

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. MOUCHTARI

**Sur l'existence d'une topologie du type de Sazonov
sur un espace de Banach**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 17, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A13_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

SUR L'EXISTENCE D'UNE TOPOLOGIE DU TYPE
DE SAZONOV SUR UN ESPACE DE BANACH

par D. MOUCHTARI
(Kazan)

§ 1. INTRODUCTION

Soient E un e.l.c., E' son dual, Φ une fonction linéaire aléatoire, c'est-à-dire une application continue linéaire $\Phi : E \rightarrow L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit μ_Φ la mesure cylindrique sur $\sigma(E', E)$ définie par Φ . Si μ_Φ est σ -additive, nous désignerons par P_Φ son prolongement à la σ -algèbre engendrée par les ensembles cylindriques. Soit pour tout $x \in E$

$$\chi_\Phi(x) = \int_{E'} e^{-|\langle x, x' \rangle|} d\mu_\Phi .$$

Définition 1 : Une topologie \mathcal{T} sur E est dite de type Sazonov si, pour toute fonction linéaire aléatoire Φ sur E , la condition " Φ est continue par rapport à \mathcal{T} " est équivalente à la σ -additivité de μ_Φ .

L'objet de cet exposé est de savoir s'il existe une topologie de type Sazonov sur E ainsi que l'étude des propriétés de cette topologie.

§ 2. EXISTENCE DE LA TOPOLOGIE DE TYPE SAZONOV

Théorème 1 : Soit E un Banach séparable admettant la propriété d'approximation métrique. On suppose qu'il existe un plongement isomorphique Ψ de E' dans L^0 . Alors il existe sur E une topologie de type Sazonov \mathcal{T} .

Faisons quelques remarques préliminaires : Ψ a les propriétés

(1a) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\chi_\Psi(x') > 1 - \delta \text{ implique } \|x'\| < \varepsilon , \quad (1)$$

(1b) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x'\| < \delta \text{ implique } \chi_\Psi(x') > 1 - \varepsilon .$$

Soit T_n une suite d'opérateurs de rang fini telle que $\lim T_n x = x$ pour chaque $x \in E$, $\sup_n \|T_n\| < C < \infty$.

Posons $\Phi_n = \Phi T_n$, $\Psi_n = \Psi T_n'$. Maintenant nous pouvons formuler le lemme suivant.

Lemme 1 : Supposons que les conditions du théorème soient remplies. Alors μ_{Φ} est σ -additive si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $K = K(\varepsilon) > 0$ tel que pour chaque n

$$\int_E \chi_{\Phi_n}(x/K) d\mu_{\Psi_n} > 1 - \varepsilon \quad . \quad (2)$$

Démonstration : Notons que la suite $\{T_n^2\}$ a les mêmes propriétés que $\{T_n\}$, $\sup_n \|T_n^2\| < C^2$. En outre, en désignant par T'_n le transposé de T_n :

$$\mu_{\Phi_n} \{x' : \|T'_n x'\| > A\} = \mu_{\Phi} \{x' : \|T_n^2 x'\| > A\} \quad . \quad (3)$$

En effet, le second membre est égal à

$$\begin{aligned} & \mu_{\Phi} \{x' : \sup_{\|x\| < 1} |\langle T'_n x', T_n x \rangle| > A\} = \\ & = \mu_{\Phi_n} \{x' : \sup_{\|x\| < 1} |\langle T'_n x', x \rangle| > A\} \quad . \end{aligned}$$

1. Soit μ_{Φ} σ -additive. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit S tel que :

$$P_{\Phi} \{x' : \|x'\| > S/C^2\} < \varepsilon/2 \quad .$$

Alors, d'après (3)

$$\begin{aligned} P_{\Phi_n} \{x' : \|T'_n x'\| > S\} & = P_{\Phi} \{x' : \|T_n^2 x'\| > S\} \leq \\ & \leq P_{\Phi} \{x' : \|x'\| > S/C^2\} < \varepsilon/2 \quad . \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons δ dans (1b) tel que

$$\|x'\| < \delta \text{ entraîne } \chi_{\Psi}(x') > 1 - \varepsilon/2 \quad .$$

Posons $K = K(\varepsilon) = S/\delta$. Alors, (2) est vérifié :

$$\begin{aligned} & \int_E \chi_{\Phi_n}(x/K) dP_{\Psi_n} = \int_{E'} \chi_{\Psi_n}(x'/K) dP_{\Phi_n} > \\ & > \int_{\{x' : \|T'_n x'\| < S\}} \chi_{\Psi_n}(x'/K) dP_{\Phi_n} > (1 - \varepsilon/2)^2 > 1 - \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

2. Supposons que (2) soit vérifié. Soit δ correspondant à $\varepsilon = \tau$ tel que (1a) soit réalisé. Supposons que $\mu_{\bar{\phi}}$ ne soit pas σ -additive. Alors, l'image de la boule unité par P n'est pas latticiellement bornée. Donc, pour un $\varepsilon < \delta$ il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in E$, $\|\varphi_i\| < 1$ tels que

$$P\{\omega : \sup_{i \leq s} |\bar{\phi}(\varphi_i)(\omega)| > 2K\tau\} > 2\varepsilon/\delta ,$$

où $K = K(\varepsilon)$ est définie au moyen de (2). Comme $\bar{\phi}$ est continue, pour tout $n > n_0$ on a :

$$P\{\omega : |\bar{\phi}(T_n^2 \varphi_i - \varphi_i)(\omega)| > K\tau\} < \varepsilon/\delta s , \quad i \leq s .$$

Alors,

$$\mu_{\bar{\phi}}\{x' : |\langle T_n^2 \varphi_i, x' \rangle| > K\tau\} > \varepsilon/\sigma , \quad (4)$$

(4) et (3) nous donnent

$$\begin{aligned} P_{\bar{\phi}_n}\{x' : \|T_n^2 x'\| > K\tau\} &= \mu_{\bar{\phi}}\{x' : \|T_n^2 x'\| > K\tau\} > \\ &> \mu_{\bar{\phi}}\{x' : \sup_i |\langle T_n^2 \varphi_i, x' \rangle| > K\tau\} > \varepsilon/\delta , \\ P_{\bar{\phi}_n}\{x' : \chi_{\Psi_n}(x'/K) < 1 - \delta\} &> \varepsilon/\delta . \end{aligned}$$

Soit $B_n \subset \{x' \in E' : \chi_{\Psi_n}(x'/K) < 1 - \delta\}$ tel que $P_{\bar{\phi}_n} B_n = \varepsilon/\delta$. Alors

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< \int_E \chi_{\bar{\phi}_n}(x/K) dP_{\Psi_n} \quad (\text{d'après (2)}) = \\ &= \int_{E'} \chi_{\Psi_n}(x'/K) dP_{\bar{\phi}_n} = \int_{B_n} + \int_{E' - B_n} < \\ &< (\varepsilon/\delta)(1 - \delta) + (1 - \varepsilon/\delta) = 1 - \varepsilon . \end{aligned}$$

Ce qui est contradictoire.

Démonstration du théorème 1 : Soit $U(\bar{\phi}, \varepsilon) = \{x \in E : \chi_{\bar{\phi}}(x) > 1 - \varepsilon\}$. Soit τ la topologie dont une base est constituée des ensembles de la forme $U(\bar{\phi}, \varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$ et où $\bar{\phi}$ est une fonction linéaire aléatoire telle que $\mu_{\bar{\phi}}$ soit σ -additive.

1. Si $\mu_{\bar{\phi}}$ est σ -additive, $\bar{\phi}$ est \mathcal{T} -continue par définition de \mathcal{T} .
2. Supposons que $\bar{\phi}$ est \mathcal{T} -continue. Démontrons que (2) a lieu pour $\bar{\phi}$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Soit ϕ une fonction linéaire aléatoire telle que $U(\phi, \delta) \subset U(\bar{\phi}, \varepsilon/2)$ et μ_{ϕ} est σ -additive. Soit $K = K(\varepsilon \delta/2)$ la constante obtenue par l'inégalité (2) appliquée à ϕ . Posons :

$$G_n = \{x \in E : T_n x \in KU(\phi, \delta)\} \quad .$$

Alors, pour tout n , $x \notin G_n$ entraîne $\chi_{\bar{\phi}_n}(x/K) < 1 - \delta$, donc

$$\begin{aligned} 1 - \delta\varepsilon/2 &< \int_E \chi_{\bar{\phi}_n}(x/K) dP_{\Psi_n} = \int_{G_n} + \int_{E-G_n} \leq \\ &\leq P_{\Psi_n}(G_n) + (1 - P_{\Psi_n}(G_n))(1 - \delta) \quad . \end{aligned}$$

Cela entraîne $P_{\Psi_n}(G_n) > 1 - \varepsilon/2$. Comme $x \in G_n$ entraîne $T_n x \in KU(\bar{\phi}, \varepsilon/2)$ et $\chi_{\bar{\phi}_n}(x/K) > 1 - \varepsilon/2$, nous avons

$$\int_E \chi_{\bar{\phi}_n}(x/K) dP_{\Psi_n} > P_{\Psi_n}(G_n)(1 - \varepsilon/2) > 1 - \varepsilon \quad . \quad \text{CQFD}$$

Théorème 2 : Supposons que dans un espace de Banach E il existe une topologie \mathcal{T} de type Sazonov. Alors, l'espace E est plongable dans $L^p(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ avec $p \in (0, 1)$, donc, a fortiori E est plongable dans un L^0 .

Démonstration : Supposons le contraire. D'après un critère de Lindenstrauss et Pełczyński (cf. par ex. [1]), pour chaque entier N il existe deux suites finies $x'_i(N)$ ($i \leq n_N$) et $y'_j(N)$ ($j \leq m_N$) telles que pour chaque $x \in E$ on ait :

$$\sum_{i=1}^{n_N} |\langle x, x'_i(N) \rangle|^p > \sum_{j=1}^{m_N} |\langle x, y'_j(N) \rangle|^p \quad , \quad (5)$$

$$1/2^N = \sum_{i=1}^{n_N} \|x'_i(N)\|^p < \sum_{j=1}^{m_N} \|y'_j(N)\|^p / 2^{2N} \quad . \quad (6)$$

Soit $\Omega_N = \overline{\{-m_N, m_N\}}$ l'espace probablisé défini par :

$$\Omega_N = \overline{\{-m_N, m_N\}} - \{0\}, \quad P_N(\{j\}) = \|y'_j(N)\|^p / 2 \sum_{j=1}^{m_N} \|y'_j(N)\|^p \quad . \quad (7)$$

Posons : $\Psi_N : E \rightarrow L^p(\Omega_N, P_N)$,

$$\Psi_N(x)(j) = \text{sgn } j \cdot 2^N \langle x, y'_j \rangle / \|y'_j\|$$

Soit $\{\Omega, P\} = \prod_N \{\Omega_N, P_N\}$, $\Psi = \sum_N \Psi_N : E \rightarrow L^P\{\Omega, P\}$. Alors, toutes les μ_{Ψ_N} étant concentrées sur les points $\pm 2^N y'_j(N) / \|y'_j(N)\|$, dont la norme est égale à 2^N , μ_{Ψ} n'est pas σ -additive. En effet, on aurait dans le cas contraire :

$$P_{\Psi} = P_{\Psi_N} * P_{\Psi'_N},$$

où $\Psi'_N = \Psi - \Psi_N$ et on aurait l'inégalité

$$P_{\Psi}\{x' : \|x'\| > 2^N\} \geq 1/2 P_{\Psi_N}\{x' : \|x'\| > 2^N\} = 1/2$$

pour chaque N .

Maintenant démontrons que Ψ est γ -continue. Pour cela nous introduisons les applications $T_N : E \rightarrow \ell^P_{n_N}(N)$:

$$T_N x = (\langle x, x'_i(N) \rangle)_{i \leq n_N}, \quad T = \sum T_N = E \rightarrow \bigoplus^P \ell^P_{n_N}(N) \cong \ell^P.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\Psi_N(x)\|^P &= \sum_{j=1}^{m_N} |\langle x, y'_j(N) \rangle|^P \cdot 2^{Np} / \sum_{j=1}^{m_N} \|y'_j(N)\|^P \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{m_N} |\langle x, y'_j(N) \rangle|^P < \sum_{i=1}^{n_N} |\langle x, x'_i(N) \rangle|^P = \\ &= \|T_N x\|^P. \end{aligned}$$

Alors

$$\|Tx\|^P = \sum \|T_N x\|^P \geq \sum \|\Psi_N(x)\|^P \geq \|\Psi(x)\|^P \tag{8}$$

T admet la factorisation : $T = T_o S : E \xrightarrow{S} C_o \xrightarrow{T_o} \ell^P$, où $S w = (\langle x, x'_i(N) \rangle / \|x'_i(N)\| 2^{N/2})_{N,i}$, $T_o(a_i(N)) = (2^{N/2} \cdot a_i(N) \cdot \|x'_i(N)\|)_{N,i}$.

Ici les suites doublement indexées sont rangées suivant l'ordre lexicographique. La partie gauche de (6) montre que T_o est une multiplication par un élément de ℓ^P . Par définition, S est un opérateur continu. Soit maintenant $\bar{\Phi} : \ell^P \rightarrow L^0(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un plongement de ℓ^P dans un espace de

variables aléatoires p-stables, $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}T$. La fonction linéaire aléatoire $\bar{\Phi}T_0 : C_0 \rightarrow \ell^p \rightarrow L^0$ définit une mesure de Radon $\mu_{\bar{\Phi}T_0}$ sur $\sigma(\ell^1, C_0)$ ([2]) donc, l'image par $\bar{\Phi}$ de la boule unité de E est latticiellement bornée et $\mu_{\bar{\Phi}}$ est σ -additive. Mais, $\chi_{\bar{\Phi}}$ ne dépend que de $\|Tx\|$ donc, (d'après (8)), Ψ est continue par rapport à la topologie définie par les ensembles $U(\bar{\Phi}, \varepsilon)_{\varepsilon > 0}$. Comme $\bar{\Phi}$, par définition, est \mathcal{T} -continue, Ψ est \mathcal{T} -continue. CQFD

§ 3. LA FORME DES TOPOLOGIES DE TYPE SAZONOV

Théorème 3 : Soit E un Banach séparable tel que dans E il existe une topologie \mathcal{T} de type Sazonov dont un système fondamental \mathcal{B} de voisinages de 0 ne contient que des convexes du type $p \in [1, 2]$ (au sens de [4], § 3). Alors E' est de type p.

Démonstration : Supposons que pour $\varepsilon \in (0, 1/4)$ et pour un $K > 0$ il existe $x'_1, \dots, x'_n \in E'$ tels que

$$\sum \|x'_i\| = 1, \quad P\{t : \|\sum f_i^p(t)x'_i\| > K\} = \varepsilon, \quad (9)$$

où f_i^p sont les variables indépendantes p-stables. Alors, on peut démontrer l'existence d'une suite $y'_1, \dots, y'_n \in E'$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \|y'_i\|^p = 1, \quad P\{t : \|\sum_{i \in \mathcal{J}} f_i^p(t)y'_i\| > K/4\} > \varepsilon/3 \quad (10)$$

chaque fois que $\sum_{i \in \mathcal{J}} \|y'_i\|^p > 35/36$. Démontrons ce point.

Soit E_0 l'espace engendré par les $\{x'_i\}$. Comme E_0 est un espace de dimension finie, E_0 est de type p. Soit K_0 la borne supérieure des K qui satisfont à une relation du type (9) avec les x'_i formant un ensemble fini de E_0 . Soit $(\{y'_i\}_{i=1}^n)$ en ensemble dans E pour lequel (9) a lieu avec $K > \frac{16}{18} K_0$. Supposons que (10) n'ait pas lieu pour $\{y'_i\}_{i=1}^n$. Alors, pour un $\mathcal{J} \subset \overline{[1, n]}$ nous avons :

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} \|y'_i\|^p > 35/36, \quad P\{\|\sum_{i \in \mathcal{J}} f_i^p(t)y'_i\| > K/4\} < \varepsilon/3 \quad (11)$$

(9) et (11) nous donnent que pour $\mathcal{J}' = \overline{[1, n]} - \mathcal{J}$ on a :

$$P\{\|\sum_{i \in \mathcal{J}'} f_i^p(t)y'_i\| > (3/4)K\} > \frac{2}{3} \varepsilon. \quad (12)$$

Supposons que la partie gauche de (12) est inférieure à ε . Si la partie gauche est supérieure ou égale à ε , on peut arriver aux mêmes conclusions d'une manière plus simple. En utilisant une inégalité due à de Acosta ([3], Lemma 3.1 (a)) nous avons vu que

$$\begin{aligned} & P\{t : \|\sum_{i \in \mathfrak{S}'} f_i^P(t) y_i'\| > \frac{3}{16} K\} > \\ & > \frac{3}{2} P\{\|\sum_{i \in \mathfrak{S}'} f_j^P(t) y_i'\| > \frac{3}{4} K\} > \varepsilon \quad . \end{aligned} \quad (13)$$

Maintenant, remplaçons l'ensemble $\{y_i'\}$ par un autre $\{Cy_i'\}_{i \in \mathfrak{S}'}$, où $C > 36^{1/p}$. Il résulte de la définition de \mathfrak{S}' et de (13) que cet ensemble satisfait à une relation du type (9) avec $K(\varepsilon) > K_0$. Cela est contraire à nos suppositions.

Supposons que E' n'est pas du type p . Alors, on a vu, que pour un $\varepsilon \in (0, 1/4)$ il existe une suite $\{x_1'(N), \dots, x_{n_B}'(N)\}_{N=1}^{\infty}$ d'ensembles finis dans E' telle que

$$\sum_{i=1}^{n_N} \|x_i'(N)\|^P = 1, \quad P\{t : \|\sum_{i \in \mathfrak{S}} f_i^P(t) x_i'\| > 2^{4N}\} > \varepsilon, \quad (14)$$

chaque fois que $\sum_{i \in \mathfrak{S}} \|x_i'(N)\|^P > 35/36$. Soit $\{\Omega_N, P_N\}$ l'espace probabilisé,

$\Omega_N = \overline{[1, n_N]} \cup \overline{[-n_N, -1]}$, $P_N(i) = \|x' | i\| (N) \|^P / 2$. Soit $\Phi_N : E \rightarrow L^0(\Omega_N, P_N)$,

$\Phi_N(x)(i) = \text{sgn } i \langle x, x' | i\| (N) \rangle / \|x' | i\| (N) \|. 2^N$.

Supposons les Φ_N indépendantes et soit $\Phi = \sum \Phi_N$. μ_{Φ_N} est concentrée sur les points $x_i'(N) / \|x_i'(N)\|. 2^N$ dont la norme est égale à $1/2^N$. Cela entraîne que μ_{Φ} est σ -additive, donc Φ est \mathcal{T} continue. Alors, il existe $C > 0$ et un $V \in \mathcal{B}$ de type p tel que pour chaque $x \in V$

$$P\{|\Phi(x)| > C\} < 1/36 \cdot 8 \cdot 4 \quad .$$

Comme les Φ_N sont symétriques, pour chaque N et $x \in V$

$$P\{|\Phi_N(x)| > C\} < 1/36 \cdot 8 \cdot 2 \quad .$$

D'après le théorème de Nikishin et Maurey [4] pour chaque N il existe

$\mathfrak{S}_N \subset \Omega_N$ tel que $P_N\{\mathfrak{S}_N\} > 1 - 1/36 \cdot 2$ et

$$\sum_{i \in \mathfrak{J}_N} |\langle x, x'_i(N) \rangle|^p / 2^{NP} = \int_{\mathfrak{J}_N} |\Phi_N(x)|^p dP_N < (j_V(x))^p$$

(où j_V désigne la jauge de V).

Maintenant, nous posons pour chaque n

$$\begin{aligned} \Psi_N(x) &= \sum_{i \in \mathfrak{J}_N} f_i^p(t) \langle x, x'_i(N) \rangle / 2^{2N}, \\ \Psi &= \sum \Psi_N / 2^N \end{aligned}$$

où toutes les Ψ_N sont indépendantes.

Alors, pour $q < p$:

$$\begin{aligned} (\int |\Psi_N(x)|^q dP)^{p/q} &< \text{Const} \int_{\mathfrak{J}_N} |\Phi_N(x)|^p dP_N < \\ &< \text{Const} (j_V(x))^p ; \end{aligned}$$

et

$$(\int |\Psi(x)|^q)^{1/q} < \text{Const} j_V(x) .$$

C'est-à-dire que $\Psi : E \rightarrow L^0$ elle aussi est τ -continue. Mais (14) nous donne (si μ_Ψ est σ -additive)

$$\mu_{\Psi_N} \{x' : \|x'\| > 2^{2N}\} > 1/2 P \{t : \sum_{i \in \mathfrak{J}_N \cup [0, \infty)} f_i^p(t) x'_i(N) \| > 2^{4N}\} > \varepsilon/2 ,$$

et $\mu_\Psi \{x' : \|x'\| > 2^N\} > \varepsilon/4$ pour chaque N , ce qui est contraire à la σ -additivité de μ_Ψ , donc à la τ -continuité de Ψ .

Corollaire 1 : Soit E un Banach séparable tel que dans E il existe une topologie τ de type Sazonov dont les voisinages de 0 du type $p \geq 1$ forment une base. Alors E est plongeable dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Le corollaire résulte immédiatement des théorèmes 3 et 2 et du fait [4] que chaque Banach de type p plongeable dans L^0 est plongeable dans L^p .

Corollaire 2 : Soit E un Banach séparable tel que dans E il existe une topologie τ de type Sazonov définie par une famille de produits scalaires. Alors E est un Hilbert.

Théorème 4 : Soit E un Banach séparable sur lequel il existe une topologie de type Sazonov \mathcal{T} et tel que E' soit de type $p \geq 1$. Alors sur E il existe une topologie de type Sazonov \mathcal{T}_1 qui est la plus faible rendant continue une famille $(T_i)_{i \in \mathfrak{J}} : E \rightarrow L^p(\Omega_i, P_i)$ d'opérateurs linéaires.

Avant de démontrer le théorème nous citons deux théorèmes qui présentent un changement modique du théorème dû à Hoffman-Jørgensen [5].

Définition : Soient (E, E') deux espaces de dualité. Une probabilité de Radon P sur E est dite pré- p -stable si la mesure cylindrique μ définie par la fonction caractéristique $\varphi : E' \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x') = \exp(-\int |\langle x, x' \rangle|^p dP)$ est de Radon.

Théorème 5 : Soit E un Banach séparable. E est de type p si et seulement si chaque probabilité de Radon dans E telle que $\int_E \|x\|^p dP < \infty$ est pré- p -stable.

Théorème 6 : Soit E un Banach séparable. E' est de type p si et seulement si chaque probabilité de Radon dans $\sigma(E', E)$ telle que $\int_{E'} \|x'\|^p dP < \infty$ est pré- p -stable.

(La démonstration est tout à fait analogue à celle de Hoffmann-Jørgensen.)

Démonstration du théorème 4 : Soit \mathcal{T}_1 la topologie définie par toutes les $U(\Phi, \varepsilon)$, où $\Phi(x)$ est p -stable pour chaque x , $x \in E$, et μ_Φ est σ -additive. Démontrons que \mathcal{T}_1 est une topologie de type Sazonov. Comme chaque Φ de la définition de \mathcal{T}_1 est \mathcal{T} -continue, \mathcal{T}_1 est plus faible que \mathcal{T} et chaque fonction aléatoire linéaire Ψ qui est \mathcal{T}_1 -continue définit une mesure μ_Ψ σ -additive. Inversement supposons la mesure μ_Ψ définie par Ψ σ -additive. Soit $P_\Psi(\|x'\| \leq R) = 1 - \varepsilon/2$, et posons $P'(C) = \frac{1}{1-\varepsilon/2} P_\Psi(C \cap \{x' : \|x'\| \leq R\})$. D'après le théorème 6 P' est pré- p -stable. Soit P la probabilité p -stable correspondante à P' . Alors pour $\delta > 0$, et $K > 0$, $P\{x' : |\langle x, x' \rangle| > K\} < \delta$ entraîne $\int_E |\langle x, \cdot \rangle|^p dP' < \varepsilon/2$, et d'après l'inégalité de Tchebychev cela entraîne $P\{x' : |\langle x, x' \rangle| > 1\} < \varepsilon/2$ et $P\{\omega : |\Psi(x)(\omega)| > 1\} < \varepsilon$. Cela signifie que Ψ est \mathcal{T}_1 -continue.

Pour terminer la démonstration, il faut remarquer qu'un sous-espace de L^0 formé de variables p -stables se plonge dans un espace L^p . On en déduit que \mathcal{T}_1 est la topologie la plus faible rendant continue une certaine famille

$T_i : E \rightarrow L^p(\Omega_i, P_i)$ d'opérateurs linéaires.

Ce résultat était suscité par les conversations avec B. Maurey qui m'a indiqué l'existence d'une topologie localement convexe du type Sazonov pour les espaces $E = \ell^p$, $p \in]2, \infty[$.

§ 3. CAS D'UN FRECHET

Les résultats ci-dessus peuvent être généralisés au cas d'un espace Fréchet séparable E .

Théorème 1' : Soit $|\cdot|_n$ une suite de normes définissant la topologie de E . Supposons que

- 1) les espaces $E_{|\cdot|_n}$ admettent la propriété d'approximation métrique,
- 2) $(E_{|\cdot|_n})'$ est plongeable dans L^0 .

Alors dans E il existe une topologie de Sazonov.

Théorème 2' : Soit E un Fréchet tel que dans E il existe une topologie de type Sazonov. Alors la topologie de E peut être définie par une suite de normes $|\cdot|_n$ telles que tous les espaces $(E_{|\cdot|_n})'$ sont plongeables dans L^0 .

Théorème 3' : Supposons que dans E existe une topologie de type Sazonov définie par les convexes symétriques de type $p \in [1, 2]$. Alors la topologie de E peut être définie par une suite de normes $|\cdot|_n$ telles que les $(E_{|\cdot|_n})'$ sont plongeables dans L^p .

Théorème 4' : Supposons que dans E il existe une topologie de type Sazonov. Si la topologie de E peut être définie par une suite de normes $|\cdot|_n$ telles que $(E_{|\cdot|_n})'$ soit de type p , alors il existe une topologie de Sazonov dans E définie par une famille de convexes de type p .

Remarque : Les résultats de cet article généralisent quelques uns de mes résultats [6], [7].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Maurey, Un théorème de prolongement, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, A-329 (1974).
- [2] L. Schwartz, Les applications 0-radonifiantes dans les espaces de suite, Séminaire Schwartz 1969-1970, exp. XXVI.
- [3] A. de Acosta, Stable measures and seminorms, Ann. of Prob. vol. 3, No 5 (1975) 865-875.
- [4] B. Maurey, Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$, Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973, exp. X-XI.
- [5] J. Hoffmann-Jørgensen, The strong law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, Mat. Inst. Aarhus, Preprint Ser., 1975.
- [6] D. Mouchtari, Teoria verojatnostej i primenienia, 1973, No 2, Some general questions of the theory of probability measures in linear spaces, XVIII, No 1 (1973) 66-77.
- [7] D. Mouchtari, Une caractérisation probabiliste de l'espace de Hilbert, Teoria verojatnostej i primenia (à paraître).
