul de $\overline{\Gamma}(\eta)$. L'ensemble des $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ tels que $\hat{\eta}(\varphi) \neq 0$, qui est compact, est alors contenu dans le groupe discret $\Gamma(\eta)$ des caractères de module 1 ; il est donc fini.
Dans ce cas, $\hat{\eta}$ est nul sauf sur une réunion finie de classes $\gamma_j H^\perp$, sur chacune desquelles $\hat{\eta}$ a une valeur constante $n_j \in \mathbb{Z}$. On trouve donc,

si m_H désigne la mesure de Haar de H,

$$\eta = \sum_{1\leq j\leq k} n_j\, \gamma_j\, m_H \quad .$$

Dans le cas général $\hat{\eta}(\Gamma) \subset \mathbb{Z}$, pour tout $\varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$, on définit <u>une partie élémentaire de</u> η <u>associée à</u> φ,

$$\varepsilon_\varphi = \Big(\prod_{\psi<\varphi} (\varphi - \psi)\Big)\eta = (\varphi - \sup_{\psi<\varphi} \psi)\eta \quad .$$

ε_φ est une combinaison à coefficients entiers de mesures $\psi\eta$, donc $\widehat{\varepsilon_\varphi}$ a ses valeurs entières. ε_φ est bien une mesure élémentaire, car tout élément $\theta \in \overline{\Gamma}_+(\varepsilon_\varphi)$ est la restriction d'un élément θ_o de $\overline{\Gamma}_+(\eta)$ (si $\gamma_\alpha \to \theta$ dans $\overline{\Gamma}(\varepsilon_\varphi)$, et si θ_1 est un point adhérent de (γ_α) dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, $\theta_o = |\theta_1|^2$ a aussi θ pour restriction dans $\overline{\Gamma}(\varepsilon_\varphi)$) ; et

- si $\theta_o \geq \varphi$, on a $\theta_o\psi = \psi$ pour tout $\psi \leq \varphi$, donc $\theta_o\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi$, et $\theta = 1$,
- sinon $\theta_o\varphi < \varphi$ et $\theta_o(\varphi - \theta_o\varphi) = 0$, donc $\theta_o\varepsilon_\varphi = 0$, et $\theta = 0$.

De plus, η est la somme de ses parties ε_φ pour $\varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$.
Cette décomposition de η en une somme finie de mesures élémentaires de la forme $\Sigma\, n_j\, \gamma_j\, m_H$ est celle du <u>théorème des idempotents de Cohen</u>.

<u>Définition</u> : On dit qu'une partie E de Γ est un ensemble de Cohen si E est le spectre de Fourier d'une mesure idempotente η, c'est-à-dire $E = \{\gamma \in \Gamma \,/\, \hat{\eta}(\gamma) \neq 0\}$.

<u>§ 3. MESURES QUASI-IDEMPOTENTES.</u>

3.1 <u>Définition</u> : On dit que la mesure $\mu \in M$ est quasi-idempotente si $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$.

I. Glicksberg étudie ces mesures dans [5]. Si μ est une mesure quasi-idempotente et E son spectre de Fourier, c'est-à-dire $E = \{\gamma \in \Gamma \,/\, \hat{\mu}(\gamma) \neq 0\}$, on dit que E est un ensemble quasi-Cohen. Si χ appartient à l'adhérence $\overline{E}$ de E dans Δ, χ est limite de caractères $\gamma_i \in E$, et $|\hat{\mu}(\chi)| = \lim|\hat{\mu}(\gamma_i)| \geq 1$. Si $\chi \in \overline{\Gamma} \setminus \overline{E}$, χ est limite de caractères de $\Gamma \setminus E$ et $\hat{\mu}(\chi) = 0$. Pour un caractère φ de $\overline{\Gamma}$, la mesure $\varphi\mu$ est quasi-idempotente. En effet :

si $\varphi\gamma \in \overline{E}$, $\quad |\widehat{(\varphi\mu)}(\gamma)| = |\hat{\mu}(\varphi\gamma)| \geq 1$

si $\varphi\gamma \notin \overline{E}$, $\quad \widehat{(\varphi\mu)}(\gamma) = \hat{\mu}(\varphi\gamma) = 0$.

<u>Proposition 5</u> : Pour que le spectre de Fourier de la mesure quasi-idempotente μ soit un ensemble de Cohen, il suffit que μ vérifie la propriété suivante :

(*) Si $\chi \in \overline{\Gamma}$ et si η est une mesure idempotente tels que $|\chi|^2\mu$ et $|\chi|^2\eta$ aient même spectre de Fourier, alors $\hat{\mu}(\chi)$ et $\hat{\eta}(\chi)$ sont tous deux nuls ou tous deux non nuls.

On suppose que la mesure quasi-idempotente μ vérifie la propriété (*).

3.2 <u>Définition</u> : On appelle Λ l'ensemble des caractères $\varphi \in \overline{\Gamma}_+$ pour lesquels il existe une mesure idempotente η telle que $\varphi\mu$ et $\varphi\eta$ aient même spectre de Fourier.

On veut donc démontrer que 1 appartient à Λ. Pour un caractère $\varphi \in \Lambda$, on note η_φ la mesure idempotente $\varphi\eta$. Cette mesure est caractérisée par son spectre de Fourier, qui est le même que celui de $\varphi\mu$. De plus, $\varphi\eta_\varphi = \eta_\varphi$.

<u>Notation</u> : Pour deux nombres complexes s et t, on écrira $s \sim t$ si s et t sont tous deux nuls ou tous deux non nuls.
Ainsi, pour $\varphi \in \Lambda$, et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\eta}_\varphi(\gamma)$, et $\hat{\mu}(\varphi\chi) \sim \hat{\eta}_\varphi(\chi)$ pour tout $\chi \in \overline{\Gamma}$. En particulier, si $\varphi, \psi \in \Lambda$, $\hat{\eta}_\varphi(\psi\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi\psi\gamma) \sim \hat{\eta}_\psi(\varphi\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc

$$\psi\eta_\varphi = \varphi\eta_\psi \quad .$$

<u>Lemme 1</u> : Soit h un idempotent critique dans $\overline{\Gamma}$; on suppose que tout caractère $\varphi \in \overline{\Gamma}_+$ strictement inférieur à h appartient à Λ. Alors $h \in \Lambda$.

Soit $\Lambda_h = \{\varphi \in \overline{\Gamma}_+ \ ; \ \varphi < h\}$. On suppose $\Lambda_h \subset \Lambda$.

a) Pour une mesure idempotente η, <u>l'ensemble des</u> $\varphi \in \Lambda_h$ <u>tels que</u> $\eta_\varphi = \eta$ <u>est ouvert dans</u> Λ_h .
En effet, si cette propriété était fausse, il existerait $\varphi \in \Lambda_h$, avec $\eta_\varphi = \eta$, (φ_α) dans Λ_h et (γ_α) dans Γ tels que

$$\varphi_\alpha \longrightarrow \varphi \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\varphi_\alpha \gamma_\alpha) \not\sim \hat{\eta}(\gamma_\alpha) \quad .$$

Pour α assez grand, $\varphi_\alpha \eta = \varphi\eta = \eta$ (proposition 4), donc $\hat{\eta}(\gamma_\alpha) = \hat{\eta}(\varphi_\alpha \gamma_\alpha)$; on peut supposer $\varphi_\alpha \gamma_\alpha \to \chi \in \overline{\Gamma}$, de sorte que

$$\hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}(\chi) \quad .$$

D'après la proposition 1, on a $|\chi| \leq \lim |\varphi_\alpha \ \gamma_\alpha| = \varphi$, donc $|\chi|^2 \leq \varphi$. $|\chi|^2$ est dans Λ_h, et la projection de φ dans $\overline{\Gamma}(\eta_{|\chi|^2})$ est égale à 1, car elle est supérieure ou égale à celle de $|\chi|^2$ (et $|\chi|^2 \ \eta_{|\chi|^2} = \eta_{|\chi|^2}$), donc

$$\eta_{|\chi|^2} = \varphi\eta_{|\chi|^2} = |\chi|^2 \ \eta \quad ;$$

$$\hat{\mu}(|\chi|^2 \ \gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2 \ \gamma) \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma \quad .$$

Alors $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$ d'après l'hypothèse (*), ce qui est contradictoire.

b) Λ_h est compact, puisque h est critique, et il n'existe donc qu'un nombre fini de mesures η_φ distinctes.
Pour $\varphi, \psi \in \Lambda$, on a vu $\psi\eta_\varphi = \varphi\eta_\psi$, c'est-à-dire que η_φ et η_ψ ont la même partie dans $\varphi M \cap \psi M$. On va construire une mesure idempotente η telle que, pour tout $\varphi \in \Lambda_h$, $\eta_\varphi = \varphi\eta$.
Soit, pour $\psi \in \Lambda_h$, ε_ψ la partie élémentaire

$$\varepsilon_\psi = \prod_{\theta\eta_\psi \neq \eta_\psi} (\psi - \theta)\eta_\psi \quad .$$

Avec les notations de 2.5, c'est la partie élémentaire de η_ψ associée à l'élément 1 de $\overline{\Gamma}_+(\eta_\psi)$. Mais si $\varphi \in \Lambda_h$ et $\psi\eta_\varphi = \eta_\psi$, ε_ψ est aussi la partie élémentaire de η_φ associée à ψ, avec alors $\varphi\varepsilon_\psi = \varepsilon_\psi$. Par contre, si $\eta_\psi \neq \psi\eta_\varphi = \varphi\eta_\psi$, la projection de φ dans $\overline{\Gamma}_+(\eta_\psi)$ est strictement inférieure à 1, et $\varphi\varepsilon_\psi = 0$.
Pour $\varphi \in \Lambda_h$, toutes les parties élémentaires de η_φ sont de la forme ε_ψ pour un $\psi \in \Lambda_h$; on a en tout un nombre fini de mesures ε_ψ distinctes ; soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ces mesures et $\eta' = \sum_{1 \leq j \leq n} \varepsilon_j$; pour tout $\varphi \in \Lambda_h$,

$$\eta_\varphi = \sum_{\varphi\varepsilon_j = \varepsilon_j} \varepsilon_j = \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi\varepsilon_j = \varphi\eta' \quad .$$

η' est une mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes a ses valeurs entières ; on peut la remplacer par la mesure idempotente η telle que $\hat{\eta}^{-1}(0) = \hat{\eta}'^{-1}(0)$, donc $\hat{\eta}(\chi) \sim \hat{\eta}'(\chi)$ pour tout $\chi \in \overline{\Gamma}$, et

$$\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\eta}_{\varphi}(\gamma) \sim \hat{\eta}'(\varphi\gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi\gamma)$$

pour tout $\varphi \in \Lambda_h$ et tout $\gamma \in \Gamma$.

c) Soit $\Phi = \{\chi \in h\overline{\Gamma} \; ; \; \hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}(\chi)\}$;
C'est un ensemble compact ouvert dans $h\overline{\Gamma}$.
Si $\chi \in h\overline{\Gamma}$ et $|\chi| < h$, $|\chi|^2$ appartient à Λ_h ; donc $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et d'après l'hypothèse (*), $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$. <u>Donc Φ est inclus dans</u> $\Gamma_h = \{\chi \in \overline{\Gamma} \; ; \; |\chi| = h\}$.

D'après le théorème 1, si G_h est le groupe dual de Γ_h, $M(G_h)$ se plonge dans M de façon que la transformée de Fourier-Stieltjes (sur Γ_h) d'une mesure $\nu \in M(G_h)$ coïncide avec la restriction de $\hat{\nu}$ à $\Gamma_h \subset \Delta$.
Soit alors ε_h la mesure élémentaire dans $L^1(G_h)$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma_h$

$$\hat{\varepsilon}_h(\gamma) \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad \gamma \notin \Phi \;, \\ = 1 & \text{si} \quad \gamma \in \Phi \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\gamma) = 0 \\ = -1 & \text{si} \quad \gamma \in \Phi \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\gamma) = 1 \;. \end{cases}$$

$\eta_h = \eta + \varepsilon_h$ est une mesure idempotente telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\mu}(h\gamma) \sim \hat{\eta}_h(h\gamma) \quad .$$

Donc h appartient à Λ, et le lemme 1 est démontré.

3.3 a) <u>Λ est fortement ouvert et fermé dans</u> $\overline{\Gamma}_+$.
Soit (φ_α) une suite généralisée dans $\overline{\Gamma}_+$ convergeant fortement vers $\varphi \in \overline{\Gamma}_+$; pour un réel $\varepsilon > 0$, on a pour α assez grand $\|\varphi_\alpha\mu - \varphi\mu\| < \varepsilon$, donc pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) - \hat{\mu}(\varphi\gamma)| < \varepsilon$. Ceci implique que pour α assez grand

$$\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi\gamma) \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma \quad .$$

- Si $\varphi \in \Lambda$, on a aussi $\varphi_\alpha\eta_\varphi = \varphi\eta_\varphi = \eta_\varphi$ pour α assez grand, et $\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\eta}_\varphi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc $\varphi_\alpha \in \Lambda$.

- Si $\varphi_\alpha \in \Lambda$, $\hat{\eta}_{\varphi_\alpha}^{-1}(0) = (\widehat{\varphi_\alpha \mu})^{-1}(0)$ est stationnaire, η_{φ_α} est une mesure idempotente fixe η pour α assez grand, avec $\varphi_\alpha \eta = \eta$ donc $\varphi\eta = \eta$, et, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi_\alpha \gamma) \sim \hat{\eta}(\gamma)$; donc $\varphi \in \Lambda$.

b) Si Λ n'est pas $\overline{\Gamma}_+$ tout entier, il existe un élément minimal φ dans l'ensemble fortement fermé $\overline{\Gamma}_+ \setminus \Lambda$. Si φ est un idempotent, il est critique dans $\overline{\Gamma}$ puisque Λ est aussi fortement fermé : d'après le lemme 1, $\varphi \in \Lambda$, ce qui est absurde.
Si φ n'est pas idempotent, $\varphi^2 < \varphi$, donc $\varphi^2 \in \Lambda$, et il existe une mesure idempotente η telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\hat{\mu}(\varphi^2\gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi^2\gamma) \quad .$$

On peut appliquer l'hypothèse (*), pour $\alpha \in \Gamma$, à $\chi = \varphi\alpha$, $|\chi|^2 = \varphi^2$; on trouve encore $\hat{\mu}(\varphi\alpha) \sim \hat{\eta}(\varphi\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Gamma$, et donc $\varphi \in \Lambda$.

Λ est donc $\overline{\Gamma}_+$ tout entier, en particulier $1 \in \Lambda$, et il existe une mesure idempotente η telle que

$$\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0) \quad ,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 5.

3.4 <u>Corollaire 1</u> : Si E et $\Gamma \setminus E$ sont des ensembles quasi-Cohen, E est un ensemble de Cohen.

Soient μ et ν deux mesures quasi-idempotentes dont le spectre de Fourier soit respectivement E et $\Gamma \setminus E$. Nous allons montrer que la mesure μ vérifie l'hypothèse (*) de la proposition 5.
Soit $\varphi \in \overline{\Gamma}$. Comme $\mu * \nu = 0$, $\varphi\mu * \varphi\nu = 0$. D'autre part, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|(\mu + \nu)^\wedge(\gamma)| \geq 1$. Donc pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|(\varphi\mu + \varphi\nu)^\wedge(\gamma)| \geq 1$. Les spectres de Fourier de $\varphi\mu$ et $\varphi\nu$ sont donc deux parties complémentaires de Γ.
Soit χ un caractère de $\overline{\Gamma}$, η une mesure idempotente et supposons que $|\chi|^2\mu$ et $|\chi|^2\eta$ ont même spectre de Fourier.
Alors $|\chi|^2\mu * |\chi|^2\eta = |\chi|^2\mu$, donc $|\chi|^2(\mu * \eta - \mu) = 0$, $\chi(\mu * \eta - \mu) = 0$ et $\chi.\mu * \chi\eta = \chi.\mu$. Le spectre de Fourier de $\chi\mu$ est donc inclus dans celui de $\chi\eta$. D'autre part, le spectre de Fourier de $|\chi|^2\nu$ est complémentaire de celui de $|\chi|^2\mu$, donc ne coupe pas celui de $|\chi|^2\eta$ et $|\chi|^2\nu * |\chi|^2\eta = 0$; donc $|\chi|^2(\nu * \eta) = 0$, $\chi(\nu * \eta) = 0$ et $\chi\nu * \chi\eta = 0$. Le spectre de Fourier de $\chi\nu$ ne coupe pas le spectre de Fourier de $\chi\eta$. Le spectre de Fourier de

de $\chi\mu$ étant le complémentaire de celui de $\chi\nu$, il contient donc celui de $\chi\eta$.
Finalement $\chi\mu$ et $\chi\eta$ ont même spectre de Fourier, et μ vérifie l'hypothèse (*).

§ 4. $\mu * L^1$ EST-IL FERME ?

4.1 Dans ce paragraphe, nous démontrons une conjecture de Glicksberg [4] :

Théorème 2 : Si $\mu * L^1$ est fermé, il existe une mesure idempotente $\eta \in M$ telle que $\mu * L^1 = \eta * L^1$, et μ est la convolvée de la mesure η et d'une mesure inversible.

I. Glicksberg a commencé l'étude de ce problème dans [4]. Nous utilisons essentiellement ses théorèmes 1.4 et 1.6 et corollaire 1.5 résumés dans la proposition suivante :

Proposition 6 : Soit $\mu \in M$. $\mu * L^1$ est fermé si et seulement si $\mu * M$ est fermé. Alors :

a) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$;

b) $\mu * L^1$ est l'idéal des fonctions de L^1 dont la transformée de Fourier est nulle sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$;

c) $\mu * M$ est l'idéal des mesures de M dont la transformée de Fourier-Stieltjes est nulle sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$.

Corollaire : Si $\mu * L^1$ est fermé, et si le spectre de Fourier de μ est un ensemble de Cohen, μ est la convolvée d'une mesure idempotente et d'une mesure inversible.

Soit en effet η la mesure idempotente ayant même spectre de Fourier que μ. D'après la proposition 6 c), $\eta \in \mu * M$ et il existe $\nu \in M$ avec $\mu * \nu = \eta$. Soit $\lambda = \mu + (\delta - \eta)$. Alors λ est inversible, car $\lambda * (\eta * \nu + \delta - \eta) = \delta$ et $\eta * \lambda = \mu$.
Si $\mu * L^1$ est fermé, d'après la proposition 6, μ est quasi-idempotente (à la multiplication par une constante près). Dans la partie technique qui suit, nous montrons que μ vérifie l'hypothèse de la proposition 5. Alors le spectre de Fourier de μ est un ensemble de Cohen, et le théorème 2 se déduit du corollaire de la proposition 6.

4.2 Pour la démonstration du théorème 2, dans ce paragraphe et le suivant, on considère une mesure μ de M telle que $\mu * L^1$ soit fermé. Nous conservons la notation du § 3 :

Pour deux nombres complexes s, t, on écrira $s \sim t$ si s et t sont tous les deux nuls, ou tous les deux non nuls.

Dans la démonstration du lemme qui suit, on utilise des produits de Riesz, avec les définitions et les résultats de G. Brown [1] ; nous rappelons simplement les propriétés qui interviènnent ici.

Soit L un groupe abélien compact, m_L sa mesure de Haar ; une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ d'éléments $\neq 1$ de L est dite dissociée si, pour toute suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ d'entiers de valeur absolue ≤ 2,

$$\prod_{1\leq k\leq n} \gamma_k^{\varepsilon_k} = 1$$

si et seulement si $\gamma_k^{\varepsilon_k} = 1$ pour $1 \leq k \leq n$.
Pour $0 < r \leq 1/2$, si la suite (γ_n) est dissociée, le produit

$$\prod_{n\geq 1} (1 + r\gamma_n + r\overline{\gamma_n}) \cdot m_L$$

converge vaguement dans M(L) vers une mesure de probabilité ρ appelée produit de Riesz. Les γ_n sont appelés les lettres et les produits finis

$\prod_{1\leq k\leq n} \gamma_k^{\varepsilon_k}$ avec $|\varepsilon_k| \leq 1$, sont appelés les mots du produit de Riesz ; la longueur d'un mot est le nombre d'exposants non nuls qui y figurent.

Pour $\gamma \in L$, $\hat{\rho}(\gamma)$ est non nul si et seulement si γ est un mot, avec alors $0 < \hat{\rho}(\gamma) \leq 2r$.
Pour tout caractère φ de M(L) adhérent à la suite (γ_n), d'après [1], φ_ρ est une constante non nulle. Alors, pour le caractère $h = |\varphi|^0 = \lim_{\varepsilon\to 0} |\varphi|^\varepsilon$ (pour la définition de ces caractères, on pourra se reporter à [1]), on a $h_\rho = 1$. Par contre, comme γ_n tend vers l'infini dans $\hat{L}$, on a $\varphi m_L = 0$, $hm_L = 0$, et $h\sigma = 0$ pour toute mesure σ absolument continue par rapport à m_L.
Si L est un sous-groupe compact de G, on dira que la suite (γ_n) dans Γ est dissociée sur L si sa projection dans $\hat{L} = \Gamma / L^\perp$ est dissociée. On a alors les mêmes propriétés pour le produit de Riesz construit sur L, un caractère φ adhérent à la suite (γ_n) dans $\overline{\Gamma}$, et l'idempotent $h = |\varphi|^0$ de Δ.

3.2 <u>Lemme 2</u> : Soit $\chi \in \overline{\Gamma}$; si $\hat{\mu}(|\chi^2|\gamma) \neq 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.

a) On suppose $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

On construit par récurrence une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ de façon que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p < n$,

$$
(\mathrm{I}) \left\{
\begin{array}{l}
\hat{\mu}(\gamma_n) = 0 \quad , \\[2ex]
\hat{\mu}(\gamma_n \overline{\gamma_p} \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\overline{\gamma_n} \gamma_p \gamma) \neq 0 \quad , \\[2ex]
\text{pour tout } \gamma \text{ appartenant à l'ensemble} \\[2ex]
A_p = \{ \prod_{1\leq k<p} \gamma_k^{\varepsilon_k} \ ; \ |\varepsilon_k| \leq 3\} \quad .
\end{array}
\right.
$$

Soit en effet $\gamma_\alpha \to \chi$ ($\gamma_\alpha \in \Gamma$) ; on suppose construits pour $n < q$ des termes γ_n satisfaisant les conditions (I) et tels que, pour tout $n < q$ et tout $\gamma \in A_n$,

$$\hat{\mu}(\overline{\gamma_n} \chi \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_n \overline{\chi} \gamma) \neq 0 \quad .$$

Pour α assez grand, 0 étant isolé dans $0 \cup \hat{\mu}(\overline{\Gamma})$, on a pour $n < q$ et $\gamma \in A_n$, $\hat{\mu}(\gamma_\alpha) = 0$, $\hat{\mu}(\overline{\gamma_n} \gamma_\alpha \gamma) \neq 0$ et $\hat{\mu}(\gamma_n \overline{\gamma_\alpha} \gamma) \neq 0$.
De plus $\overline{\gamma_\alpha}\chi$ et $\gamma_\alpha \overline{\chi}$ convergent vers $|\chi^2|$, et, $\hat{\mu}(|\chi^2|\gamma)$ étant non nul pour tout γ, on a aussi pour α assez grand, pour tout $\gamma \in A_q$,

$$\hat{\mu}(\overline{\gamma_\alpha} \chi \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_\alpha \overline{\chi} \gamma) \neq 0 \quad .$$

On peut donc choisir γ_q parmi les γ_α , satisfaisant les conditions (I) et la condition supplémentaire ci-dessus.
Dans la suite, on extrait des sous-suites de (γ_n) -les conditions (I) restent vérifiées- sans changer la notation.

b) On suppose que γ_n converge faiblement dans $\overline{\Gamma}(\mu)$ vers $f \in \overline{\Gamma}(\mu)$, et que, pour toute suite (p_n) telle que $n < p_n$, $\overline{\gamma_n} \gamma_{p_n}$ vers $|f^2|$ dans $\overline{\Gamma}(\mu)$.
C'est possible si le compact $\overline{\Gamma}(\mu)$ est métrisable, quitte à prendre une sous-suite : si γ_n tend vers f, $\overline{\gamma_n} f$ tend vers $|f^2|$ et $\overline{\gamma_n}\gamma_p$ tend vers $\overline{\gamma_n} f$ pour n fixé.

Dans le cas général, soit Γ' le sous-groupe fermé de Γ engendré par les γ_n, G' son dual et μ' la projection de μ dans $M(G')$. $L^1(\mu')$ est un quotient de $L^1(\mu)$; $L^\infty(\mu')$ s'identifie à un sous-espace faiblement fermé de $L^\infty(\mu)$, et $\overline{\Gamma}'(\mu')$ au semi-groupe fermé de $\overline{\Gamma}(\mu)$ engendré par les γ_n. Or Γ' est séparable, Γ' est total dans $L^1(\mu')$ qui est donc séparable, et la boule unité de $L^\infty(\mu')$ est faiblement métrisable. Les γ_n sont donc contenus dans un sous-semi-groupe compact métrisable de $\overline{\Gamma}(\mu)$, et on peut extraire des sous-suites convergentes comme précédemment.

c) On définit un sous-groupe fermé de G, L par

$$L^{\perp} = \{\gamma \in \Gamma \ ; \ \widehat{\gamma\mu}^{-1}(0) = \hat{\mu}^{-1}(0)\} \quad .$$

$L^{\perp}$ est un sous-groupe ouvert de Γ car 0 est isolé dans $0 \cup \hat{\mu}(\Gamma)$, et $\hat{\mu}$ est uniformément continue ; donc L <u>est compact</u>.

Quitte à prendre une nouvelle sous-suite, on pourra supposer

1 - Si γ_n^2 tend vers l'infini modulo $L^{\perp}$, $\gamma_n^2 \notin A_n L^{\perp}$;

2 - sinon, que γ_n^2 est constant modulo $L^{\perp}$.

Soit alors, pour $n \geq 1$, $\theta_n = \overline{\gamma}_{2n+1}\gamma_{2n}$.

<u>La suite</u> (θ_n) <u>est dissociée sur</u> L. Soit en effet

$$\theta = \prod_{1 \leq k \leq n} \theta_k^{\varepsilon_k} \quad ,$$

avec $|\varepsilon_k| \leq 2$ pour $1 \leq k \leq n$ et $\theta_n^{\varepsilon_n} \not\equiv 1$ modulo $L^{\perp}$.

- Si $|\varepsilon_n| = 2$, $\gamma_{2n}^{\varepsilon_n} \prod_{1 \leq k < n} \theta_k^{\varepsilon_k}$ est dans A_{2n+1} et l'hypothèse faite dans le cas 1 montre que θ n'est pas dans $L^{\perp}$; dans le cas 2, les θ_n ont tous leurs carrés dans $L^{\perp}$ et on n'a pas à considérer $|\varepsilon_n| = 2$.

- Si $|\varepsilon_n| = 1$, et si θ était dans $L^{\perp}$, on aurait, d'après la définition de ce groupe $\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\mu}(\gamma\theta)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Or $\hat{\mu}(\gamma_1) = 0$,

$$\gamma_1 \prod_{1 \leq k < n} (\overline{\gamma}_{2k+1}\gamma_{2k})^{\varepsilon_k} \in A_{2n}$$

donc

$$\hat{\mu}(\gamma_1\theta) = \hat{\mu}((\overline{\gamma}_{2n+1}\gamma_{2n})^{\varepsilon_n} \gamma_1 \prod_{1 \leq k < n} (\overline{\gamma}_{2k+1}\gamma_{2k})^{\varepsilon_k}) \neq 0 \quad .$$

d) On peut donc construire sur L le produit de Riesz

$$\rho_n = \prod_{p \geq 1} (1 + 2^{-n}\theta_p + 2^{-n}\overline{\theta}_p) \cdot m_L \quad .$$

L'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$ dans Γ, et celui de $\hat{\rho}_n$, sont des réunions de classe modulo $L^{\perp}$. On va montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de ces classes sur lesquelles $\hat{\mu}$ est nulle, mais $(\overline{\gamma_n}\ \rho_n)^{\wedge}$ non nulle. En effet, si $(\overline{\gamma}_n\ \rho_n)^{\wedge}(\gamma) = \hat{\rho}_n(\overline{\gamma}_n\ \gamma) \neq 0$, $\overline{\gamma}_n\gamma$ est modulo $L^{\perp}$ un mot de ρ_n qui s'écrit

$$\prod_{1\leq k\leq p} (\overline{\gamma}_{2k+1}\ \gamma_{2k})^{\varepsilon_k} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_k| \leq 1,\ |\varepsilon_p| = 1 \quad .$$

Si $n < 2p$,

$$\alpha = \gamma_n \prod_{1\leq k<p} (\overline{\gamma}_{2k+1}\ \gamma_{2k})^{\varepsilon_k} \in A_{2p} \quad ,$$

et

$$\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\mu}((\overline{\gamma}_{2p+1}\ \gamma_{2p})^{\varepsilon_p}\ \alpha) \neq 0 \quad .$$

Donc, si $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ et $(\overline{\gamma}_n\ \rho_n)^{\wedge}(\gamma) \neq 0$, $\overline{\gamma}_n\gamma$ est dans la classe d'un mot de ρ_n de longueur $\leq n/2$; le nombre de ces classes est au plus $3^{n/2}$, et pour chaque γ, sauf si $\overline{\gamma}_n\gamma \in L^{\perp}$,

$$|(\overline{\gamma}_n\ \rho_n)^{\wedge}(\gamma)| \leq 2^{1-n} \quad .$$

On définit donc <u>une mesure</u> $\sigma_n \in L^1(L)$, <u>de norme</u> ≤ 2, par

$$\sigma_n = \Sigma\ (\overline{\gamma}_n\ \rho_n)^{\wedge}(\gamma)\overline{\gamma} \cdot m_L \quad ,$$

la somme étant prise pour l'ensemble des $\gamma \in \hat{L} = \Gamma / L^{\perp}$ tels que $\hat{\mu}$ s'annule sur la classe modulo L définie par γ.
Soit enfin

$$\omega_n = \overline{\gamma}_n\ \rho_n - \sigma_n \quad .$$

$\hat{\omega}_n(\gamma)$ est nul sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$; donc ω_n est dans $\mu * M$, et il existe pour tout n une mesure λ_n telle que $\omega_n = \mu * \lambda_n$.
De plus, les mesures ω_n ayant toutes leur norme ≤ 3, on peut, d'après le théorème de l'application ouverte de Banach, choisir les λ_n de norme uniformément bornée par une constante A.

e) Soit φ un caractère adhérent à la suite (θ_n) dans $\overline{\Gamma}$, et $h = |\varphi|^{\circ} \in \Delta$. On sait (3.1) que

$$h\rho_n = \rho_n \quad \text{et} \quad h\sigma_n = 0 \quad ;$$

donc $h\omega_n = \overline{\gamma}_n\ \rho_n$ et en particulier

$$\hat{\omega}_n(h\gamma_n) = (\overline{\gamma}_n\ \rho_n)^\wedge(\gamma_n) = 1 \quad .$$

D'autre part h est un idempotent $\geq |\varphi|$, et $\varphi_\mu = |f^2|$ d'après b) ; donc $h_\mu f = f$, et

$$\lim \hat{\mu}(h\gamma_n) = \int h_\mu\ f\ d\mu = \int f\ d\mu = 0 \quad .$$

Or, pour tout n et pour tout caractère $\psi \in \Delta$,

$$|\hat{\omega}_n(\psi)| = |\hat{\mu}(\psi)\ \hat{\lambda}_n(\psi)| \leq A|\hat{\mu}(\psi)| \quad ,$$

donc

$$\lim \hat{\omega}_n(h\ \gamma_n) = 0 \quad .$$

On obtient donc une contradiction.

4.3 <u>Corollaire</u> : Soient H un sous-groupe compact de G, et χ un caractère appartenant à $\overline{H^\perp}$, l'adhérence dans Δ de l'orthogonal $H^\perp$ de H.

- Si, pour tout $\gamma \in H^\perp$, $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \neq 0$, alors $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.
- Si, pour tout $\gamma \in H^\perp$, $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) = 0$, alors $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

Soit m_H la mesure de Haar de H. $\chi m_H = m_H$ et si $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in H^\perp$, $m_H * |\chi|^2\mu = |\chi|^2(m_H * \mu) = 0$. Alors $\chi(m_H * \mu) = 0$, et $(m_H * \mu)^\wedge(\chi) = \hat{m}_H(\chi)\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}(\chi) = 0$.

D'autre part, l'algèbre M(G/H), quotient de M, s'identifie à la sous-algèbre $m_H * M$ de M, l'image d'une mesure ν de M étant identifiée à $m_H * \nu$. $m_H * \mu * M$ est fermé, car la convolution par m_H est un projecteur de $\mu * M$; si μ' est l'image de μ dans M(G/H), $\mu' * M(G/H)$ est donc fermé.

La projection de M sur M(G/H) induit une inclusion du spectre de M(G/H) dans Δ, $H^\perp$ étant l'image du groupe $(G/H)^\wedge$ des caractères forts de M(G/H) ; $\chi \in \overline{H^\perp}$ est l'image par cette inclusion d'un caractère $\chi' \in \overline{(G/H)^\wedge}$.

Alors, si $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \neq 0$ pour tout $\gamma \in H^\perp$, μ' et χ' satisfont les hypothèses du lemme 2 sur G/H, et $\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}'(\chi') \neq 0$.

<u>Lemme 3</u> : Soient $\chi \in \overline{\Gamma}$ et η une mesure idempotente de M tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2\gamma)$. Alors $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$.

D'après l'étude de $\overline{\Gamma}(\eta)$ en 2.5, la projection de χ dans $\overline{\Gamma}(\eta)$ est de module idempotent, et la projection de χ dans $\overline{\Gamma}(|\chi|^2\eta)$ est de module 1, donc appartient au groupe discret $\Gamma(|\chi|^2\eta)$; l'orthogonal $H^\perp$ du groupe-support H de $|\chi|^2\eta$ est le noyau de la projection $\Gamma \to \Gamma(|\chi|^2\eta)$, et il existe un $\gamma_o \in \Gamma$ tel que

$$\chi \in \gamma_o \overline{H^\perp} \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\chi) = (|\chi|^2\eta)^\wedge(\gamma_o) \sim \hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma_o) \quad .$$

$\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma_o\gamma)$ est toujours nul ou toujours non nul pour $\gamma \in H^\perp$, et on peut appliquer le corollaire précédent à $\mu_o = \gamma_o\mu$ et $\chi_o = \overline{\gamma}_o\chi \in \overline{H^\perp}$:

$$\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}_o(\chi_o) \sim \hat{\mu}_o(|\chi_o|^2) = \hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma_o) \sim \hat{\eta}(\chi) \quad .$$

Ainsi μ vérifie l'hypothèse de la proposition 5, ce qui achève la démonstration du théorème 2 d'après les remarques du § 4.1.

L'essentiel des résultats de cet exposé fait partie d'un article des auteurs à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Brown, Riesz products and generalized characters, Proc. London Math. Soc. (3), 30 (1975) p. 209.

[2] C.F. Dunkl et D.E. Ramirez, Bounded projections on Fourier-Stieltjes transforms, Proc. A.M.S. 31, No 1 (1972) p. 122.

[3] C.F. Dunkl et D.E. Ramirez, Locally compact subgroups of the spectrum of the measure algebra, I , Semigroup Forum 3 (1971) p. 95 ;
II , Semigroup Forum 3 (1971), p. 267 ;
III, Semigroup Forum 5 (1972), p. 65.

[4] I. Glicksberg, When is $\mu * L^1$ closed ?, Trans. A.M.S., 160 (1971), p. 419.

[5] I. Glicksberg, Fourier-Stieltjes transforms with an isolated value, Conference on harmonic analysis, Maryland (1971), Lect. Notes in Math. No 266 , Springer-Verlag.

[6] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience tracts in Math. No 12, Interscience, New-York (1962).

[7] J.L. Taylor, Measure algebras, Regional conference series in Math. No 16, Conference Board of the Mathematical Sciences (1973).
