Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Pisier

Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 3, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

LE THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE ET LA LOI DU LOGARITHME ITERE DANS LES ESPACES DE BANACH

par G. PISIER

Exposé No III

4 Novembre 1975

PLAN DES EXPOSES III ET IV

CONVENTIONS GENERALES

Dans tout cet exposé, nous entendons par "variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach E" la donnée d'une application X définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ (le plus souvent sous-entendu !) mesurable à valeurs dans l'espace E muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$, et telle que la mesure -notée $\mathcal{L}(X)$- qui est la loi de X sur $\mathcal{B}(E)$ est une mesure de Radon. Evidemment, il revient au même de supposer que X prend presque sûrement ses valeurs dans un sous-espace séparable de E.

On note $L^o(\Omega,\mathcal{A},P;E)$ l'espace des v.a. sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans E ; $L^p(\Omega,\mathcal{A},P;E)$ désigne l'espace des v.a. X telles que $\mathbb{E}\,\|X\|^p < \infty$, et $L^p_o(\Omega,\mathcal{A},P;E)$ désigne -si $p \geq 1$- l'espace de v.a. X telles que $\mathbb{E}\,\|X\|^p < \infty$ et $\mathbb{E}\,X = 0$.

Le plus souvent, on abrège ces notations en $L^o(E)$, $L^p(E)$, $L^p_o(E)$, etc...

La notation L^o, L^p, L^p_o, ... est réservée au cas $E = \mathbb{R}$.

Si X est une v.a définie sur (Ω,P) on peut définir sa symétrisée -notée $\tilde{X}$- sur l'espace $(\Omega,P)\times(\Omega,P)$ par la formule : $\forall\ (\omega,\omega')\in\Omega\times\Omega$, $\tilde{X}(\omega,\omega')=X(\omega)-X(\omega')$; les v.a $\tilde{X}$ et $-\tilde{X}$ ont la même loi.
Dans tout l'exposé, à chaque fois que nous considèrerons une v.a X, la notation $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$ désignera toujours une suite de copies indépendantes de la v.a. X. En résumé, nous réservons la notation $X,X_1,\dots,X_n,\dots$ aux suites de v.a. indépendantes équidistribuées.
La tribu des évènements "asymptotiques" est par définition formée d'ensembles mesurables pour chaque entier N -par rapport à la tribu engendrée par les v.a. $X_N,X_{N+1},\dots$
Enfin, un rappel : on dit qu'une suite de mesures de Radon (μ_n) sur un espace de Banach E converge étroitement vers une mesure μ si $\int f(x)\mu_n(dx)\to\int f(x)\mu(dx)$ pour tout f dans l'espace -noté $C^b(E)$- des fonctions scalaires continues et bornées sur E.
Soit (A_n) une suite d'évènements dans $\mathcal{A}$ on rappelle les notations :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n=\bigcap_m\ \bigcup_{n\geq m}\ A_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n=\bigcup_m\ \bigcap_{n\geq m}\ A_n\ .$$

Si Λ est une partie de Ω non nécessairement mesurable, on pose

$$\mathbb{P}_*(\Lambda)=\sup\{P(A)\,|\,A\subset\Lambda\quad A\in\mathcal{A}\}$$

et

$$\mathbb{P}^*(\Lambda)=\inf\{P(A)\,|\,A\supset\Lambda\quad A\in\mathcal{A}\}\ .$$

§ 0. INTRODUCTION

Soit E un espace de Banach. Soit $X,X_1,X_2,\dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées à valeurs dans E.
Nous dirons que X vérifie le théorème de la limite centrale (en abrégé TLC) si les lois $\mathcal{L}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}\right)$ convergent étroitement vers une mesure de Radon γ_X sur E. Il résulte du TLC scalaire que γ_X est nécessairement une probabilité gaussienne. Posons une fois pour toutes $S_n=X_1+\dots+X_n$ et $a_n=\sqrt{2n\,\mathrm{Log\,Log}\,n}$ si $n\geq 3$, $a_n=1$ si $n=1$ et 2. Nous dirons que X vérifie la loi du logarithme itéré (en abrégé la LLI) si presque sûrement la suite

$\left\{\frac{S_n}{a_n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ forme un ensemble relativement compact dans l'espace de Banach E (cette définition sera justifiée par le théorème 1.1).

Nous résumons les résultats classiques que nous admettons dans cet exposé :

Rappels : 1) Si $E = \mathbb{R}$, X vérifie le TLC si et seulement si $\mathbb{E}\,X = 0$ et $\mathbb{E}\,|X|^2 < \infty$. La limite γ_X est alors gaussienne centrée et

$$\mathbb{E}\,|X|^2 = \int |x|^2 \,\gamma_X(dx) \quad .$$

2) Si $E = \mathbb{R}$, X vérifie la LLI si et seulement si $\mathbb{E}\,X = 0$ et $\mathbb{E}\,|X|^2 < \infty$. On a alors p.s $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n/a_n = (\mathbb{E}\,|X|^2)^{1/2}$.

L'objet de cet exposé est l'étude des extensions éventuelles des deux théorèmes rappelés ci-dessus au cas où X prend ses valeurs dans un espace de Banach. La condition d'intégrabilité $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ pour une v.a centrée X ne sera en général ni suffisante (cf. § 5) ni nécessaire (cf. § 7) ! Mais elle suffira dans les espaces de Banach de type 2 (cf. § 4) ; on verra qu'elle est nécessaire pour le TLC dans un espace de cotype 2 (cf. § 6). Dans le cas général, on montre (cf. th. 4.3) que si $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ le TLC entraîne la LLI.

Remarques 0.1 : i) On vérifie aisément qu'une suite (x_n) dans un espace de Banach E est relativement compacte si et seulement si

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{1\le j\le N} \|x_n - x_j\| = 0 \quad .$$

Il en résulte que l'évènement $\{\omega \,|\, \{S_n(\omega)/a_n\}$ est relativement compact$\}$ est dans la tribu engendrée par les variables $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$. Par ailleurs cet évènement est "asymptotique" ; par conséquent il ne peut avoir pour probabilité que 0 ou 1.

ii) Vérifier le TLC dans un espace de Banach E est aussi une propriété de compacité : une condition (nécessaire et) suffisante pour que X vérifie le TLC est que la suite des lois $\mathcal{L}(S_n/\sqrt{n})$ soit relativement compacte pour la topologie de la convergence étroite, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition de Prokhorov : $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists$ K compact tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}\{S_n/\sqrt{n} \in K\} \ge 1 - \varepsilon \quad .$$

En effet, on peut vérifier alors que :

$$\forall\ \xi \in E' \qquad \mathbb{E}\,\xi(X)^2 < \infty \quad ,$$

on a donc convergence cylindrique de $\mathcal{L}(S_n/\sqrt{n})$; mais (voir [15], prop. III.5.2) pour des probabilités vérifiant la condition de Prokhorov la convergence cylindrique implique la convergence étroite.

§ 1. IDENTIFICATION DES LIMITES

Pour le TLC "l'identification" de la limite est facile :
Si X vérifie le TLC, alors pour tout ξ dans E' la v.a.r. $\xi(X)$ vérifie le TLC donc (Rappel 1) converge en loi vers une v.a. gaussienne centrée de variance $\mathbb{E}\,\xi(X)^2$; de plus $\mathbb{E}\,\xi(X) = 0 \ \ \forall\ \xi \in E'$.
Soit γ_X la limite des lois de $S_n/\sqrt{n}$. Nécessairement γ_X est gaussienne centrée puisque $\xi(\gamma_X)$ est gaussienne centrée pour tout ξ dans E'. Comme la covariance caractérise les v.a. gaussiennes, on voit que : γ_X est identifiée comme la mesure gaussienne centrée telle que :

$$\forall\ \xi \in E' \qquad \int \xi(x)^2\, \gamma_X(dx) = \mathbb{E}\,\xi(X)^2 \quad .$$

Pour la LLI, nous aurons besoin d'une notation supplémentaire :

Notation 1.1 : Soit X une v.a. à valeurs dans un espace de Banach E. On pose $\sigma_X = \sup\{(\mathbb{E}\,\xi(X)^2)^{1/2} \mid \xi \in E' \ \ \|\xi\| \le 1\}$. Supposons que $\sigma_X < \infty$.
On peut définir un opérateur $v_X : E' \to L^2$ par $\forall\ \xi \in E' \quad v_X(\xi) = \xi(X)$.
On notera u_X l'opérateur de L^2 dans E" qui est le transposé de v_X.
On a évidemment $\|u_X\| = \|v_X\| = \sigma_X$. On notera K_X le sous-ensemble de E" qui est l'image de la boule unité de L^2 par l'opérateur u_X. En fait $K_X \subset E$; en effet (puisque $X \in L^0(E)$) il existe une suite croissante (K_α) de convexes compacts de E tels que $\mathbb{P}\{X \in K_\alpha\} \to 1$; notons A_α l'évènement $\{X \in K_\alpha\}$; on voit immédiatement que :

$$\forall\ \varphi \in L_2 \qquad u_X(\varphi . 1_{A_\alpha}) \in E \quad ;$$

Par ailleurs puisque $\varphi . 1_{A_\alpha} \to \varphi$ dans L^2, $u_X(\varphi . 1_{A_\alpha}) \to u_X(\varphi)$ dans E" ; en conclusion $u_X(\varphi) \in E$.

L'ensemble K_X est donc une partie faiblement compacte de E.
Pour finir, notons les formules évidentes :

$$\forall\ \xi \in E' \qquad (\mathbb{E}\, \xi(X)^2)^{1/2} = \sup\{\xi(x) \mid x \in K_X\}$$

$$\sigma_X = \sup\{\|x\| \mid x \in K_X\} \quad .$$

Dans la littérature on se réfère à K_X comme "la boule unité de l'espace hilbertien autoreproduisant associé à X".
Dans le cas de la LLI on peut identifier l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{S_n/a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Commençons par deux résultats généraux.

<u>Proposition 1.1</u> (Kuelbs) : Soit $(X, X_1, \ldots.)$ une suite de v.a. indépendantes équidistribuées à valeurs dans un espace de Banach E. Notons $C^\sigma\{S_n/a_n\}$ l'ensemble (aléatoire) des valeurs d'adhérence de la suite S_n/a_n dans l'espace $\sigma(E'', E')$.
On suppose que $\sigma_X < \infty$ et $\mathbb{E}\, \xi(X) = 0\ \forall\ \xi \in E'$, alors :

$$P^*(\{C^\sigma\{S_n/a_n\} \not\subset K_X\}) = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Si $\sigma_X < \infty$, K_X est bien défini et est $\sigma(E,E')$-compact. On peut supposer que E est séparable ; il existe alors une suite (ξ_i) dans E' telle que :

$$K_X = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{x \in E'' \mid \xi_i(x) \le 1\} \quad .$$

D'où

$$\{C^\sigma\{S_n/a_n\} \not\subset K_X\} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{C^\sigma\{S_n/a_n\} \not\subset \{\xi_i \le 1\}\} \quad .$$

Or si $c \in C^\sigma\{S_n/a_n\}$ et $\xi_i(c) > 1$, alors $\overline{\lim}\ \xi_i(S_n/a_n) > 1$.
Or on sait que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \xi_i(S_n/a_n) \overset{p.s.}{\le} 1$ par la LLI scalaire (cf. Rappel 2) puisque $\mathbb{E}\, \xi_i(X)^2 = \sup \xi_i(K_X)^2 \le 1$. Donc $\{C^\sigma\{S_n/a_n\} \not\subset K_X\}$ est inclus dans l'ensemble mesurable négligeable $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \xi_i(S_n/a_n) > 1\}$; la conclusion est alors immédiate.

<u>Notations 1.2</u> : Si (x_n) est une suite d'éléments d'un espace de Banach E, on note $C\{x_n\}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si A est une partie de E, on pose :

$$\forall x \in E \qquad d(x,A) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in A\} .$$

<u>Proposition 1.2</u> : Soit (X^n) une suite de v.a. sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ indépendantes à valeurs dans un espace de Banach E. Soit a_n une suite croissante de réels positifs tendant vers l'infini. Posons $S_n = X^1 + \ldots + X^n$. Pour simplifier on pose $C_\omega = C\{S_n(\omega)/a_n\}$.

i) Soit x dans E, considérons l'ensemble Ω_x défini par $\Omega_x = \{\omega \in \Omega \mid x \in C_\omega\}$. $\Omega_x \in \mathcal{A}$; c'est un évènement asymptotique de probabilité 0 ou 1.

ii) Soit F l'ensemble des points x de E tels que $P(\Omega_x) = 1$. F est fermé. De plus $\{\omega \mid F \subset C_\omega\}$ est dans $\mathcal{A}$ et

$$P(\{\omega \mid F \subset C_\omega\}) = 1 .$$

iii) $P^*(\{\omega \mid C_\omega \not\subset F\}) = 0$.

<u>Démonstration</u> : <u>i)</u> Notons $B(x,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ε. On voit aisément que $\Omega_x = \bigcap_{m\geq 1} \overline{\lim_{n\to\infty}} \{S_n/a_n \in B(x,1/m)\}$. D'où l'assertion $\Omega_x \in \mathcal{A}$. Il est clair (puisque $a_n \to \infty$) que Ω_x est indépendant de $X_1, X_2, \ldots, X_N$ pour tout entier N. Donc $P(\Omega_x) = 0$ ou 1.

<u>ii)</u> F est fermé ; en effet soit $x_n \in F$ avec $x_n \to x$; on a $P(\bigcap_n \Omega_{x_n}) = 1$ et $\Omega_x \supset \bigcap \Omega_{x_n}$ puisque C_ω est fermé par définition, donc $P(\Omega_x) = 1$, c'est-à-dire $x \in F$. Nous supposons (et nous le pouvons !) que E séparable. Alors si z_n est une suite dense dans F :

$$\{\omega \mid F \subset C_\omega\} = \bigcap_n \Omega_{z_n}$$

ce qui prouve l'assertion ii).

<u>iii)</u> Par séparabilité, on peut supposer que $E \setminus F$ s'écrit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ où les B_n sont des ouverts de diamètre inférieur à 1/2 et tels que

$\forall\, n \in \mathbb{N}\quad \overline{B}_n \cap F = \emptyset$. On a $\{\omega \mid C_\omega \not\subset F\} = \bigcup_n \{\omega \mid C_\omega \cap B_n \neq \emptyset\}$;
or $\{C_\omega \cap B_n \neq \emptyset\} \subset \overline{\lim_{m\to\infty}} \{S_m/a_m \in B_n\}$. Donc si $P^*\{C_\omega \not\subset F\} \neq 0$, alors il existe N tel que $P(\overline{\lim} \{S_m/a_m \in B_N\}) > 0$; ce dernier évènement étant asymptotique, il a en fait la probabilité 1.

En continuant la même construction, on obtient par récurrence pour chaque entier α une partie fermée D_α de $\overline{B}_N$ de diamètre inférieur à $1/2^\alpha$ et telle que :

$$\mathbb{P}(\overline{\lim_{m\to\infty}} \{S_m/a_m \in D_\alpha\}) = 1 \quad .$$

Puisque E est complet : $\emptyset \neq \bigcap D_\alpha \subset \overline{B_N}$. Soit donc $z \in \bigcap D_\alpha$. On voit facilement que $\Omega_z \supset \bigcap_\alpha \overline{\lim_{m\to\infty}} \{S_m/a_m \in D_\alpha\}$, donc $P(\Omega_z) = 1$, c'est-à-dire $z \in F$; ce qui contredit le fait que $\overline{B}_N \cap F = \emptyset$.

<u>Remarque 1.3</u> : Dans le cas équidistribué si $\sup \|S_n/a_n\| < \infty$ p.s. alors $\sigma_X < \infty$, en fait : $\sigma_X \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_n/a_n\|$. En effet si l'on pose $M = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_n/a_n\|$, M est p.s. une constante finie. Si $\xi \in E'$ et si $\|\xi\| = 1$, $\overline{\lim}\ \xi(S_n/a_n) \leq M$. Par la LLI scalaire $\overline{\lim}\ \xi(S_n/a_n) = \{\mathbb{E}\, \xi(X)^2\}^{1/2}$, donc $\sigma_X \leq M$.

<u>Remarque 1.4</u> : Si $\sigma_X < \infty$, la proposition 1.1 montre que l'ensemble F de la proposition précédente est nécessairement inclus dans K_X, puisque $C\{S_n/a_n\} \subset C^\sigma\{S_n/a_n\}$.

Le théorème suivant est dû à J. Kuelbs [10] ; nous l'avons énoncé sans l'hypothèse $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ qui n'est pas nécessaire (cf. § 7).

<u>Théorème 1.1</u> [10] : Soit X une v.a. sur (Ω, P) à valeurs dans un espace de Banach E ; on suppose que presque sûrement l'ensemble $\{S_n/a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact. Alors

i) L'ensemble K_X (qui est bien défini d'après la remarque 1.3) est un compact de E.

ii) $d(S_n/a_n\, , K_X) \to 0$ presque sûrement.

iii) $P_*\{\omega \in \Omega \mid C\{S_n(\omega)/a_n\} = K_X\} = 1$.

<u>Démonstration</u> : Puisque p.s. $C\{S_n/a_n\}$ est compact, on en déduit (cf. proposition 1.2) qu'il existe un compact K tel que

$$P(K \subseteq C\{S_n/a_n\}) = 1$$

$$P^*(K \not\supset C\{S_n/a_n\}) = 0 \quad .$$

On sait aussi que $K \subset K_X$ (remarque 1.4). On en déduit que :
$\lim_{n\to\infty} d(S_n/a_n, K) = 0$ p.s. En effet, si $\{S_n/a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact et si $\overline{\lim}\, d(S_n/a_n, K) > 0$, alors on voit aisément (par extraction d'une sous-suite) que $C\{S_n/a_n\} \not\subset K$. Puisque $K \subset K_X$, on a a fortiori

$$\lim_{n\to\infty} d(S_n/a_n, K_X) = 0 \quad ,$$

ce qui établit ii).

On va montrer que K_X est l'enveloppe convexe fermée dans E de K, notée $\overline{co}(K)$.
En effet, soit $\xi \in E'$ telle que $\xi(y) \leq 1$ $\forall\, y \in K$, on va montrer que $\xi(x) \leq 1$ $\forall\, x \in K_X$.
Pour cela il suffit de montrer que $\sigma = \overline{\lim}_{n\to\infty} \xi(S_n/a_n) \leq 1$, puisque (cf. Rappel 2):

$$\sigma = \{\mathbb{E}\, \xi(X)^2\}^{1/2} = \sup\, \{\xi(x) \mid x \in K_X\} \quad .$$

Mais on vient de voir que : p.s. $d(S_n/a_n, K) \to 0$ si $n \to \infty$. Il en résulte évidemment que : p.s. $\overline{\lim}_{n\to\infty} \xi(S_n/a_n) \leq \sup_{x\in K} \xi(x) \leq 1$, donc $\sigma \leq 1$, ce qui établit notre assertion.
Puisque $K_X = \overline{co}(K)$, i) est démontré.

Pour conclure, il nous reste à montrer que $K = K_X$.

<u>Démonstration de iii) en dimension finie</u> : Dans ce cas, on peut supposer u_X surjectif ; en passant au quotient, on est ainsi ramené à la situation suivante : E est un espace hilbertien de dimension finie et K_X est sa boule unité.
Puisque $\overline{co}(K) = K_X$, l'ensemble K contient nécessairement toute la sphère unité de l'espace euclidien E.

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = \theta < 1$. On va montrer que $x \in K$.
Soit X' la v.a. à valeurs dans $E \times \mathbb{R}$ définie par $X'(\omega) = (X(\omega), \varepsilon(\omega)) \in E \times \mathbb{R}$ où ε est une v.a. de Bernoulli indépendante de X. On voit immédiatement que $K_{X'}$ est la boule euclidienne de $E \times \mathbb{R}$. Le point $x' = (x, \sqrt{1-\theta^2})$ est sur la sphère euclidienne de $E \times \mathbb{R}$, donc d'après ce qui précède :
p.s. $X'_1 + \dots + X'_n / a_n$ s'accumule au point x'. Projetant sur la 1ère coordonnée on en déduit que S_n / a_n s'accumule au point x presque sûrement. Donc $\mathbb{P}(\Omega_x) = 1$, c'est-à-dire $x \in K$.
Ce qui termine la démonstration en dimension finie.

<u>Démonstration de iii) dans le cas général</u> : Nous allons montrer que pour tout opérateur π de E dans un espace de dimension finie $\pi(K) = \pi(K_X)$. Ce qui implique immédiatement que $K = K_X$. Considérons donc un tel opérateur π.
D'après le cas précédent, on sait que

$$P_*\{C\{\pi(S_n / a_n)\} = K_{\pi(X)}\} = 1 \quad .$$

On peut remarquer que si $\{S_n(\omega)/a_n\}$ est relativement compact, alors nécessairement :

$$C\{\pi(S_n(\omega)/a_n)\} = \pi\, C\{S_n(\omega)/a_n\} \quad ;$$

et ce dernier ensemble coïncide pour presque tout ω avec $\pi(K)$, on obtient donc que $\pi(K) = K_{\pi(X)}$.
Pour conclure, il suffit de noter l'égalité évidente : $K_{\pi(X)} = \pi(K_X)$.

<u>Remarque 1.5</u> : D'après la proposition 1.1 et la remarque 1.3, si l'ensemble $\{S_n / a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est p.s. borné, alors il est p.s. relativement $\sigma(E,E')$-compact ; si l'espace E a la propriété de Schur♦ il est aussi p.s. compact et les conclusions du théorème 1.1 s'appliquent.

♦ C'est-à-dire : tout sous-ensemble faiblement compact est compact. Par exemple l'espace ℓ^1.

§ 2. CONDITIONS NECESSAIRES D'INTEGRABILITE

Il est naturel de se demander si $\mathbb{E}\,\|X\|^2$ est nécessaire pour que X vérifie le TLC ou la LLI. Les deux propositions suivantes donnent des résultats plus faibles ; nous verrons plus tard qu'on ne peut pas les améliorer dans le cas général.

Proposition 2.1 (Jain [7]) : Si X vérifie le TLC alors

i) $\sup_n \sup_{c>0} c^2\, \mathbb{P}\left\{\frac{\|X_1 + \ldots + X_n\|}{\sqrt{n}} > c\right\} < \infty$, par conséquent :

ii) $\mathbb{E}\,\|X\|^p < \infty$ pour chaque $p < 2$, et $\sup_n \mathbb{E}\,\|X_1 + \ldots + X_n/\sqrt{n}\|^p < \infty$ pour chaque $p < 2$.

Démonstration : L'outil essentiel est le

Lemme 2.1 (P. Lévy) : Soit $Y_1,\ldots,Y_n$ des v.a. indépendantes symétriques à valeurs dans E. On a :

$$(2.1) \qquad \mathbb{P}\{\sup_{1\le k\le n} \|Y_1 + \ldots + Y_k\| > c\} \le 2\,\mathbb{P}\{\|Y_1 + \ldots + Y_n\| > c\} \; .$$

Pour une démonstration voir par exemple [9] p. 12.
Si X_1 vérifie le TLC, la symétrisée de X_1, notée $\tilde{X}_1$ le vérifie aussi.
Posons $\tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_n$. Si $\tilde{S}_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable $\tilde{G}$, on a

$$\forall\, d > 0 \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbb{P}\{\|\tilde{S}_n/\sqrt{n}\| \ge d\} \le \mathbb{P}\{\|\tilde{G}\| \ge d\} \; .$$

Par conséquent : $\forall\, \varepsilon < 1/2$, $\exists\, d \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$(2.2) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad P\{\|\tilde{S}_n/\sqrt{n}\| > d\} \le \varepsilon \; .$$

On a alors par l'inégalité de Lévy :

$$P(\sup_{1\le i\le n} \|\tilde{X}_i\| > 2d\sqrt{n}) \le 2\varepsilon \; ;$$

soit $$P(\|\tilde{X}_1\| > 2d\sqrt{n}) \le 1 - (1-2\varepsilon)^{1/n} \; ,$$

c'est-à-dire $P(\|\tilde{X}_1\| > 2d\sqrt{n}) \leq A(\varepsilon)/n$, où $A(\varepsilon)$ est une constante. On passe immédiatement à $\sup_{c>0} c^2 P(\|\tilde{X}_1\| > c) \leq B(\varepsilon)$, où $B(\varepsilon)$ est une constante.

Pour finir, notons que si l'on substitue $\tilde{S}_N/\sqrt{N}$ à $\tilde{X}_1$ dans la relation (2.2), celle-ci reste valable et conduit à

$$\sup_{c>0} c^2 P(\|\tilde{S}_N/\sqrt{N}\| > c) \leq B(\varepsilon)$$

et ceci pour tout entier N.

De l'inégalité triangulaire, on déduit facilement :

$$\mathbb{P}\{\|S_n/\sqrt{n}\| > c+\alpha\} \leq \mathbb{P}\{\|\tilde{S}_n/\sqrt{n}\| > c\} / \mathbb{P}\{\|S_n/\sqrt{n}\| \leq \alpha\} \quad ;$$

puisque X_1 vérifie le TLC, on peut choisir α tel que

$$\inf_n \mathbb{P}\{\|S_n/\sqrt{n}\| \leq \alpha\} > 0 \quad ,$$

et on obtient alors facilement i).

On déduit ii) de i) à l'aide de la formule classique :

$\mathbb{E} f^p = \int_0^\infty p\, c^{p-1}\, \mathbb{P}\{f > c\} dc$ valable pour toute v.a.r. $f \geq 0$.

<u>Remarque 2.1</u> : Les conclusions de la proposition précédente sont vraies si l'on suppose uniquement : $\exists\, \varepsilon < 1/4$ $\exists\, d \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_n P\{\|S_n/\sqrt{n}\| > d\} \leq \varepsilon \quad .$$

Par ailleurs la démonstration s'applique dans un cadre plus général : par exemple, elle permet de montrer facilement un résultat de [5] : pour toute v.a. p-stable Z à valeurs dans un Banach ($0 < p \leq 2$) on a :

$\sup c^p\, \mathbb{P}\{\|Z\| > c\} < \infty$.

<u>Proposition 2.2</u> : Si $\sup \|S_n\|/a_n < \infty$ p.s., alors

$\forall\, p < 2$ $$\mathbb{E}\,\|X\|^p < \infty$$

et aussi $$\mathbb{E}\,(\sup \|S_n\|/a_n)^p < \infty \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Si $\sup \|S_n\| / a_n < \infty$ p.s., un résultat d'Hoffmann-Jørgensen ([4], corollaire 3.4) assure que $\sup \|S_n\| / a_n$ est dans L^p dès que $\sup \|X_n\| / a_n$ est lui-même dans L^p ; ce que nous allons montrer, pour $p < 2$: Puisque $\sup \|S_n\| / a_n < \infty$ p.s., on a aussi $\sup \|X_n\| / a_n < \infty$ p.s. ; donc par Borel-Cantelli $\exists\, d \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\Lambda = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\{\|X\| > d\, a_n\} < \infty \quad .$$

D'où : $\forall\, k \in \mathbb{N}$
$$\sum_{n \geq 1} k\, \mathbb{P}\{\|X\| > d\, a_{nk}\} \leq \Lambda \quad ;$$

mais on peut vérifier que $a_{nk} \leq B\, a_n\, a_k$ pour une constante B ; par conséquent

$$\sum_{n \geq 1} k\, P\{\|X\| > Bd\, a_n\, a_k\} \leq \Lambda \quad .$$

On peut écrire alors : $\forall\, c > 0$

$$\Phi(c) = P(\sup \|X_n\| / a_n > c) \leq \sum P(\|X\| > c\, a_n)$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(\sup \|X_n\| / a_n)^p &= \int_0^\infty p\, c^{p-1}\, \Phi(c)\, dc \\
&\leq (Bd)^p + \int_{Bd}^\infty p\, c^{p-1} \sum P\{\|X\| > c\, a_n\}\, dc \\
&\leq (Bd)^p + \sum_k \int_{Bd\, a_k}^{Bd\, a_{k+1}} p\, c^{p-1} \sum_n P\{\|X\| > Bd\, a_k\, a_n\}\, dc \\
&\leq (Bd)^p + \sum_k \int_{Bd\, a_k}^{Bd\, a_{k+1}} p\, c^{p-1}\, \Lambda / k\, dc \\
&\leq (Bd)^p + (Bd)^p\, \Lambda \sum_{k \geq 1} \frac{[a_{k+1}^p - a_k^p]}{k}
\end{aligned}$$

et cette dernière série converge si $p < 2$ puisque $a_{k+1}^p - a_k^p \sim (LLk)^{p/2} / k^{1-p/2}$.

§ 3. UN RESULTAT GENERAL

Les propositions 2.1 et 2.2 suggèrent l'introduction d'une notation supplémentaire :

Soient (Ω,P) un espace de probabilité et E un espace de Banach. On note $CL_\infty(\Omega,P;E)$ [resp. $LI_\infty(\Omega,P;E)$] l'ensemble des variables X dans $L^0(\Omega,P;E)$ telles que

$$\sup \mathbb{E}\, \|X_1 + \ldots + X_n / \sqrt{n}\| < \infty$$

[resp. $\mathbb{E} \sup \|S_n\| / a_n < \infty$] ; on munit cet ensemble d'une norme en posant $CL(X) = \sup\limits_n \mathbb{E}\, \|S_n / \sqrt{n}\|$ et respectivement $LI(X) = \mathbb{E} \sup \|S_n\| / a_n$. Il est facile de vérifier que les espaces $CL_\infty(\Omega,P;E)$ et $LI_\infty(\Omega,P;E)$ sont des espaces de Banach quand on les munit des normes précédentes. Par ailleurs, ces espaces sont formés de variables aléatoires intégrables et centrées. De plus, toute variable aléatoire sur (Ω,P) étagée centrée à valeurs dans E est dans chacun des espaces $CL_\infty(\Omega,P;E)$ et $LI_\infty(\Omega,P;E)$, puisque pour de telles variables tout se passe à valeurs dans un sous-espace de E de dimension finie.

On notera $CL(\Omega,P;E)$ [resp. $LI(\Omega,P;E)$] la fermeture dans $CL_\infty(\Omega,P;E)$ [resp. $LI_\infty(\Omega,P;E)$] de l'ensemble des variables aléatoires étagées centrées à valeurs dans E, que l'on notera $\mathcal{E}_0(\Omega,P;E)$.

L'intérêt de ces définitions tient au

Théorème 3.1 : Soit X une variable de $L^0(\Omega,P;E)$. X vérifie le théorème limite centrale (resp. la loi du logarithme itéré) si et seulement si X appartient à $CL(\Omega,P;E)$ [resp. à $LI(\Omega,P;E)$].

Dans toute la suite on ne notera pas (Ω,P) mais seulement $\mathcal{E}_0(E)$, $CL(E)$, ... pour $\mathcal{E}_0(\Omega,P;E)$, ...

Démonstration : Commençons par le TLC ;

SI (implicite dans [6]) : Rappelons que l'on peut définir une distance $D(\lambda,\mu)$ entre deux mesures positives sur un espace métrique séparable complet comme la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels $a > 0$ tels que :

$$\lambda(F) \le \mu(F^a) + a \qquad \mu(F) \le \lambda(F^a) + a$$

pour toute partie fermée F de E, où l'on a posé $F^a = \{x \in E \mid d(x,F) < a\}$.
Cette métrique définit une topologie équivalente à la topologie étroite ; de plus l'espace métrique obtenu est complet ([14]).
Enfin (c'est immédiat) l'application $X \to \mathcal{L}(X)$ de $L^0(E)$ dans l'espace des probabilités sur E muni de cette métrique est uniformément continue.
La démonstration est alors évidente : si $X \in CL(E)$, par définition
$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ Y \in \mathcal{E}_0(E) \quad CL(X - Y) < \varepsilon$.
Le TLC en dimension finie nous assure que $\mathcal{L}(Y_1 + \dots + Y_n/\sqrt{n})$ converge étroitement. La suite $\mathcal{L}(S_n/\sqrt{n})$ est donc arbitrairement uniformément proche (pour la métrique D) d'une suite convergente de mesures ; c'est donc une suite de Cauchy pour cette métrique, par conséquent elle est convergente.

<u>SEULEMENT SI</u> : Soit X dans $L^0(E)$ vérifiant le TLC ; par la proposition 2.1, $\mathbb{E}\,\|X\| < \infty$ et $\mathbb{E}\,X = 0$♦. On peut donc considérer X comme la limite dans $L^1(E)$ d'une martingale $(X^N)_{N\geq 1}$ formée de variables aléatoires dans $\mathcal{E}_0(E)$. Nous allons montrer que $CL(X - X^N)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, ce qui règlera la partie "seulement si".
Notons tout d'abord que pour chaque entier N, $X - X^N$ vérifie le TLC : c'est une conséquence immédiate de la remarque 0.1.ii).
Pour fixer les idées, on peut supposer que

$$X^N = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\ x_i$$

où les (x_i) sont des éléments de E et (φ_i) une suite orthonormale de différences de martingale sur (Ω, P). Soit alors (g_i) une suite de v.a. gaussiennes indépendantes orthonormales ; on pose

$$G^N = \sum_{i=1}^{N} g_i\ x_i \quad .$$

G^N converge p.s. vers une v.a. gaussienne G ; en effet, $\forall\ \xi \in E'$, $\langle \xi, G^N \rangle$ converge p.s. vers une v.a. de même loi que $\xi(\gamma_X)$, en notant γ_X la limite étroite de $S_n/\sqrt{n}$. Puisque γ_X est une mesure de Radon, l'existence de G résulte par exemple de [4] th. 6.2.
D'après le théorème de Fernique [2], on a aussi nécessairement $\mathbb{E}\,\|G - G^N\| \to 0$ si $N \to \infty$.
Posons $S_n^N = X_1^N + \dots + X_n^N$. L'examen des covariances montre que $S_n^N/\sqrt{n}$, $S_n/\sqrt{n}$ et $\dfrac{S_n - S_n^N}{\sqrt{n}}$ convergent en loi respectivement vers les v.a. G^N, G et $G - G^N$.

♦ puisque $\mathbb{E}\,\xi(X) = 0 \quad \forall\ \xi \in E'$!

Nous aurons besoin d'un fait élémentaire :

<u>Rappel 3.1</u> : Soient (Z_n) une suite de $L^0(E)$ et $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(Z_n)$ est une suite de v.a. équiintégrables. Alors si Z_n converge en loi vers Z, nécessairement $\mathbb{E}\, f(Z_n) \to \mathbb{E}\, f(Z)$.

Une application de ce rappel et de la proposition 2.1 nous donne :

(3.2) $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \|(S_n - S_n^N)/\sqrt{n}\| = \mathbb{E}\, \|G - G^N\| \quad .$$

La conclusion est alors une routine : Soit $\varepsilon > 0$, choisissons N_o de sorte que $\mathbb{E}\, \|G - G^{N_o}\| < \varepsilon$; d'après (3.2) : $\exists\, m \geq N_o$ tel que

(3.3) $$\sup_{n\geq m} \mathbb{E}\, \|(S_n - S_n^{N_o})/\sqrt{n}\| < \varepsilon \quad ;$$

m étant donné, il existe $M \geq m$ tel que

(3.4) $$\sup_{N\geq M}\ \sup_{1\leq n\leq m} \mathbb{E}\, \|(S_n - S_n^N)/\sqrt{n}\| < \varepsilon \quad .$$

Mais on peut écrire aussi si $N \geq N_o$

$$\mathbb{E}\left\|\frac{S_n - S_n^N}{\sqrt{n}}\right\| \leq \mathbb{E}\left\|\frac{S_n - S_n^{N_o}}{\sqrt{n}}\right\| + \mathbb{E}\left\|\frac{S_n^N - S_n^{N_o}}{\sqrt{n}}\right\|$$
$$\leq 2\ \mathbb{E}\left\|\frac{S_n - S_n^{N_o}}{\sqrt{n}}\right\|$$

puisque $S_n^N - S_n^{N_o}$ s'obtient en prenant une espérance conditionnelle convenable de $S_n - S_n^{N_o}$; donc si $N \geq N_o$ et $n \geq m$, on a d'après (3.3)

$$\mathbb{E}\, \|(S_n - S_n^N)/\sqrt{n}\| \leq 2\varepsilon \quad ;$$

on a d'après (3.4), si $N \geq M$:

$$CL(X - X_N) \leq \max\ \{\varepsilon, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon \quad .$$

Ce qui est bien le résultat annoncé.

Passons à la LLI : Les raisonnements sont analogues :

SI : Si $X \in LI(E)$, alors

(3.5) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, Y \in \mathcal{E}_o(E) \qquad LI(X - Y) < \varepsilon$.

Considérons la v.a. ≥ 0 α_X définie par la formule : (cf. Remarque 0.1.i)

$$\alpha_X = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{1\leq j\leq N} \|S_n/a_n - S_j/a_j\| \quad .$$

Il s'agit de montrer que p.s. $\alpha_X = 0$; si on pose $S'_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, on a :

$$\alpha_X \leq \alpha_Y + 2 \sup \|S_n - S'_n\|/a_n \quad .$$

Puisque Y vérifie la LLI, $\alpha_Y = 0$ p.s., donc on déduit de (3.5) que $\mathbb{E}\,\alpha_X \leq 2\varepsilon$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\alpha_X = 0$ p.s.

SEULEMENT SI : Soit $X \in L^o(E)$ vérifiant la LLI. Par la proposition 2.2 X est dans $LI_\infty(E)$. On peut donc définir, comme pour le TLC, une martingale X^N dans $\mathcal{E}_o(E)$ telle que $\mathbb{E}\,\|X - X^N\|$ tend vers 0 quand $N \to \infty$. Evidemment pour chaque N, $X - X^N$ vérifie la LLI.
On va montrer que $LI(X - X^N)$ tend vers 0, ce qui terminera la preuve.
D'après le théorème 1.1.ii) on a :

$$\text{(3.6)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_n - S_n^N\|/a_n \leq \sup\,\{\|x\|\,,\ x \in \mathbf{K}_{X-X^N}\} \quad .$$

Notons λ_N le second membre de l'inégalité précédente. Par la méthode de la bosse glissante, on déduit facilement de la compacité de K_X que $\lambda_N \to 0$ quand $N \to \infty$. Soit donc N_o tel que $\lambda_{N_o} < \varepsilon$; d'après (3.6) il existe un entier $m \geq N_o$ tel que $\mathbb{E} \sup_{n\geq m} \|S_n - S_n^{N_o}\|/a_n < \varepsilon$. On remarque que $\forall\, N \geq N_o$:

$$\mathbb{E} \sup_{n\geq m} \|S_n - S_n^N\|/a_n \leq 2\, \mathbb{E} \sup_{n\geq m} \|S_n - S_n^{N_o}\|/a_n < 2\varepsilon \quad .$$

m étant fixé, il existe $M \geq m$ tel que

$$\sup_{N\geq M} \mathbb{E} \sup_{1\leq n\leq m} \|S_n - S_n^N\|/a_n < \varepsilon \quad .$$

On peut écrire finalement :

$$LI(X - X^N) \leq \mathbb{E} \sup_{n\leq m} \|S_n - S_n^N\|/a_n + \mathbb{E} \sup_{n\geq m} \|S_n - S_n^N\|/a_n \quad .$$

D'où si $N\geq M$: $LI(X-X^N) \leq \varepsilon + 2\varepsilon$. Ce qui termine la démonstration.

§ 4. LES ESPACES DE TYPE 2

Dans tout ce paragraphe (ε_n) est une suite de variables de Bernoulli : indépendantes équidistribuées de façon que $P(\varepsilon_n = +1) = P(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$ (g_n) désignera une suite de v.a.r. gaussiennes indépendantes, orthonormales (donc équidistribuées) ; de plus on suppose dans tout ce qui suit que la suite $\{g_n | n \in \mathbb{N}\}$ est indépendante de la suite $\{\varepsilon_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Définition 4.1 : Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de v.a.r. indépendantes centrées. Soient E, F deux espaces de Banach. Un opérateur $u : E \to F$ est dit de type p-$[\varphi_n]$ si pour toute suite (x_n) dans E vérifiant $\Sigma \|x_n\|^p < \infty$ la série $\Sigma \varphi_n x_n$ est presque sûrement convergente.
Un espace de Banach E est dit de type p-$[\varphi_n]$ si l'identité $E \to E$ l'est.

Proposition 4.1 (Hoffmann-Jørgensen) : Soient E, F deux espaces de Banach et u un opérateur de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) u est de type p-$[\varepsilon_n]$,

ii) u est de type p-$[g_n]$,

iii) il existe une constante C telle que l'on a, pour toute suite (Y^j) de v.a. indépendantes centrées à valeurs dans E :

$$(4.1) \qquad (\mathbb{E}\, \|\Sigma u(Y^j)\|^p)^{1/p} \leq C(\Sigma\, \mathbb{E}\, \|Y^j\|^p)^{1/p} .$$

Démonstration : Pour une démonstration de i $\Leftrightarrow$ ii nous renvoyons à [16] exposé III prop. 2. iii $\Rightarrow$ i est évident. i $\Rightarrow$ iii est facile à démontrer pour des (Y^j) symétriques. Dans le cas général, on introduit les symétrisées $\tilde{Y}^j$ et on utilise les inégalités (pour $p \geq 1$) valables parce que Y^j est centrée : $\mathbb{E}\, \|Y^j\|^p \leq \mathbb{E}\, \|\tilde{Y}^j\|^p \leq 2^p\, \mathbb{E}\, \|Y^j\|^p$.
Dans le cas $p = 2$, un opérateur vérifiant les propriétés de la proposition 4.1 est dit de type 2.

Remarque 4.1 : Soit $u : E \to F$ un opérateur. Soit (φ_n) une suite de v.a. scalaires indépendantes symétriques. On suppose qu'il existe une constante α telle que

$$\mathbb{E}\, \|\Sigma \varphi_i\, u x_i\| \leq \alpha(\Sigma \|x_i\|^p)^{1/p}$$

pour toute suite finie (x_i) dans E.
Alors u est de type p-$[\varphi_n]$ au sens de la définition ci-dessus.

En effet par l'inégalité de **Paul** Lévy :

$$\mathbb{E} \sup_k \left\| \sum_{i\le k} \varphi_i \, u\, x_i \right\| \le 2 \; \mathbb{E} \left\| \sum \varphi_i \, u \, x_i \right\|$$

$$\le 2 \; \alpha \left(\sum \|x_i\|^p \right)^{1/p} .$$

Cette dernière inégalité (de type "maximal") conduit facilement à la convergence p.s. des séries $\sum \varphi_n \, u\, x_n$ quand $\sum \|x_n\|^p < \infty$.

Théorème 4.1 ([6]) : Soit $u : E \to F$ un opérateur de type 2 ; pour toute v.a. $X(.)$ à valeurs dans E telle que $\mathbb{E}\, X = 0$ et $\mathbb{E}\, \|X\|^2 < \infty$, la v.a. $u(X(.))$ à valeurs dans F vérifie le théorème de la limite centrale.

Démonstration : Supposons que X est définie sur un espace de probabilité (Ω,P). On déduit de (4.1) : $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} \left\| \Sigma_1^n \, u(X_i) \right\| \le C \sqrt{n} \; (\mathbb{E} \|X\|^2)^{1/2}$$

soit :

$$CL(u(X)) \le C(\mathbb{E} \|X\|^2)^{1/2} \quad ;$$

et cela pour toute v.a. X dans $L_0^2(\Omega,P;E)$. L'opérateur u définit donc un opérateur continu $\tilde{u}$ de $L_0^2(\Omega,P;E)$ dans $CL_\infty(\Omega,P;E)$; comme $\mathcal{E}_0(\Omega,P;E)$ est dense dans $L_0^2(\Omega,P;E)$ l'image de $\tilde{u}$ est nécessairement dans $CL(\Omega,P;E)$. On conclut donc aisément en appliquant le théorème 3.1.

Comme l'a montré Zinn [19], l'extension au cas général d'opérateurs de type 2 (au lieu simplement d'espaces) peut être utile : elle permet de retrouver un théorème de Jain-Marcus [8] pour des v.a. à valeurs dans $C[0,1]$. Par ailleurs, une extension du théorème 4.1 dans le cas des martingales à valeurs banachiques est donnée dans [21].

Le reste du paragraphe est consacrée à la LLI.

Nous emploierons la notation suivante : si Z est une v.a. à valeurs dans un Banach, on pose :

$$\|Z\|_\varphi = \inf \left\{ c > 0 \quad \mathbb{E}\, e^{\|Z\|^2 / 2c^2} \le e \right\} .$$

La proposition suivante sera pour nous l'outil fondamental pour traiter la LLI. Sa démonstration est classique.

Proposition 4.2 : Soit (Y^j) une suite de v.a. indépendantes symétriques à valeurs dans un Banach. On a presque sûrement :

(4.2) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|Y^1 + \ldots + Y^n\| / a_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|Y^1 + \ldots + Y^n\|_\varphi}{\sqrt{n}} .$$

Démonstration : Posons $S^n = Y^1 + \ldots + Y^n$. Soit σ le second membre de (4.2). Il suffit de montrer que : $\forall\, \delta > 0$

(4.3) $$P(\limsup_n \{\|S^n\| > (1+\delta)\, a_n\, \sigma\}) = 0 .$$

Soit $n_1 < n_2 < \ldots$ une suite croissante d'entiers. Pour (4.3) il suffit que l'on ait :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\{\sup_{n \leq n_{k+1}} \|S^n\| > (1+\delta)\, a_{n_k}\, \sigma\}) < \infty .$$

D'après le lemme de Lévy (§ 2) il suffit en fait que

$$\sum_k P(\{\|S^{n_{k+1}}\| > (1+\delta)\, a_{n_k}\, \sigma\}) < \infty .$$

Revenant à la définition de $\|S^n\|_\varphi$, on voit aisément qu'il suffit que :

$$\sum_k \exp\left\{- (1+\delta)^2\, a_{n_k}^2\, \sigma^2 \Big/ 2\, \|S^{n_{k+1}}\|_\varphi^2\right\} < \infty .$$

Si k est assez grand $\|S^{n_{k+1}}\|_\varphi^2 \leq (1+\delta)\, n_{k+1}\, \sigma^2$, donc il suffit que

$$\sum_k \exp\{- (1+\delta)\, n_k\, LL\, n_k / n_{k+1}\} < \infty ;$$

si l'on fait le choix de $n_k = [\lambda^k]$ avec $1 < \lambda < 1+\delta$, on peut vérifier que la série précédente converge.

Corollaire 4.1 (Raoul Le Page) : Toute v.a. gaussienne à valeurs dans un Banach vérifie la LLI.

Démonstration : Supposons que X est gaussienne ; $S_n / \sqrt{n}$ suit alors la même loi que X, par conséquent $\|S_n / \sqrt{n}\|_\varphi = \|X\|_\varphi$; or un théorème de Fernique [2] assure que : pour toute v.a. gaussienne X à valeurs dans un Banach, $\|X\|_\varphi < \infty$.

La proposition 4.2 montre alors que $LI(X) < \infty$. Par un raisonnement de routine, on en déduit l'existence d'une constante A telle que

$$LI(X) \leq A \ \|X\|_{\varphi}$$

pour toute v.a. gaussienne X.
Comme toute v.a. gaussienne est la limite en norme $\|.\|_{\varphi}$ (d'après [2]) d'une suite de v.à. gaussiennes à valeurs dans des sous-espaces de dimension finie de E, on conclut par une application du théorème 3.1.

Remarque 4.1 : Le corollaire 4.1 contient comme cas particulier le cas du mouvement brownien considéré comme v.a. gaussienne à valeurs dans C[0,1]. C'est ce résultat dû à Strassen [18] qui est à l'origine des travaux plus récents sur la LLI.

Théorème 4.2 : Soit $u : E \to F$ un opérateur de type 2. Il existe une constante B telle que

$$LI(u(X)) \leq B \ (\mathbb{E} \ \|X\|^2)^{1/2}$$

pour toute v.a. centrée X à valeurs dans E ; par conséquent les conditions classiques $\mathbb{E}\,X = 0$ $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ suffisent pour que u(X) vérifie la LLI sur l'espace F.

Dans [13], ce théorème apparaît comme une conséquence de la proposition 4.2 et de la loi forte des grands nombres. En fait, nous allons démontrer un résultat beaucoup plus général :

Théorème 4.3 : Toute v.a. X à valeurs dans un espace de Banach E vérifiant le TLC et telle que $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ vérifie nécessairement la LLI.

On verra au § 7 que la condition $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ ne peut pas être supprimée même dans un espace de type 2.
Le premier lemme est une conséquence immédiate d'une inégalité de Hoffmann-Jørgensen ([4], (3.3) p. 164) ; pour une discussion détaillée nous renvoyons au paragraphe 3 dans [20].
Dans la suite nous poserons pour toute v.a. vectorielle Z et tout $p > 0$:

$$\|Z\|_p = (\mathbb{E}\,\|Z\|^p)^{1/p} \quad , \quad \|Z\|_{e^{\cdot}} = \inf \{a > 0 \mid \mathbb{E}\, e^{\|Z\|/a} \leq e\} \quad .$$

Dans le lemmes ci-dessous (Y_m) est une suite v.a. indépendantes symétriques à valeurs dans un espace de Banach E.

<u>Lemme 4.1</u> : Il existe une constante numérique H telle que :

$$(4.4) \qquad \forall\, N \in \mathbb{N} \qquad \|\Sigma_1^N Y_i\|_{e^\cdot} \leq H(\sup_{i\leq N} \|Y_i\|_\infty + \mathbf{E}\, \|\Sigma_1^N Y_i\|) \quad .$$

Si le lemme ci-dessus était connu avec $\|\ \|_\varphi$ au lieu de $\|\cdot\|_{e^\cdot}$, la démonstration du théorème 4.3 en serait grandement simplifiée. Nous allons contourner cette difficulté à l'aide d'une idée de S.R.S. Varadhan déjà exploitée par S. Kwapień dans [12] :

<u>Lemme 4.2</u> : $\forall\, N \in \mathbb{N} \quad \left\| \dfrac{\Sigma_1^N Y_i}{\sqrt{N}} \right\|_N \leq \sqrt{N} \sup_{i\leq N} \|Y_i\|_{e^\cdot}$.

<u>Démonstration</u> : Notons tout d'abord l'inégalité évidente : $\forall\, x > 0$, $x^N \leq (N/e)^N e^x$. Supposons que $\forall\, i \leq N$ $\|Y_i\|_{e^\cdot} \leq 1$; on peut écrire alors :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} (\mathbf{E}\, \|\Sigma_1^N Y_i\|^N)^{1/N} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left(\frac{N}{e}\right) (\mathbf{E} \exp \|\Sigma_1^N Y_i\|)^{1/N}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{N}{e}\right) \left(\prod_{i\leq N} \mathbf{E}\, e^{\|Y_i\|} \right)^{1/N} \leq \sqrt{N} \quad .$$

Dans toute la suite, nous posons, si $n < m$,

$$T_n^m = \sum_{n<i\leq m} Y_i$$

$$b_n = \sqrt{n/LLn} \quad \text{(en convenant que } b_1 = b_2 = 1) \quad .$$

L'étape essentielle est la

<u>Proposition 4.3</u> : On suppose qu'il existe une constante α telle que :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \forall\, n < m \ : & \mathbf{E}\, \|T_n^m\| \leq \alpha \sqrt{m-n} \\ \quad \text{et} & \|Y_n\| \leq \alpha\, b_n \quad \text{p.s.} \ ; \end{cases}$$

alors nécessairement $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|T_o^n / a_n\| < \infty$ p.s.

<u>Démonstration</u> : Posons, pour k entier assez grand : $n_k = 2^k$; notons m_k l'entier défini par

$$2^{m_k} \leq LL2^k < 2^{m_k+1}$$

et posons $p_k = 2^{m_k}$, $q_k = n_k / p_k$.
D'après l'argument de la proposition 4.2, il nous suffit pour conclure d'exhiber des constantes K et L telles que :

(4.6) $$\mathbb{P}\left\{ \|T_o^{n_k}\| > K\, a_{n_{k-1}} \right\} \leq \frac{L}{k^2}$$

pour tout k assez grand.
D'après le lemme 4.2 :

$$\|T_o^{n_k} / \sqrt{n_k}\|_{p_k} \leq \sqrt{p_k} \sup_{1 \leq j \leq p_k} \| T_{(j-1)q_k}^{jq_k} / \sqrt{q_k} \|_{e'} .$$

D'après (4.5) et le lemme (4.1) on a, si $j \leq p_k$:

$$\|T_{(j-1)q_k}^{jq_k}\|_{e'} \leq H\left(\alpha\, b_{n_k} + \alpha \sqrt{q_k}\right) .$$

En combinant les deux dernières inégalités, on obtient une constante C telle que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$

(4.7) $$\| T_o^{n_k} / \sqrt{n_k} \|_{p_k} \leq C \sqrt{p_k}$$

(puisque $p_k \leq LL2^k \Rightarrow b_{n_k} \leq \sqrt{q_k}$).
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev, on tire de (4.7)

$$\mathbb{P}\left(\|T_o^{n_k}\| / \sqrt{n_k} > e^4\, C \sqrt{p_k} \right) \leq e^{-4p_k}$$

et puisque $-2p_k \leq -LL2^k$, $e^{-4p_k} \leq \left(\frac{1}{kL2}\right)^2$, ce qui établit (4.6) et termine la démonstration.

<u>Démonstration du théorème 4.3</u> : Il nous suffit de montrer que :

(*) $$\mathbb{E}\, \|X\|^2 < \infty \quad \text{et} \quad CL(X) < \infty \Rightarrow LI(X) < \infty \quad ;$$

en effet, admettons (*) ; par le théorème du graphe fermé, il existe une constante β telle que

$$LI(X) \leq \beta((\mathbf{E}\,\|X\|^2)^{1/2} + CL(X))$$

pour toute v.a. appartenant à la fois à $L^2(E)$ et $CL_\infty(E)$; soit alors (X^N) une martingale formée de variables dans $\mathcal{E}_0(E)$ telle que $\mathbf{E}\,\|X - X^N\|^2 \to 0$; on a démontré au théorème 3.1 que $CL(X - X^N)$ tend vers 0 si X vérifie le TLC ; l'inégalité précédente montre alors que $LI(X - X^N)$ tend aussi vers 0, donc que X vérifie la LLI. Il nous reste à établir (*). Par symétrisation, on se ramène au cas où X est une v.a. symétrique.

On pose : $\forall\, i \in \mathbf{N} \quad Y_i = X_i \cdot 1_{\{\|X_i\| \leq b_i\}}$

$$\text{et } Z_i = X_i \cdot 1_{\{\|X_i\| > b_i\}}$$

et on suppose que $\mathbf{E}\,\|X\|^2$ et $CL(X)$ sont finis. On peut remarquer que les suites (X_i), $(Y_i - Z_i)$ et $(Y_i + Z_i)$ ont la même loi sur $E^{\mathbf{N}}$, on peut donc écrire, $\forall\, n,m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\Big\|\sum_{n<i\leq m} Y_i\Big\| &\leq \frac{1}{2}\,\{\mathbf{E}\,\|\Sigma_n^m\, Y_i - Z_i\| + \mathbf{E}\,\|\Sigma_n^m\, X_i\|\} \\ &\leq \mathbf{E}\,\|\Sigma_n^m\, X_i\| \\ &\leq \sqrt{m-n}\; CL(X) \quad .\end{aligned}$$

Par la proposition 4.3 on obtient :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|Y_1 + \ldots + Y_n / a_n\| < \infty \quad \text{p.s.} \qquad (4.8)$$

D'autre part, par l'inégalité de Schwarz :

$$\Big\|\sum_{i\leq n} Z_i\Big\| \leq \sum_{i\leq n} \|Z_i\| \leq \Big(\sum_{i\leq n} \|X_i\|^2\Big)^{1/2} \left(\sum_{i\leq n} 1_{\{\|X_i\|>b_i\}}\right)^{1/2} .$$

Par la loi des grands nombres, on sait que :

$$\text{p.s.} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} \|X_i\|^2 \to \mathbf{E}\,\|X\|^2 \quad ;$$

on a donc :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|Z_1 + \ldots + Z_n / a_n\| \leq (\mathbf{E}\,\|X\|^2)^{1/2} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{2LLn}\sum_{i\leq n} 1_{\{\|X_i\|>b_i\}}\right)^{1/2} .$$

On va montrer que le second membre de l'inégalité précédente est nul p.s.

pour cela, par le lemme de Kronecker, il nous suffit de voir que :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{LLn} 1_{\{\|X_n\|>b_n\}} < \infty \quad \text{p.s.}$$

Or, on vérifie facilement que

$$\frac{1}{LLn} \sim b_n^2 - b_{n-1}^2$$

il suffit donc que $\sum_{n=4}^{\infty} (b_n^2 - b_{n-1}^2) P(\|X\| > b_n) < \infty$, ou encore que $\sum_{n\geq 4} b_n^2 \, P(b_n < \|X\| \leq b_{n+1}) < \infty$, or cette dernière série est trivialement majorée par $\mathbf{E}\,\|X\|^2$.

On conclut donc que $\overline{\lim} \, \|Z_1 + \ldots + Z_n / a_n\| = 0$ p.s. (4.8) et l'inégalité triangulaire donnent alors :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \, \|X_1 + \ldots + X_n / a_n\| < \infty \quad \text{p.s.}$$

Par conséquent (prop. 2.2) $LI(X) < \infty$. Ce qui termine la démonstration de (*) et du théorème 4.3.

Remarque 4.3 : La démonstration ci-dessus prouve aussi le résultat suivant : soit (Y_n) une suite de v.a. indépendantes centrées à valeurs dans un espace de Banach E.

i) Si $\sup_n \mathbf{E}\,\|Y_n\|^{2+\delta} < \infty$ pour un réel $\delta > 0$ et

si $\sup_{n<m} \mathbf{E}\,\|Y_{n+1} + \ldots + Y_m / \sqrt{m-n}\| < \infty$

alors $\overline{\lim_{n\to\infty}} \, \|Y_1 + \ldots + Y_n\| / a_n < \infty$ p.s.

ii) Soit $u : E \to F$ un opérateur de type 2, si $\exists\, \delta > 0$ tel que $\sup_n \mathbf{E}\,\|Y_n\|^{2+\delta} < \infty$, alors $\overline{\lim_{n\to\infty}} \, \|u(Y_1 + \ldots + Y_n)\| / a_n < \infty$ p.s. .

§ 5. RESULTATS RECIPROQUES DU § 4

La proposition suivante montre que, pour que u soit de type p-$[\varepsilon_n]$, il suffit que (4.1) soit vérifié par des Y^j équidistribuées symétriques.

<u>Proposition 5.1</u> : Dans la situation de la proposition 4.1, soit N un entier, α et q réels, $1 \le \alpha < \infty$, $1 \le q \le \infty$♦. Supposons que u vérifie

(5.1)
$$\begin{cases} \mathbb{E}\,\|\Sigma_1^N u(Y_j)\| \le \alpha(\mathbb{E}\,\|Y_1\|^q)^{1/q} \\ \text{pour tout N-uplet } (Y_j) \text{ de v.a. indépendantes symétriques} \\ \underline{\text{équidistribuées}} \text{ à valeurs dans E.} \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\mathbb{E}\,\|\Sigma_1^N \varepsilon_j\, u(x_j)\| \le 2\,\alpha(\Sigma_1^N \|x_j\|^q/N)^{1/q} \quad , \tag{5.2}$$

pour tout N-uplet (x_j) d'éléments de E.

<u>Démonstration</u> : On écrit (5.1) pour un N-uplet (Y_j) équidistribué suivant la loi $1/2N\ \Sigma_1^N\ \delta_{x_j} + \delta_{-x_j}$. Notons que $(\mathbb{E}\,\|Y_1\|^q)^{1/q} = (\Sigma_1^N \|x_i\|^q/N)^{1/q}$.
Soit $(\varphi^1,\dots,\varphi^N)$ un N-uplet formé de v.a.r. symétriques à supports disjoints et telles que

$$\forall\ j=1,\dots,N \qquad P(|\varphi^j| = 1) = \frac{1}{N} \qquad P(\varphi_j = 0) = 1 - \frac{1}{N} \quad .$$

On désigne par $(\varphi_n^1,\dots,\varphi_n^N)$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ équidistribuées suivant la même loi que $(\varphi^1,\dots,\varphi^N)$.
Posons $\Phi^j = \sum_{i=1}^N \varphi_i^j$; l'inégalité en (5.1) s'écrit alors :

$$\mathbb{E}\,\|\sum_{j=1}^N u(x_j)\ \Phi^j\| \le \alpha\ (\Sigma\ \|x_j\|^q/N)^{1/q} \quad .$$

Si l'on remplace dans l'inégalité précédente x_j par $\varepsilon_j x_j$ et si l'on fait la moyenne des inégalités ainsi obtenues, on trouve :

$$(1/2^N) \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N} \mathbb{E}\,\|\Sigma\ \varepsilon_j\, u(x_j)\Phi^j\| \le \alpha\ (\Sigma\ \|x_j\|^q/N)^{1/q} \quad . \tag{5.3}$$

D'après [16] exp. III prop. 1, le 1er membre est plus grand que

---

♦ Si $q = \infty$, on fait la convention usuelle

$$(\mathbb{E}\,\|Z\|^q)^{1/q} = \text{ess sup}\ \|Z(.)\| \quad .$$

$\inf_{1\le j\le N} \mathbf{E}\,|\Phi^j| \times \mathbf{E}\,\|\Sigma_1^N \varepsilon_j\ u(x_j)\|$. D'où

(5.4) $$\mathbf{E}\,\|\Sigma_1^N \varepsilon_j\ u(x_j)\| \le \alpha/\mathbf{E}\,|\Phi^1|\ (\Sigma\ \|x_j\|^q/N)^{1/q}\ .$$

Mais on a par l'inégalité de Khintchine (cf. [17] pour la constante $\sqrt{2}$)

$$\mathbf{E}\,|\Phi^1| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{E}\,(\Sigma_1^N\ |\varphi_i^1|^2)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{E}\,(\Sigma_1^N\ |\varphi_i^1|)^{1/2}$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{2}}\,[P(\Sigma_1^N\ |\varphi_i^1| \ne 0)]^{1/2}\ ;$$

or $$P(\Sigma_1^N\ |\varphi_i^1| = 0) = \left(1-\frac{1}{N}\right)^N \le \frac{1}{e}$$

d'où : $$\mathbf{E}\,|\Phi^1| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{e}\right)^{1/2} \ge \frac{1}{2}$$

ce qui établit (5.2), en reportant dans (5.4).

Corollaire 5.1 [6] : La conclusion du théorème 4.1 est vraie seulement si l'opérateur u est de type 2.

Démonstration : Tout opérateur u ayant la propriété du théorème 4.1 définit un opérateur $\tilde{u}$ de $L_0^2(E)$ dans CL(E) ; par le théorème du graphe fermé $\tilde{u}$ est borné sur $L_0^2(E)$; par conséquent il existe une constante a telle que, pour chaque entier N, u vérifie (5.1) pour $q = 2$ et $\alpha = a\sqrt{N}$. La conclusion de la proposition (5.1) montre que u est de type 2 (d'après la remarque 4.1).

Corollaire 5.2 : Si u vérifie la conclusion du théorème 4.2 alors u est de type p-$[\varepsilon_n]$ pour tout $p < 2$; en fait, il existe une constante α telle que :

(5.4) $$\mathbf{E}\,\|\Sigma_1^n \varepsilon_i\ u(x_i)\| \le \alpha\,\sqrt{LLn}\ (\Sigma_1^n\ \|x_i\|^2)^{1/2}$$

pour toute suite finie $x_1,\dots,x_n$ d'éléments de E.

Démonstration : Par le théorème du graphe fermé, il existe une constante α telle que

$$LI(u(X)) \le \alpha(\mathbf{E}\,\|X\|^2)^{1/2}$$

pour toute v.a. X centrée à valeurs dans E ; a fortiori, on a pour tout n :

$$\mathbf{E}\ \|u(S_n)\| \leq \alpha\ a_n(\mathbf{E}\ \|X\|^2)^{1/2} \quad .$$

Il suffit pour établir (5.4) d'appliquer la proposition 5.1. Enfin, tout opérateur u vérifiant (5.4) est de type p-$[\varepsilon_n]$ pour tout $p<2$, c'est un cas d'application du lemme 4 de [16] exposé VII.

Nous allons voir que l'on peut améliorer sensiblement le corollaire 5.1 :

Rappelons que la covariance d'une v.a. X à valeurs dans un espace E est la forme bilinéaire $C_X : (\xi,\eta) \to \mathbf{E}\ \xi(X)\ \eta(X)$ sur $E' \times E'$ définie si X est scalairement de carré intégrable. La covariance C_X est dite prégaussienne s'il existe une mesure de Radon gaussienne γ_X sur l'espace E telle que

$$C_X(\xi,\eta) = \int_E \xi(x)\ \eta(x)\ \gamma_X(dx) \quad .$$

On notera que γ_X est déterminée par la donnée de C_X.

<u>Proposition 5.2</u> : Soit u un opérateur de E dans F ; on suppose que pour toute v.a. symétrique X essentiellement bornée en norme la v.a. u(X) a une covariance prégaussienne. Alors u est un opérateur de type 2.

<u>Démonstration</u> : Soit X une v.a. symétrique à valeurs dans E sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{a},P)$ telle que $\mathbf{E}\ \|X\|^2 = 1$. Soit Q la probabilité définie par $\forall\ A \in \mathcal{a}$, $Q(A) = \int_A \|X\|^2\, dP$. Considérons la v.a. symétrique Y définie sur $(\Omega,\mathcal{a},Q)$ par $Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega)/\|X(\omega)\| & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a : $\forall\ \xi,\eta \in E'$, $C_Y(\xi,\eta) = C_X(\xi,\eta)$.

Par conséquent $C_{uY} = C_{uX}$, donc $\gamma_{uX} = \gamma_{uY}$. Puisque Y est essentiellement borné, $\gamma_{uX} = \gamma_{uY}$ est de Radon. On a donc démontré que si X est symétrique $\mathbf{E}\ \|X\|^2 < \infty \Rightarrow \gamma_{uX}$ est de Radon sur F, ce qui entraîne (théorème de Fernique [2]) que $\int_F \|x\|\ \gamma_{uX}(dx) < \infty$. Par un argument standard, on en déduit l'existence d'une constante α telle que :

$$\int \|u(x)\|\ \gamma_X(dx) \leq \alpha(\mathbf{E}\ \|X\|^2)^{1/2}$$

pour toute v.a. symétrique à valeurs dans E. Le choix de X distribuée suivant $\frac{1}{2N}\ \Sigma_1^N\ \delta_{x_j} + \delta_{-x_j}$ conduit à : $\mathbf{E}\ \|\Sigma_1^N\ g_i\ ux_i\| \leq \alpha\ (\Sigma_1^N\ \|x_i\|^2)^{1/2}$, ce qui prouve que u est de type 2 (cf. Remarque 4.1). L'intérêt des résultats de ce paragraphe est qu'ils fournissent des contre-exemples au TLC (ou à la LLI) dans des espaces qui ne sont pas de type 2, comme par exemple $C[0,1]$ et $L^p[0,1]$ pour $p < 2$. De tels exemples avaient déjà été construits explicitement par Dudley ; ils donnent des informations plus précises : les exemples de [1] et [3] sont des v.a. à valeurs dans la boule unité de $C[0,1]$ ayant une covariance prégaussienne mais ne vérifiant ni le TLC ni la LLI.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.M. Dudley, Annales de l'Institut Fourier, 24 (1974) 49-60.

[2] X. Fernique, Intégrabilité des vecteurs gaussiens, C. R. Acad. Sc. Paris 270 (1970) 1698-1699.

[3] M. Hahn, Central limit theorems for D([0,1]) valued random variables, Ph. D. thesis, M.I.T. (1975).

[4] J. Hoffmann-Jørgensen, Studia Math. 52 (1974) 159-186.

[5] J. Hoffmann-Jørgensen, Sums of independent Banach space valued random variables, Aarhus Universitet, preprint (1972-1973) No 15.

[6] J. Hoffmann-Jørgensen and G. Pisier, The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, (à paraître).

[7] N. Jain, Proc. 1st. Conference on Probability in Banach spaces (Juillet 1975), Springer Lect. Notes (à paraître).

[8] N. Jain and M. Marcus, J. Funct. Anal. 19 (1975) 216-231.

[9] J.P. Kahane, Some random series of functions, H.M.M. (1968).

[10] J. Kuelbs, A strong convergence theorem for Banach space valued random variables, (à paraître).

[11] J. Kuelbs, Studia Math. 52 (1974) 69-87.

[12] S. Kwapień, Proc. 1st. Conference on Probability in Banach spaces (Juillet 1975), Springer Lect. Notes (à paraître).

[13] G. Pisier, Proc. 1st. Conference on Probability in Banach spaces (Juillet 1975), Springer Lect. Notes (à paraître).

[14] I. Prokhorov, Theor. Prob. Appl. t. 1 (1956) 156-214.

[15] Séminaire L. Schwartz 1969-70, Ecole Polytechnique, Paris.

[16] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique, Paris.

[17] J. Szarek, On the best constant in the Khintchine inequality, (à paraître).

[18] V. Strassen, Z. Wahrshein **3** (1964) 211-226 ; **4** (1966) 265-268.

[19] J. Zinn, A note on the central limit theorem in Banach spaces, (à paraître).

[20] N. Jain and M. Marcus, T.A.M.S. 212 (1975) 1-36.

[21] W. Woyczynski, Central limit theorems for martingales in Banach spaces, (à paraître).
