Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Quelques résultats concernant l'inconditionnalité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 16, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A12_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

QUELQUES RESULTATS CONCERNANT L'INCONDITIONNALITE

par B. MAUREY

Exposé No XVI

9 Mars 1976

Cet exposé est dans une certaine mesure la suite de l'exposé IX. Nous y verrons quelques résultats positifs concernant l'extraction de sous-suites inconditionnelles, résultats dus à H.P. Rosenthal. Le premier résultat s'énonce ainsi (en notant 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble A).

<u>Théorème 1</u> : Soient S un ensemble, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de S. Si la suite (1_{A_n}) tend faiblement vers zéro dans $\ell^\infty(S)$, on peut extraire une sous-suite $\left(1_{A_{n_k}}\right)_k$ 1-inconditionnelle dans $\ell^\infty(S)$.

(On se reportera à l'exposé IX pour la définition d'une suite C-inconditionnelle.)

En considérant $\ell^\infty(S)$ comme un espace C(K), on voit que le théorème 1 résulte de l'énoncé suivant :

<u>Théorème 1 bis</u> : Soient K un espace topologique compact, et (A_n) une suite d'ensembles ouverts et fermés de K. Si la suite de fonctions (continues sur K !) (1_{A_n}) converge simplement vers zéro sur K, il existe une sous-suite $\left(1_{A_{n_k}}\right)_k$ 1-inconditionnelle dans C(K).

On voit en fait que les deux énoncés sont équivalents, en considérant C(K) comme un sous-espace de $\ell^\infty(K)$. Avant de commencer la démonstration, il est intéressant de savoir caractériser le fait que (1_{A_n}) converge faiblement vers zéro dans $\ell^\infty(S)$. A cet effet nous dirons qu'une suite (A_n) de parties d'un ensemble S <u>converge fortement vers $\emptyset$</u> si la condition suivante est réalisée : pour toute suite croissante d'entiers $n_1 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$, il existe un entier k_o tel que :

$$\bigcap_{j=1}^{k_o} A_{n_j} = \emptyset \quad .$$

<u>Lemme 1</u> : Soit (A_n) une suite de parties de S. La suite (1_{A_n}) converge faiblement vers zéro dans $\ell^\infty(S)$ si et seulement si la suite (A_n) converge fortement vers $\emptyset$.

Nous ne nous attarderons pas sur la démonstration du lemme : il faut seulement remarquer que les points extrémaux de la boule unité du dual de $\ell^\infty(S)$ correspondent aux ultrafiltres sur S, et que la convergence forte vers $\emptyset$ de la suite (A_n) signifie qu'il n'existe pas d'ultrafiltre $\mathfrak{U}$ qui contienne une infinité d'ensembles A_n.

Dans la deuxième partie de l'exposé nous nous intéresserons aux espaces C(H), lorsque H est un compact dénombrable "pas trop gros", en ce sens que $H^{(\omega^2)} = \emptyset$ (rappelons que $H^{(\alpha)}$ désigne le dérivé d'ordre α du compact H).

Théorème 2 : Soit k un entier ≥ 1 et soit H un compact dénombrable tel que $H^{(\omega.k)} = \emptyset$. Toute suite (f_n) de C(H) qui tend simplement vers zéro sur H possède, pour tout $\varepsilon > 0$, des sous-suites (f_{n_k}) $(k+\varepsilon)$-inconditionnelles.

Ce résultat, rapproché des contre-exemples de l'exposé IX, montre que les constantes trouvées sont (à ε près) les meilleures possibles. Si l'on préfère parler en termes de $C(\alpha+1)$, α étant un ordinal, le théorème 2 s'énonce ainsi : si $\alpha < \omega^{\omega.k}$, toute suite qui tend faiblement vers zéro dans $C(\alpha+1)$ possède des sous-suites $(k+\varepsilon)$-inconditionnelles. Dans [1], le théorème 2 est énoncé seulement pour $k = 1$ et $k = 2$. La généralisation présentée ici est assez longue à rédiger, mais pas plus difficile.

Commençons la démonstration des théorèmes 1 et 1 bis. Nous nous placerons dans le cadre du théorème 1 bis. Nous supposons donnés un espace compact K, une suite (f_n) de fonctions continues sur K, ne prenant que les valeurs 0 ou 1, et convergeant simplement vers zéro sur K. Commençons par expliquer le principe de la démonstration : il s'agira de trouver une sous-suite possédant certaines propriétés d'"indépendance". Si la suite (f_n) est booléennement indépendante (cf. [2]), il est clair qu'elle est 1-inconditionnelle, car alors :

$$\|\Sigma\, \alpha_n\, f_n\|_{C(K)} = \sup_{F\subset\mathbb{N}} \Big|\sum_{n\in F} \alpha_n\Big| = \max\{\sum_n \alpha_n^+ , \sum_n \alpha_n^-\} .$$

Nous utiliserons ici une notion d'indépendance plus faible :

Définition : Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble S et ne prenant que les valeurs 0 et 1. On dira que la suite (f_n) est faiblement indépendante si la condition suivante est réalisée : pour tous sous-ensembles finis F et G disjoints dans $\mathbb{N}$, on a :

s'il existe $x \in F$ tel que $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in F$, il existe $y \in F$ tel que $f_n(y) = 1$ pour tout $n \in F$, et $f_n(y) = 0$ pour tout $m \in G$.

Si les (f_n) sont des fonctions continues non nulles sur un espace compact K, on peut interpréter la définition de la façon suivante. Posons pour chaque $x \in E$:

$$U(x) = \{n \in \mathbb{N} \; ; \; f_n(x) = 1\} \quad ,$$

puis :

$$\mathfrak{F} = \{U(x) \; ; \; x \in K\} \quad .$$

Alors, dire que la suite (f_n) est faiblement indépendante équivaut à dire que la famille d'ensembles $\mathfrak{F}$ est héréditaire (c'est-à-dire que $U \in \mathfrak{F}$, $V \subset U \Rightarrow V \in \mathfrak{F}$). En effet, supposons $U \in \mathfrak{F}$, $V \subset U$ avec V non vide. Posons pour chaque entier $k \geq \inf V$:

$$F_k = V \cap \{1,\ldots,k\} \; ; \; G_k = \{1,\ldots,k\} \dot{-} V \quad .$$

D'après la propriété d'indépendance faible, il existe $y_k \in K$ tel que $f_n(y_k) = 1$ pour $n \in F_k$ et $f_n(y_k) = 0$ pour $n \in G_k$. Si y est un point adhérent à la suite (y_k), on aura $U(y) = V$.

Si $V = \emptyset$, il faut raisonner un peu différemment. Pour chaque entier k, il existe y_k tel que $f_k(y_k) = 1$, et $f_n(y_k) = 0$ si $n < k$. Si y est un point adhérent à la suite (y_k), on aura $U(y) = \emptyset$.

L'intérêt de la notion d'indépendance faible réside dans le lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> : Soient K un espace compact, et (f_n) une suite de fonctions continues sur K ne prenant que les valeurs 0 et 1. Si la suite (f_n) est faiblement indépendante, elle est 1-inconditionnelle dans C(K).

<u>Démonstration</u> : Soient (α_n) une suite de scalaires dont un nombre fini seulement est non nul, et F un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Nous devons montrer que :

$$\left\| \sum_{n \in F} \alpha_n f_n \right\| \leq \left\| \sum_n \alpha_n f_n \right\| \quad .$$

Soit $y \in K$ tel que $\| \sum_{n\in F} \alpha_n f_n \| = | \sum_{n\in F} \alpha_n f_n(y) |$.

Puisque $\mathcal{F}$ est héréditaire, il existe $z \in K$ tel que $U(z) = F \cap U(y)$. Alors :

$$| \sum_{n\in F} \alpha_n f_n(y) | = | \sum_n \alpha_n f_n(z) | \leq \| \sum \alpha_n f_n \| ,$$

ce qui démontre le lemme.

Le théorème 1 bis apparaîtra alors comme une conséquence de l'énoncé plus précis suivant :

Théorème 1 ter : Soient K un espace compact, et (f_n) une suite de fonctions continues non nulles sur K, ne prenant que les valeurs 0 et 1. Si la suite (f_n) tend simplement vers zéro sur K, elle possède des sous-suites (f_{n_k}) faiblement indépendantes.

Dans une première étape de la démonstration, nous chercherons une sous-suite vérifiant l'indépendance lorsque les sous-ensembles F et G de la définition sont tels que $G < F$. L'outil sera le théorème de Galvin-Prikry, que nous rappelons maintenant. On considèrera l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, comme un sous-ensemble de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et on le munira de la topologie induite par la topologie produit. Si $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}_\infty(M)$ désignera l'ensemble des parties infinies de M. Le théorème de Galvin-Prikry s'énonce ainsi : si $\mathcal{X}$ est une partie ouverte (ou fermée) de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, il existe une partie $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ telle que :

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X}^c \quad (\text{complémentaire de } \mathcal{X}) .$$

Ce théorème est une sorte de "Ramsey infini". Il a été ensuite généralisé à $\mathcal{X}$ borélien, puis analytique.

Si F est un ensemble fini d'entiers, m un entier et A une partie de K, nous dirons que m est indépendant de F (mod A) si la condition suivante est réalisée : s'il existe $x \in A$ tel que $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in F$, il existe $y \in A$ tel que $f_n(y) = 1$ pour tout $n \in F$, et $f_m(y) = 0$.

Lemme 3 : Soit A une partie fermée de K. Si la suite (f_n) tend simplement vers zéro sur A, il existe une partie infinie M de $\mathbb{N}$ telle que $M = \{m_1, m_2, \dots\}$ et que : $\forall F \subset M$, F fini et $F > m_1$, m_1 est indépendant de F (mod A).

<u>Démonstration</u> : Définissons $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ par : $\mathcal{X} = \{M = \{m_1, m_2, \ldots\}$: il existe $k \geq 2$ tel que m_1 ne soit pas indépendant de $\{m_2, \ldots, m_k\}$ (mod A)$\}$.

Il est clair que $\mathcal{X}$ est ouvert. On peut donc trouver $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tel que $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X}$ ou $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X}^c$. Notons que si $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X}^c$, l'ensemble M vérifie l'énoncé du lemme 3 (on considère $M' \in \mathcal{P}_\infty(M)$, $M' = \{m'_1, m'_2, \ldots\}$, avec $m'_1 = m_1$ et $F = \{m'_2, \ldots, m'_k\}$ pour un certain k). Il suffit donc de montrer que l'éventualité $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X}$ est impossible. En posant $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$, on pourra déterminer dans le cas $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X}$ une suite d'entiers (k_n) telle que $k_n \geq n+1$ et que m_n n'est pas indépendant de $\{m_{n+1}, \ldots, m_{k_n}\}$ (mod A). Puisque la suite (f_n) tend vers zéro sur A, il existe un entier N tel que la relation :

$$f_{m_1}(x) = f_{m_2}(x) = \ldots = f_{m_N}(x) = 1$$

soit impossible pour $x \in A$.

Soit n le premier entier tel que $k_n \geq N$. D'après la propriété de k_n, il existe un point $x \in A$ tel que :

$$f_{m_{n+1}}(x) = \ldots = f_{k_n}(x) = 1$$

et de plus, pour tout $y \in A$ tel que :

$$f_{m_{n+1}}(y) = \ldots = f_{k_n}(y) = 1 \quad ,$$

on a aussi $$f_{m_n}(y) = 1 \quad .$$

Puisque $k_{n-1} < k_n$, on aura donc :

$$f_{m_n}(x) = \ldots = f_{m_{k_{n-1}}}(x) = 1 \quad ,$$

ce qui implique d'après la propriété de k_{n-1} que $f_{m_{n-1}}(x) = 1$, et de proche en proche, on déduit que :

$$f_{m_1}(x) = \ldots = f_{m_n}(x) = 1 \quad ,$$

d'où une contradiction qui achève la démonstration du lemme 3.

<u>Lemme 4</u> : Si (f_n) tend vers zéro sur K, on peut trouver une partie infinie $M=\{m_1,m_2,\ldots\}$ telle que : pour tout entier $j\geq 1$, et pour tout ensemble fini $F\subset M$, $F>m_j$, s'il existe x tel que :

$$f_n(x) = 1 \text{ pour tout } n\in F,$$

il existe $y\in K$ tel que :

$$f_n(y) = 1 \text{ pour tout } n\in F \quad \text{et} \quad f_{m_1}(y) = \ldots = f_{m_j}(y) = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On applique d'abord le lemme 3 avec $A=K$, pour trouver $M_1\in\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ satisfaisant la propriété du lemme 3, $M_1=\{m_1,\ldots.\}$. On pose ensuite :

$$K_2 = \{f_{m_1}=0\} \quad ,$$

et on applique à nouveau le lemme 3 avec $A=K_2$, trouvant ainsi $M_2\in\mathcal{P}_\infty(M_1)$. On procède ainsi par récurrence : si M_n a été déterminé, avec $m_n=\inf M_n$, on pose $K_{n+1}=\{f_{m_1}=f_{m_2}=\ldots=f_{m_n}=0\}$ et on applique le lemme 3 avec $A=K_{n+1}$ pour trouver $M_{n+1}\in\mathcal{P}_\infty(M_n)$.

(Remarquons qu'à chaque étape $\{f_{m_1}=f_{m_2}=\ldots=f_{m_n}=0\}$ est non vide. Cela résulte de proche en proche de ce que m_n est indépendant de $\{m_{n+1}\}$ (mod K_n).)

On construit pour finir l'ensemble "diagonal" $M=\{m_1,m_2,\ldots\}$. Soit alors $j\geq 1$ et $F\subset M$, F fini $>m_j$. Soit x tel que $f_n(x)=1$ pour tout $n\in F$. Puisque m_1 est indépendant de F (mod K), il existe x_1 tel que :

$f_n(x_1)=1$ pour tout $n\in F$, et $f_{m_1}(x_1)=0$, c'est-à-dire $x_1\in K_2$. A nouveau puisque m_2 est indépendant de F (mod K_2), il existe $x_2\in K_2$ tel que :

$f_n(x_2)=1$ pour tout $n\in F$, et $f_{m_2}(x_2)=0$, donc $x_2\in K_3$.

On continue ainsi de proche en proche jusqu'à K_j, et le lemme 4 se trouve démontré.

Avant de poursuivre, nous allons remarquer qu'il est possible de se ramener au cas où le compact K est dénombrable. A cet effet considérons l'application continue φ de K dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\varphi(x) = (f_n(x))_n \quad .$$

Pour chaque x, la suite $\varphi(x)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, car $f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0$. Le compact image $H = \varphi(K)$ est donc contenu dans l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, donc H est dénombrable. Par ailleurs, les fonctions coordonnées $\tilde{f}_n$ (définies sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ par $\tilde{f}_n((\alpha_m)_m) = \alpha_n$) définissent sur H une suite de fonctions continues qui tend vers zéro. On a en fait :

$$f_n = \tilde{f}_n \circ \varphi \quad ,$$

ce qui implique pour tout suite (α_n) :

$$\|\Sigma\, \alpha_n\, f_n\|_{C(K)} = \|\Sigma\, \alpha_n\, \tilde{f}_n\|_{C(H)} \quad .$$

On voit aussi immédiatement que l'ensemble $\mathfrak{J} = \{U(x)\ ;\ x \in K\}$ coïncide avec $\tilde{\mathfrak{J}}$, défini pour les $(\tilde{f}_n)$ sur H. (En fait, $\mathfrak{J} = \tilde{\mathfrak{J}} = H$ si on considère les éléments de H comme des parties de $\mathbb{N}$.) On peut donc ramener le problème de l'extraction d'une sous-suite faiblement indépendante des (f_n) au même problème pour les $(\tilde{f}_n)$ sur H.

A partir de maintenant, nous pourrons supposer le compact K dénombrable, et nous achèverons la démonstration par une récurrence ordinale sur le premier ordinal α tel que le dérivé $K^{(\alpha)}$ soit un ensemble fini.

Si $\alpha = 1$, le dérivé K' est un ensemble fini. Puisque $f_n \to 0$, on peut supposer, quitte à supprimer un nombre fini des (f_n), que l'on a $\{f_n = 1\} \cap K' = \emptyset$ pour tout entier n. Mais cela signifie que pour tout n, $\{f_n = 1\}$ est un ensemble fini. Il est alors clair que l'on peut construire de proche en proche une sous-suite (f_{n_k}) telle que les ensembles $\{f_{n_k} = 1\}$ soient deux à deux disjoints. Il est également clair que la sous-suite (f_{n_k}) est faiblement indépendante. (L'ensemble $\mathfrak{J} = \{U(x)\ ;\ x \in K\}$ correspondant à la sous-suite est simplement formé de $\emptyset$ et des singletons $\{k\}$. Par ailleurs on a simplement :

$$\|\sum_k \alpha_k\, f_{n_k}\|_{C(K)} = \sup |\alpha_k| \quad .)$$

Supposons donc le théorème démontré pour les ordinaux $< \alpha$, c'est-à-dire lorsque la suite (f_n) est définie sur un compact dénombrable K tel que $K^{(\alpha)} = \emptyset$.

Supposons maintenant donnés un compact dénombrable K tel que $K^{(\alpha)}$ soit un ensemble fini non vide, et une suite (f_n) de fonctions continues sur K, à valeurs 0 ou 1, tendant simplement vers zéro sur K. Comme précédemment on peut supposer que $K^{(\alpha)} \cap \{f_n = 1\}$ est vide pour tout entier n. Cela implique que pour tout n, $\{f_n = 1\}$ est un compact tel que $\{f_n = 1\}^{(\alpha)} = \emptyset$.

Commençons par sélectionner un $M_1 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ possédant la propriété du lemme 4. Posons $m_1 = \inf M_1$. Puisque $\{f_{m_1} = 1\}^{(\alpha)} = \emptyset$, on peut trouver d'après l'hypothèse de récurrence une partie infinie $M_2 \subset M_1$, $M_2 > m_1$, telle que les restrictions à $K_1 = \{f_{m_1} = 1\}$ des fonctions $(f_m)_{m \in M_2}$ forment une suite faiblement indépendante. En supposant $M_1, M_2, \dots, M_n$ définis avec $m_j = \inf M_j$, nous poserons :

$$K_n = \{f_{m_1} = f_{m_2} = \dots = f_{m_{n-1}} = 0 \ ; \ f_{m_n} = 1\} \quad .$$

Puisque $K_n^{(\alpha)} = \emptyset$, on peut trouver un sous-ensemble infini $M_{n+1} \subset M_n$, $M_{n+1} > m_n$, tel que les restrictions à K_n des fonctions $(f_m)_{m \in M_{n+1}}$ forment une suite faiblement indépendante.

Nous formons à nouveau l'ensemble "diagonal" $M = \{m_1, m_2, \dots\}$, et nous allons vérifier que la suite $(f_m)_{m \in M}$ est faiblement indépendante sur K. Notons d'abord que M satisfait la propriété du lemme 4 (simplement parce que $M \subset M_1$).

Pour montrer que l'ensemble des U(x) est héréditaire, considérons un ensemble $F \subset M$ et un $x \in K$ tel que $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in F$. Nous devons trouver un $y \in K$ tel que :

$$F = \{n \in M \ ; \ f_n(y) = 1\} \quad .$$

Tout d'abord, d'après la propriété du lemme 4, on a en posant $\inf F = m_k \in M$ ♦ :

$$\exists \ z \in K \text{ tel que } f_n(z) = 1 \text{ pour tout } n \in F \quad ,$$

et :

$$f_{m_1}(z) = f_{m_2}(z) = \dots = f_{m_{k-1}}(z) = 0 \quad ,$$

♦ Si $F = \emptyset$, on choisit $y_n \in K_n$ et on prend y adhérent à la suite (y_n).

c'est-à-dire que $z \in K_k$. D'après l'indépendance faible des $(f_n)_{n \in M_{k+1}}$ sur K_k, il existe $y \in K_k$ tel qu'en posant $F' = F \dot{-} \{m_k\}$, on ait :

$$F' = \{m \in M_{k+1} \ ; \ f_m(y) = 1\} = \{m \in M \ ; \ m > m_k, \ f_m(y) = 1\} \ .$$

Mais puisque $y \in K_k$, on a finalement :

$$\{m \in M \ ; \ f_m(y) = 1\} = F \ ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1 ter.

Nous allons maintenant passer à la démonstration du théorème 2. La situation sera la suivante : H désignera un compact dénombrable, (tel que $H^{(\omega^2)} = \emptyset$), et (f_n) une suite de fonctions continues sur H, telle que $\|f_n\| = 1$ pour tout n, et telle que f_n tende simplement vers zéro sur H. Nous commencerons par une première réduction du problème :

Lemme 5 : On peut supposer que la suite $\{|f_n| > 0\}$ est une suite d'ensembles ouverts et fermés, tendant fortement vers $\emptyset$.

Démonstration : L'ensemble des $(f_n(x))_n$, pour x variant dans H, constitue une famille dénombrable de suites numériques qui tendent vers zéro. D'après un lemme classique, on peut trouver une suite strictement croissante λ_n, telle que $\lim_n \lambda_n = +\infty$, et telle que :

$$\forall x \in H \ , \qquad \lim_n \lambda_n f_n(x) = 0 \ .$$

En extrayant une sous-suite convenable, on peut supposer que $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\lambda_n \leq \varepsilon < 1$. Le compact H étant totalement discontinu, on peut trouver pour tout n un ensemble ouvert et fermé E_n tel que :

$$\{|f_n| \geq 1/\lambda_{n-1}\} \subset E_n \subset \{|f_n| > 1/\lambda_n\} \ .$$

En posant $\tilde{f}_n = 1_{E_n} . f_n$, on aura $\|\tilde{f}_n - f_n\| \leq 1/\lambda_{n-1}$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{f}_n - f_n\| \leq \varepsilon$. On en déduit facilement que l'extraction d'une sous-suite

C-inconditionnelle des $(\tilde{f}_n)$ fournit une sous-suite $\left(C + \varepsilon \cdot \frac{C(1+C)}{1-\varepsilon C}\right)$-inconditionnelle des (f_n). Par ailleurs, $1_{E_n} \leq \lambda_n |f_n|$, donc la suite (1_{E_n}) tend simplement vers zéro (c'est-à-dire, si on préfère, que la suite (E_n) tend fortement vers $\emptyset$) et $\{|\tilde{f}_n| > 0\} \subset E_n$. Le lemme 5 est démontré.

Nous supposerons dorénavant que la réduction du lemme 5 a été faite, et nous poserons $E_n = \{|f_n| > 0\}$.

Nous commencerons par détailler la démonstration du cas le plus simple, c'est-à-dire du cas où $H^{(\omega)} = \emptyset$. Dans ce cas, nous devons extraire des sous-suites $(1+\varepsilon)$-inconditionnelles de la suite (f_n).

Lemme 6 : Soient H un compact dénombrable et (F_n) une suite d'ensembles ouverts et fermés de H telle que (1_{F_n}) tend vers zéro sur H. S'il existe un entier k tel que $\forall\ j_1 < j_2 < \dots < j_k$, $F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \dots \cap F_{j_k}$ soit non vide, le dérivé $K^{(k)}$ est non vide.

Démonstration : Raisonnons par récurrence : si $k = 1$, on a une suite (F_n) d'ouverts et fermés non vides telle que $1_{F_n} \to 0$: cela implique que l'ensemble H est infini, soit H' non vide.

Supposons le résultat démontré pour k-1, et soit (F_n) une suite possédant la propriété de l'énoncé du lemme 6. Sur le compact F_1, la famille des $(F_1 \cap F_n)_{n>1}$ vérifie la propriété de l'énoncé pour k-1. On en déduit que $F_1^{(k-1)}$ est non vide, c'est-à-dire que $F_1 \cap H^{(k-1)}$ est non vide. Bien entendu le même raisonnement montre que $F_n \cap H^{(k-1)}$ est non vide pour tout n, et cette suite d'ensembles tend fortement vers $\emptyset$ sur $H^{(k-1)}$. On en déduit que $H^{(k-1)}$ est infini, donc $H^{(k)}$ est non vide.

Lemme 7 : Soient H un compact dénombrable tel que $H^{(\omega)} = \emptyset$, et (F_n) une suite d'ensembles ouverts et fermés de H tendant fortement vers $\emptyset$. Il existe un entier k et une sous-suite (F'_n) de F_n telle que :

$$\forall\ j_1 < j_2 < \dots < j_k , \qquad F'_{j_1} \cap F'_{j_2} \cap \dots \cap F'_{j_k} = \emptyset .$$

Démonstration : Puisque $H^{(\omega)} = \emptyset$, il existe un entier k tel que $H^{(k)} = \emptyset$. Réalisons une partition de l'ensemble des k-uples d'entiers $j_1 < j_2 < \dots < j_k$

en posant :

$$A = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_k \ ; \ F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \ldots \cap F_{j_k} = \emptyset\} \quad ,$$

et en prenant pour B le complémentaire de A.
D'après le théorème combinatoire de Ramsey, il existe une partie infinie M de $\mathbb{N}$ telle que :

- ou bien tous les k-uples d'éléments de M sont dans A
- ou bien tous les k-uples d'éléments de M sont dans B.

Mais la deuxième éventualité impliquerait d'après le lemme 6 que $K^{(k)} \neq \emptyset$.
On est donc dans le premier cas, et l'ensemble M fournit la sous-suite (F'_n) voulue.

Supposons donc donnés maintenant H, avec $H^{(\omega)} = \emptyset$, et (f_n) une suite tendant simplement vers zéro telle que $E_n = \{|f_n| > 0\}$ tende fortement vers $\emptyset$.

D'après le lemme 7, on peut aussi supposer, quitte à passer à une nouvelle sous-suite, qu'il existe un entier (k+1) tel que :

$$\forall\ j_1 < j_2 < \ldots < j_{k+1} \ , \qquad E_{j_1} \cap E_{j_2} \cap \ldots \cap E_{j_{k+1}} = \emptyset \quad .$$

L'intérêt de cette réduction est de limiter (à k) le nombre des valeurs non nulles des $f_n(x)$, pour un x fixé dans H. Cela va permettre une nouvelle réduction du problème :

<u>Lemme 8</u> : Dans le cas $H^{(\omega)} = \emptyset$, on peut supposer que les (f_n) prennent leurs valeurs dans un ensemble <u>fini</u> $F \subset [-1,+1]$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varepsilon > 0$ donné. Découpons $[-1,+1]$ en intervalles disjoints de longueur $\leq \varepsilon/k$, soient $I_1,\ldots,I_m$, tels que les $f_n^{-1}(I_j)$ soient ouverts et fermés. (Il suffit pour cela que les extrémités de I_j n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable $\bigcup_n f_n(H)$.) Choisissons une valeur $y_j \in I_j$ (pour l'intervalle I_j qui contient 0, on choisira $y_j = 0$) et posons :

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_j y_j \, 1_{I_j}(f_n(x)) \quad .$$

On aura alors, pour tous scalaires (c_n) :

$$\left| \|\Sigma c_n f_n\| - \|\Sigma c_n \tilde{f}_n\| \right| \leq \varepsilon \sup |c_j| \quad .$$

En effet, pour chaque $x \in H$, il y a au plus k indices n tels que $f_n(x) \neq 0$. Pour ces indices :

$$|f_n(x) - \tilde{f}_n(x)| \leq \varepsilon/k \quad .$$

Pour les indices n tels que $f_n(x) = 0$, on a aussi $\tilde{f}_n(x) = 0$, donc finalement :

$$|\Sigma c_n(f_n(x) - \tilde{f}_n(x))| \leq \varepsilon . \sup |c_n| \quad .$$

Comme précédemment, il en résulte que l'extraction d'une sous-suite C-inconditionnelle des $(\tilde{f}_n)$ fournit une sous-suite $\left(C + \varepsilon \frac{C(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon C}\right)$-inconditionnelle des (f_n) et le lemme 8 est démontré.

Supposons donc que les (f_n) sont à valeurs dans un ensemble fini F, et posons pour tout k-uple $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$,

$$A(j_1,\ldots,j_k) = \{(f_{j_1}(x),\ldots,f_{j_k}(x)) \; ; \; x \in H\} \in \mathcal{P}(F^k) \quad .$$

La prochaine réduction consistera à se ramener à une sous-suite $(f_n)_{n\in M}$ "homogène" en ce sens que l'ensemble $A(j_1,\ldots,j_k)$ sera indépendant du k-uple $(j_1,\ldots,j_k)$ choisi <u>dans M</u>. La possibilité de cette réduction résulte immédiatement du théorème de Ramsey : en effet, on associe à chaque k-uple $j_1 < \ldots < j_k$ l'élément $A(j_1,\ldots,j_k)$ de l'ensemble <u>fini</u> $\mathcal{P}(F^k)$. On réalise donc une partition finie de l'ensemble des k-uples, et d'après le théorème de Ramsey on peut trouver une partie infinie $M \subset \mathbb{N}$ telle que $A(j_1,\ldots,j_k)$ soit constant pour **tous** les k-uples dans M.

Une suite "homogène" n'est pas directement 1-inconditionnelle, mais il est très facile de trouver une sous-suite 1-inconditionnelle, comme nous allons voir.

<u>Lemme 9</u> : Supposons que la suite (f_n) soit telle que l'ensemble $A(j_1,\ldots,j_k)$ soit indépendant du k-uple d'entiers $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Désignons par M l'en-

semble des multiples de k. Pour tout $x \in H$, et pour tout sous-ensemble fini G de M, il existe un point $y \in H$ tel que :

$$f_m(y) = f_m(x) \quad \text{pour tout } m \in G \quad ,$$

$$f_m(y) = 0 \quad \text{pour tout } m \in M \dot{-} G \quad .$$

Démonstration : Soit G fini $\subset M$ et $x \in H$. Posons :

$$L = \{m \in G \ ; \ f_m(x) \neq 0\} \quad .$$

On a $|L| \leq k$. D'après l'invariance de $A(j_1,\ldots,j_k)$ on peut trouver des points $z \in H$ tels que :

$\forall\, m \in L,$ $$f_m(z) = f_m(x) \quad .$$

Nous choisirons un z_o possédant la propriété ci-dessus tel que $\mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N};\ f_n(z) \neq 0\}$ soit maximal. Désignons par $j_1 < j_2 < \ldots < j_\ell$ les entiers j tels que $f_j(z_o) \neq 0$. On a $\ell \leq k$, et un (plus ou moins long) moment de réflexion convaincra le lecteur que l'on peut trouver $j'_1 < j'_2 < \ldots < j'_\ell$ tels que :

a) $\quad j_i \in L \Longrightarrow j'_i = j_i$

b) $\quad j_i \notin L \Longrightarrow j'_i \notin M \quad .$

(Il s'agit simplement de déplacer en dehors de M les j_i qui sont dans $M \dot{-} L$. La possibilité de cette opération résulte du fait que l'on a laissé suffisamment de place en dehors de M.)

Par l'invariance de $A(j_1,\ldots,j_k)$, on peut trouver un point $y \in H$ tel que :

$$f_{j'_i}(y) = f_{j_i}(z_o) \quad , \quad i = 1,\ldots,\ell \quad .$$

D'après a), on a aussi :

$$f_m(y) = f_m(x) \quad \text{pour tout } m \in L \quad .$$

D'après le caractère maximal de l'entier ℓ, on a :

$$\{j'_1,\dots,j'_\ell\} = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n(y) \neq 0\} \quad .$$

D'après la propriété b), cela implique :

$$f_m(y) = 0 \quad \text{pour tout } m \in M \dot{-} L \quad ,$$

ce qui démontre le lemme 9.

Bien entendu le lemme 9 implique que la sous-suite $(f_m)_{m\in M}$ est 1-inconditionnelle, par un raisonnement identique à celui du lemme 2.

Nous avons donc démontré le théorème 2 pour les compacts H tels que $H^{(\omega)} = \emptyset$. Si on tient compte des réductions successives, on peut dégager l'énoncé plus précis suivant, qui nous servira dans la suite de la démonstration :

<u>Proposition 1</u> : Soient H un compact tel que $H^{(\omega)} = \emptyset$, et (f_n) une suite de fonctions continues sur H, tendant simplement vers zéro sur H, et telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble infini $M \subset \mathbb{N}$ possédant la propriété suivante :

pour tout sous-ensemble infini $M_o \subset M$, pour tout $x \in H$ et tout ensemble fini $F \subset M_o$, il existe un point $y \in H$ tel que :

$$\forall\ (c_m) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \qquad \left| \sum_{m\in M_o} c_m f_m(y) - \sum_{m\in F} c_m f_m(x) \right| \leq \varepsilon \sup_m |c_m| \quad .$$

(L'intérêt de considérer $M_o \subset M$ apparaître dans la récurrence qui va suivre. Il est clair que dans le lemme 9, tout sous-ensemble infini M_o de M convient encore, ce qui permet d'énoncer la proposition 1 comme nous l'avons fait.)

Le théorème 2 sera démontré comme une conséquence de l'énoncé suivant :

<u>Proposition 2</u> : Soient k un entier ≥ 1, H un compact tel que $H^{(\omega.k)} = \emptyset$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur H, tendant simplement vers zéro sur H, et telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble infini $M \subset \mathbb{N}$ possédant la propriété suivante : pour tout sous-ensem-

ble infini M_o de M, pour tout $x \in H$ et pour tout ensemble fini $F \subseteq M_o$, il existe des points $y_1, y_2, \ldots, y_k \in H$, tels qu'en posant $g(y) = \sum_{m \in M_o} c_m f_m(y)$ pour $(c_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, on ait :

$$\Big| \sum_{m \in F} c_m f_m(x) - g(y_1) + g(y_2) - g(y_3) + \ldots + (-1)^k g(y_k) \Big| \leq \varepsilon . \sup |c_n| \quad .$$

(Il est clair que la proposition 2 implique le théorème 2, car elle implique $\| \sum_{m \in F} c_m f_m \| \leq k \| \sum_{m \in M} c_m f_m \| + \varepsilon \sup |c_n|$ d'où l'on déduit facilement que la sous-suite $(f_m)_{m \in M}$ est $(k/(1-\varepsilon))$-inconditionnelle.)

Nous allons démontrer la proposition 2 par récurrence, le cas $k = 1$ étant donné par la proposition 1.

Soit donc $k \geq 2$, et supposons la proposition 2 démontrée pour tout entier $j \leq k-1$. Soient H tel que $H^{(\omega.k)} = \emptyset$, et (f_n) une suite tendant simplement vers zéro sur H, telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n. Comme on l'a vu, on peut supposer que $E_n = \{|f_n| > 0\}$ est une suite d'ensembles ouverts et fermés tendant fortement vers $\emptyset$. Considérons le compact $K = H^{(\omega.(k-1))}$. Il vérifie $K^{(\omega)} = \emptyset$, par conséquent on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) d'après le lemme 7 qu'il existe un entier j tel que pour tout j-uple d'entiers $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$:

$$K \cap E_{n_1} \cap \ldots \cap E_{n_j} = \emptyset \quad .$$

Cela signifie que le compact $L = E_{n_1} \cap \ldots \cap E_{n_j}$ vérifie $L^{(\omega.(k-1))} = \emptyset$, ce qui nous permettra de lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Remarquons encore que s'il existait $M \subset \mathbb{N}$ infini tel que $E_{n_1} \cap \ldots \cap E_{n_j} = \emptyset$ pour tout j-uple $n_1 < \ldots < n_j$ d'éléments de M, on se ramènerait pour la sous-suite $(f_m)_{m \in M}$ au cas de la proposition 1, déjà connu.

D'après le théorème de Ramsey, on peut donc supposer (quitte à extraire une nouvelle sous-suite) que pour tout j-uple $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$:

$$E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \ldots \cap E_{n_j} \neq \emptyset \quad .$$

Considérons le compact $L = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_j$. On peut trouver une partition finie de L en ensembles ouverts et fermés $L(\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, N$, tels que pour chaque α et pour tout $i = 1, 2, \ldots j$, l'oscillation de f_i sur $L(\alpha)$

soit $\leq \varepsilon/jk$. Puisque $L(\alpha) \subseteq L$, on a encore $L(\alpha)^{(\omega.(k-1))} = \emptyset$, et par conséquent on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux fonctions $(f_n)_{n>j}$, <u>restreintes à $L(\alpha)$</u>. On peut ainsi trouver un ensemble infini $M_1 \subset \mathbb{N}$, $M_1 > j$, tel que la propriété de la proposition 2 soit satisfaite à l'ordre k-1 pour les $(f_m)_{m\in M_1}$ sur $L(\alpha)$, pour $\alpha = 1,\ldots,N$. On peut aussi supposer, quitte à prendre une nouvelle sous-suite, qu'il existe pour chaque $\alpha = 1,\ldots,N$ un point x_α de $L(\alpha)$ tel que :

$$\sum_{m\in M_1} |f_m(x_\alpha)| \leq \varepsilon \quad .$$

On détermine ensuite par récurrence une suite décroissante $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n$ ... de la façon suivante : supposons M_n déterminé. On considère pour chaque j-uple $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$ contenu dans $\{1,2,\ldots,j+n\}$ le compact (ouvert)

$$E(n_1,\ldots,n_j) =$$

$$= \{x \in H \,;\, f_i(x) = 0 \;\forall\, i \notin \{n_1,\ldots,n_j\}, i \leq j+n\} \cap E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \ldots \cap E_{n_j} \quad .$$

Comme précédemment on réalise une partition finie de $E(n_1,\ldots,n_j)$ en ensembles $L(\alpha,n_1,\ldots,n_j)$ ouverts et fermés tels que l'oscillation de chaque f_{n_i} sur $L(\alpha,n_1,\ldots,n_j)$ soit $\leq \varepsilon/jk$.

On choisit ensuite grâce à l'hypothèse de récurrence un ensemble $M_{n+1} \subset M_n$ infini tel que $M_{n+1} > n+j$ et que les fonctions $(f_m)_{m\in M_{n+1}}$ satisfassent la proposition 2 à l'ordre k-1 sur chaque ensemble $L(\alpha,n_1,\ldots,n_j)$. On supposera aussi que pour chaque α existe un point x_α de $L(\alpha,x_1,\ldots,n_j)$ tel que :

$$\sum_{m\in M_{n+1}} |f_m(x_\alpha)| \leq \varepsilon \quad .$$

Pour finir on construit l'ensemble "diagonal" $M' = \{m_1,m_2,\ldots,m_n,\ldots\}$ où $m_n = \inf M_n$.

Pour chaque $x \in H$ désignons par $n(x)$ le j-ième entier n tel que $f_n(x) \neq 0$, et posons :

$$H_o = \{x \in H \,;\, \sum_{\substack{m\in M' \\ m>n(x)}} |f_m(x)| \leq \varepsilon\} \quad .$$

Définissons d'autre part une suite de fonctions $(h_m)_{m\in M'}$ par :

$$h_m(x) = \begin{cases} f_m(x) & \text{si } m \leq n(x) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si x est un point du compact H_o, on a :

$$\sum_{m\in M'} |f_m(x) - h_m(x)| \leq \varepsilon \quad .$$

Par ailleurs, pour chaque point $x \in H_o$, il y a au plus j indices $m \in M'$ tels que $h_m(x) \neq 0$. Il est alors clair que l'on peut appliquer la proposition 1 aux fonctions $(h_m)_{m\in M'}$, restreintes à H_o : il existe un ensemble infini $M \subseteq M'$ tel que pour tout sous-ensemble infini $M_o \subset M$, pour tout $x \in H_o$ et tout ensemble fini $F \subset M_o$, il existe $y \in H_o$ tel que :

$$\forall\ (c_m) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \qquad \left| \sum_{m\in F} c_m h_m(x) - \sum_{m\in M_o} c_m h_m(y) \right| \leq \varepsilon \sup|c_m| \quad .$$

Nous allons montrer que ce dernier ensemble M convient pour démontrer la proposition 2. Soient donc M_o un sous-ensemble infini de M, $x \in H$ et F un ensemble fini, $F \subset M_o$. Nous pouvons supposer que $f_m(x) \neq 0$ pour tout $m \in F$. Désignons par $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$ les j premiers entiers n tels que $f_n(x) \neq 0$. Le point x appartient donc à un certain ensemble $L(\alpha, n_1, \ldots, n_j)$. Nous poserons $F_1 = F \cap \{n_1, \ldots, n_j\}$, $F_2 = F \dot{-} F_1$

$$G = M_o \cap \{n_1, \ldots, n_j\} \quad .$$

D'après la construction de l'ensemble M', il existe des points $y_1, \ldots, y_{k-1} \in L(\alpha, n_1, \ldots, n_j)$ tels qu'en posant $g_2(y) = \sum_{\substack{m\in M_o \\ m>n_j}} c_m f_m(y)$ on ait :

$$\forall\ (c_m) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \qquad \left| \sum_{m\in F_2} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_2(y_i) \right| \leq \varepsilon \sup|c_m| \quad .$$

Il faut noter que d'après la propriété d'oscillation des f_{n_i} sur $L(\alpha, n_1, \ldots, n_j)$, on a, en posant $g_1(y) = \sum_{\substack{m\in M_o \\ m\leq n_j}} c_m f_m(y) = \sum_{m\in G} c_m f_m(y)$, pour k impair :

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i)\right| \leq \varepsilon \sup|c_m|$$

et pour k pair :

$$\left|\sum_{m\in G} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i)\right| \leq \varepsilon \sup|c_m| \quad .$$

Il existe par hypothèse un point $x_\alpha \in L(\alpha, n_1, \ldots, n_j)$ tel que $\sum_{\substack{m\in M' \\ m\geq n_j}} |f_m(x_\alpha)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que $x_\alpha \in H_o$. D'après la propriété de l'ensemble M, on peut trouver un point $z \in H_o$ tel que :

pour k impair :

$$\left|\sum_{m\in F_1} c_m h_m(x_\alpha) - \sum_{m\in M_o} c_m h_m(z)\right| \leq \varepsilon \sup|c_m|$$

pour k pair :

$$\left|\sum_{m\in G\dot{-}F_1} c_m h_m(x_\alpha) - \sum_{m\in M_o} c_m h_m(z)\right| \leq \varepsilon \sup|c_m| \quad .$$

En rappelant que $\sum_{m\in M_o} |f_m(u) - h_m(u)| \leq \varepsilon$ pour $u \in H_o$, et en utilisant à nouveau les conditions sur l'oscillation, on en déduit :

pour k impair :

$$\left|\sum_{m\in F_1} c_m f_m(x) - \sum_{m\in M_o} c_m f_m(z)\right| \leq 3\varepsilon \sup|c_m|$$

pour k pair :

$$\left|\sum_{m\in G\dot{-}F_1} c_m f_m(x) - \sum_{m\in M_o} c_m f_m(z)\right| \leq 3\varepsilon \sup|c_m| \quad .$$

Posons $g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \sum_{m\in M_o} c_m f_m(y)$. On déduit de ce qui précède :

pour k impair :

$$\left|\sum_{m\in F} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g(y_i) - g(z)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{m\in F_2} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_2(y_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i)\right|$$

$$+ \left|\sum_{m\in F_1} c_m f_m(x) - g(z)\right| \leq 5\varepsilon \sup|c_m|$$

pour k pair :

$$\left|\sum_{m\in F} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g(y_i) + g(z)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{m\in F_2} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_2(y_i)\right|$$

$$+\left|\sum_{m\in G} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i)\right| + \left|\sum_{m\in G\dot{-}F_1} c_m f_m(x) - g(z)\right|$$

$$\leq 5\varepsilon \sup|c_m| \quad ,$$

ce qui achève la démonstration !!

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Maurey and H.P. Rosenthal, Normalized weakly null sequences with no unconditional subsequence, (à paraître dans Studia Math.).

[2] H.P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ^1, Proc. Nat. Acad. Sc. USA 71 (1974) p. 2411-2413.
