N. Varopoulos

**Sous-espaces de $\mathbb{C}(G)$ invariants par translation et de type $\mathfrak{L}_1$**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1975-1976), exp. nº 12, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

# SOUS-ESPACES DE $\mathbb{C}(G)$ INVARIANTS PAR TRANSLATION ET DE TYPE $\mathcal{L}_1$

par N. VAROPOULOS

Exposé No XII

3 Février 1976

Dans cette note on traite une question posée par G. Pisier.

Soit $\Lambda$ un ensemble d'entiers $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ et $E \subset \mathbf{T}$ un sous-ensemble fermé du tore $\mathbf{T} = \mathbf{R} \pmod{2\pi}$.

On note alors

$$\mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T}) = \left\{ f \in \mathbf{C}(\mathbf{T}) \; ; \; f(\theta) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right\}$$

l'espace des fonctions continues à spectre dans $\Lambda$. On note par $A(\mathbf{T})$ l'algèbre des séries de Fourier absolument sommables et par $A^+(\mathbf{T})$ l'algèbre des séries de Taylor absolument sommables (i. e. $f \in A^+(\mathbf{T}) \Leftrightarrow f \in A(\mathbf{T})$ $\operatorname{Sp} f \subset \mathbf{Z}^+$). On note aussi par $I(E) = \left\{ f \in A(E) \; ; \; f^{-1}(0) \supset E \right\}$ ; $I^+(E) = I(E) \cap A^+(\mathbf{T})$ les idéaux associés à $E$ et par

$$A(E) = A(\mathbf{T})/I(E) \qquad ; \qquad A^+(E) = A^+(\mathbf{T})/I^+(E)$$

les algèbres restrictions. Tous ces espaces et algèbres sont munis de leurs normes naturelles.

Pour une étude approfondie de ces espaces, cf. [1]. On a alors :

THEOREME 1. <u>Supposons que l'espace de Banach</u> $\mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T})$ <u>soit isomorphe (en tant qu'espace de Banach) à</u> $\ell^1$, <u>alors</u>, $\Lambda$ <u>est une suite de Sidon, c'est-à-dire, il existe</u> $C$ <u>une constante telle que</u>

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda| \leq C\|f\|_\infty$$

pour tout

$$f \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda e^{i\lambda\theta} \in \mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T}).$$

THEOREME 2. Supposons que $E \subset \mathbf{T}$ est tel que $A(E)$ (resp. $A^+(E)$), en tant qu'espace de Banach, soit isomorphe à un espace de la forme $\mathbf{C}(X)$ où $X$ est un espace topologique compact ; alors $A(E) = \mathbf{C}(E)$ (resp. $A^+(E) = \mathbf{C}(E)$), c'est-à-dire $E$ est un ensemble de Helson.

L'hypothèse des deux théorèmes peut s'affaiblir. Il suffit par exemple de supposer dans le théorème 2 que $A(E)$ est un espace de type $\mathcal{L}_\infty$ dans le sens de [2].

Les théorèmes 1 et 2 se généralisent dans le cadre de groupes localement compacts.

La preuve des deux théorèmes est basée sur le théorème suivant [3].

THEOREME (de représentation). Soit $R$ une algèbre de Banach. Supposons que $R$, en tant qu'espace de Banach, soit isomorphe à $\mathbf{C}(X)$ où $X$ est un espace compact. Alors, il existe un espace de Hilbert $H$ et une sous algèbre fermée $\tilde{R}$ de $\mathcal{L}(H)$ (l'algèbre des opérateurs de $H$) telle que $R$ soit isomorphe en tant qu'algèbre de Banach à $\tilde{R}$.

Preuve du théorème 1 et du théorème 2 pour $A(E)$.

Il suffit de démontrer le théorème 2 pour $A(E)$. Le théorème 1, après une dualisation évidente, se démontre de la même manière.

D'après le théorème de représentation, l'hypothèse du théorème 2 entraînent qu'on peut identifier $A(E)$ à une algèbre d'opérateurs $\mathcal{L}(H)$ sur $H$ (un Hilbert) ; l'identification n'est pas isométrique mais elle est topologique. Cette identification induit une représentation bornée $r$ du groupe $\mathbf{Z}$ sur $H$ ; c'est-à-dire

$$r : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

où
$$r(n) = L_n = e^{in\theta} \in A(E)$$

est la fonction $e^{in\theta}$ de $A(E)$ considérée comme opérateur. En outre $A(E)$ est engendrée par les opérateurs $\{L_n \; ; \; n \in \mathbf{Z}\}$. En utilisant un théorème bien connu sur les représentations de groupes [Toute représentation bornée d'un groupe abélien est équivalente à une représentation unitaire], on voit qu'il existe un opérateur borné $T$ sur $H$ avec un inverse borné $T^{-1}$ tel que tous les opérateurs

$$T \, L_n \, T^{-1} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

soient des opérateurs unitaires.

Mais alors l'algèbre d'opérateurs

$$T \, A(E) \; = \left\{ T \, L \, T^{-1} \in \mathcal{L}(H) \; ; \; L \in A(E) \right\}$$

qui est isomorphe à l'algèbre $A(E)$, est engendrée par des opérateurs unitaires et est une $C^*$-algèbre. Ceci entraîne que $A(E)$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $\mathbf{C}(E)$ et que $E$ est un ensemble de Helson.

<u>Preuve du théorème 2 pour</u> $A^+(E)$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

LEMME. <u>Soit</u> $H$ <u>un espace de Hilbert et</u> $T \in \mathcal{L}(H)$ <u>un opérateur à puissances</u>

bornées, c'est-à-dire

$$\|T^n\|_{op} \leq C \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où $C$ est une constante indépendante de $n$. Soit aussi $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ un polynôme d'une variable. On a alors

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \| T^m p(T)\|_{op} \leq C^2 \sup_{|z| \leq 1} |p(z)| .$$

Preuve du lemme.

Soient $h,k \in H$ deux éléments de l'espace de Hilbert $H$ tels que $\|h\|, \|k\| \leq 1$.

Fixons $m \geq 1$ et considérons les deux fonctions à valeurs dans $H$

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{n=0}^{m} T^n h e^{in\theta}$$

$$f^*(\theta) = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{n=0}^{m} T^{*n} k e^{in\theta}$$

où $T^*$ est l'opérateur adjoints de $T$ ; $f$ et $f^*$ satisfont alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(\theta)\|_H^2 \, d\theta \leq C^2 \quad ; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f^*(\theta)\|_H^2 d\theta \leq C^2$$

et la fonction

$$\varphi(\theta) = \langle f(\theta) , f^*(\theta)\rangle_H ,$$

où $\langle \ , \ \rangle_H$ est le produit scalaire dans $H$, satisfait

$$(1) \quad \begin{cases} \|\varphi(\theta)\|_{L^1(\mathbf{T})} \leq C^2 \\ \varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{2m} \frac{\gamma_n^{(m)}}{m+1} \langle T^n h, k\rangle e^{in\theta} . \end{cases}$$

Dans cette formule $\gamma_n^{(m)}$ est le nombre d'entiers $\nu$ qui vérifient les deux conditions suivantes

$$0 \leq \nu \leq m \qquad \text{et} \qquad 0 \leq n-\nu \leq m .$$

On a

$$(2) \qquad \frac{\gamma^{(m)}_{m+n}}{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1, \quad n = 0, \pm 1, \quad \pm 2, \ldots$$

Soit maintenant $P(\theta) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{in\theta}$ un polynôme fixe ; (1) entraîne alors

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{\gamma^{(m)}_{n+m}}{m+1} a_n \langle T^{n+m}h,k\rangle\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta} P(-\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta\right| \leq C^2 \|P\|_\infty .$$

D'autre part,

$$\langle T^m P(T)\,h,k\rangle = \sum_{n=0}^{N} a_n \langle T^{m+n}h , k\rangle .$$

En faisant tendre $m \to\infty$ et en tenant compte de (2), on obtient donc notre lemme.

Preuve du théorème.

Comme dans la preuve du théorème 1, on identifie $A^+(E)$ à une algèbre d'opérateurs sur un Hilbert. Cette identification associe à $e^{i\theta}\,|_E \in A^+(E)$ un opérateur $T$ qui satisfait l'hypothèse du lemme.

Fixons un polynôme trigonométrique

$$p(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta} \quad ;$$

notre lemme entraîne alors que

$$\varlimsup_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n T^{m+n}\right\|_{op} \leq C \|p\|_\infty$$

où $C$ est une constante indépendante du polynôme. Mais ceci entraîne que

$$\varlimsup_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i(m+n)\theta}\,|_E \right\|_{A^+(E)} \leq C' \|p\|_\infty$$

pour une autre constante $C'$ indépendante de $p$. Et ceci à son tour entraîne que

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta}\,|_E \right\|_{A(E)} \leq C' \|p\|_\infty .$$

C'est-à-dire que $A(E) = \mathbb{C}(E)$ et que $E$ est un ensemble de Helson. Le théorème de I. Wik [1] (IV, 7) entraîne alors notre théorème.

REMARQUE. Une reformulation du Théorème 1 consiste à dire qu'il caractérise les sous-espaces fermés $\Sigma$ de $\mathbb{C}(T)$ qui sont invariants par translation (i. e. $f \in \Sigma \Rightarrow f_t(x) = f(t+x) \in \Sigma$) et qui sont, en tant qu'espaces de Banach, de type $\mathcal{L}_1$ (dans le sens de [2]).

Dans le même esprit, on peut démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3. Soit $\Gamma$ un groupe abélien localement compact et soit $\Sigma \subset L^{\infty}(\Gamma)$ un sous-espace qui est faiblement fermé (pour la topologie $\sigma(L^{\infty}, L^{1})$) et invariant par translation et qui est, en tant qu'espace de Banach, de type $\mathcal{L}_1$. Alors il existe $E \subset \hat{\Gamma}$ un sous-ensemble fermé tel que

$$\Sigma = \left\{ \hat{\mu} \ ; \ \mu \in M(\hat{\Gamma}) \quad \overline{\operatorname{supp} \mu} \subset E \right\}.$$


[1] KAHANE, J.-P. Séries de Fourier absolument convergentes. Springer-Verlag (Ergebnisse) 1970.

[2] LINDENSTRAUSS, J. and PELZYNSKI, A. Absolutely summing operators in $\mathcal{L}^p$-spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[3] VAROPOULOS, N. A theorem on operator algebras. Math. Scand. 37 (1975), 173-182.


-----