Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

La propriété de Radon-Nikodym dans un dual, d'après C. Stegall

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 9, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM DANS UN DUAL
D'APRES C. STEGALL

par B. MAUREY

Exposé n° IX

15 Janvier 1975

Nous allons démontrer dans cet exposé le théorème suivant dû à C. Stegall [2] :

THEOREME 1 : Soit E un espace de Banach séparable . L'espace dual E' possède la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si il est séparable.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons la caractérisation donnée par L. Schwartz dans l'exposé V-VI, théorème 5.5 : pour qu'un dual E' vérifie R.N.P., il faut et il suffit que toute probabilité de Radon sur $\sigma(E',E)$ provienne d'une probabilité de Radon sur E'.

Nous commencerons par décrire un exemple qui se révèlera fondamental, et qui nous guidera pour la démonstration. Soit K un espace métrique compact, et posons E = C(K). Dans le dual E', qui est l'espace des mesures de Radon sur K, considérons l'ensemble des mesures de Dirac :

$$H = \{\delta_x \ ; \ x \in K\}.$$

Il est bien connu que $\varphi : x \to \delta_x$ réalise un homéomorphisme de K sur H, lorsqu'on munit H de la topologie $\sigma(E',E)$. Par ailleurs, on voit que :

$$\forall x,y \in K, \quad x \neq y \Longrightarrow \|\delta_x - \delta_y\| \geqslant 2.$$

On a donc un ensemble H, qui est compact pour $\sigma(E',E)$, mais dont tous les points sont "éparpillés" pour la norme. Supposons qu'il existe une probabilité de Radon diffuse λ sur K. Dans ce cas, on voit que E' ne vérifie pas R.N.P. En effet, l'image $\mu = \varphi(\lambda)$ est une probabilité de Radon diffuse sur H pour $\sigma(E',E)$. Si μ provenait d'une probabilité de Radon ν sur E', on devrait avoir $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout A compact de E' (i.e. compact pour la norme). Or, il est clair que si A est compact dans E', $A \cap H$ est un ensemble fini, donc $\mu(A) = 0$ puisque μ est diffuse. Cela implique $\nu = 0$, donc μ ne provient pas d'une probabilité de Radon sur E'.

La démonstration du théorème 1 va suivre exactement la même idée : si E est séparable et si E' n'est pas séparable, on va construire un ensemble de E' compact pour $\sigma(E',E)$, mais "éparpillé" pour la norme, et une probabilité de Radon diffuse sur ce compact, muni de la topologie $\sigma(E',E)$.

Nous emploierons des raisonnements de récurrence ordinale. On désignera par Ω le premier ordinal non dénombrable. Le premier lemme est bien connu :

LEMME 1 : Soit X un espace métrique compact. Toute famille croissante $(\omega_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ d'ouverts de X est stationnaire, c'est-à-dire :

$$\exists \gamma < \Omega \text{ t.q } \quad \forall \delta \geqslant \gamma, \quad \omega_\gamma = \omega_\delta .$$

Démonstration : Soit (U_n) une base dénombrable pour la topologie de X. Posons :

$$A = \{\alpha \ ; \ \omega_\alpha \neq \omega_{\alpha+1}\}, \quad \text{et pour } \alpha \in A :$$

$$N_\alpha = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ U_n \subset \omega_{\alpha+1} \quad \text{et} \quad U_n \not\subset \omega_\alpha\} .$$

L'ensemble N_α est non vide puisque $\alpha \in A$. On constate immédiatement que les ensembles N_α, $\alpha \in A$, forment une famille de parties non vides, deux à deux disjointes dans $\mathbb{N}$: l'ensemble A est donc dénombrable. On peut donc trouver un ordinal dénombrable γ qui soit un majorant de A. Il est clair que γ vérifie la propriété demandée.

PROPOSITION 1 : Soit E un espace de Banach séparable. Si le dual E' n'est pas séparable, il existe $\varepsilon > 0$ et un ensemble non vide Y de E', compact pour $\sigma(E',E)$, et tel que pour tout ω ouvert pour $\sigma(E',E)$:

$$\omega \cap Y \text{ non vide } \Longrightarrow d(\omega \cap Y) > \varepsilon,$$

où d(A) désigne le diamètre d'une partie $A \subset E'$.

Démonstration : Si E' n'est pas séparable, la boule unité B' n'est pas séparable non plus. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que B' ne soit pas réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de diamètre $\leqslant \varepsilon$. (Sinon pour tout n, $B' = \bigcup_m A_{m,n}$ avec $d(A_{m,n}) \leqslant \frac{1}{n}$. Si on choisit $x_{m,n} \in A_{m,n}$, la suite double $(x_{m,n})$ est dense dans B').

Construisons par récurrence ordinale une famille décroissante $(F_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ de parties de B' compactes pour $\sigma(E',E)$ de la façon suivante : $F_o = B'$, et si les $(F_\beta)_{\beta<\alpha}$ sont déterminés, on pose :

- $F_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$ si α est un ordinal limite.

- Supposons que $\alpha = \beta + 1$, et supposons qu'il existe un ouvert ω_β pour $\sigma(E',E)$, tel que $d(F_\beta \cap \omega_\beta) \leqslant \varepsilon$, avec $\omega_\beta \cap F_\beta$ non vide. On pose alors :

$$F_\alpha = F_\beta \setminus \omega_\beta = F_\beta \setminus (\omega_\beta \cap F_\beta).$$

- Si $\alpha = \beta + 1$ et si paur tout ω ouvert pour $\sigma(E',E)$, $\omega \cap F_\beta$ non vide $\Longrightarrow$ $d(\omega \cap F_\beta) > \varepsilon$, on pose :

$$F_\alpha = F_\beta .$$

D'après le lemme 1 la suite $(F_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ est stationnaire. Il existe donc $\gamma < \Omega$ tel que $F_\gamma = F_{\gamma+1}$. Par ailleurs, notons que le complémentaire de F_γ dans B' est égal à $\bigcup_{\beta < \gamma} (\omega_\beta \cap F_\beta)$, c'est-à-dire est une réunion dénombrable d'ensembles de diamètre $\leqslant \varepsilon$. D'après le choix de ε, cet ensemble ne peut être égal à B', donc F_γ est non vide.

Finalement, $F_\gamma = F_{\gamma+1}$ signifie que pour tout ω ouvert pour $\sigma(E',E)$, on a :

$$\omega \cap F_\gamma \text{ non vide } \Longrightarrow d(\omega \cap F_\gamma) > \varepsilon,$$

et on peut donc poser $Y = F_\gamma$.

<u>PROPOSITION 2</u> : Soit Δ l'espace métrique compact $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ (Δ est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor). Soit E un espace de Banach séparable. Si E' est non séparable, il existe $\varepsilon > 0$ et une partie Z de E' qui, munie de la topologie $\sigma(E',E)$, est homéomorphe à Δ, et telle que :

$$\forall\ x,y \in Z, \quad x \neq y \Longrightarrow \|x - y\| \geqslant \varepsilon.$$

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 1, on peut déjà trouver un $\varepsilon > 0$ et un ensemble Y non vide, compact pour $\sigma(E',E)$ tel que pour tout ω ouvert pour $\sigma(E',E)$:

$$\omega \cap Y \text{ non vide } \Longrightarrow d(\omega \cap Y) > \varepsilon.$$

Puisque E est séparable, Y est un compact métrisable pour $\sigma(E',E)$. Soit δ une distance définissant la topologie $\sigma(E',E)$ sur Y, et désignons par $\delta(A)$ le diamètre d'une partie A par rapport à δ. Nous poserons aussi :

$$e(A,B) = \inf \{\|a - b\| \;;\quad a \in A,\ b \in B\} .$$

Nous allons construire par récurrence une famille d'ensembles $(V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n})$ ouverts pour $\sigma(E',E)$ $n = 1,2,\dots$, $\epsilon_i = \pm 1$, vérifiant les propriétés suivantes (les adhérences qui figurent ci-dessous sont au sens de $\sigma(E',E)$.)

1) $$\overline{V}_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n,\epsilon_{n+1}} \subset V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}$$

2) $$e(Y \cap \overline{V}_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n,1}\ ,\ Y \cap \overline{V}_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n,-1}) \geqslant \epsilon$$

3) $$Y \cap V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}} \quad \text{est non vide}$$

4) $$\delta(Y \cap \overline{V}_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n+1}}) \leqslant 2^{-n} .$$

Pour $n = 0$, posons $V_o = E'$. Supposons que les $(V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_k})$ soient déjà définis pour $k \leqslant n$. Soit $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)$ donné. D'après 3), $Y \cap V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}$ est non vide, donc d'après la propriété de Y :

$$d(Y \cap V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}) > \epsilon .$$

On peut donc trouver $x, y \in Y \cap V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}$, tels que $\|x - y\| > \epsilon$.

On peut trouver un vecteur $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$, et $\langle u, x-y \rangle = \alpha > \epsilon$.

Posons :

$$U_1 = \{z \in E' \ ;\ |\langle u, z-x \rangle| < \frac{\alpha - \epsilon}{2}\} ,$$

$$U_{-1} = \{z \in E' \ ;\ |\langle u, z-y \rangle| < \frac{\alpha - \epsilon}{2}\} .$$

Soient $z \in \overline{U}_1$ et $z' \in \overline{U}_{-1}$. On a :

$$|\langle z-z', u \rangle| \geqslant \epsilon, \quad \text{donc :}$$

$$e(\overline{U}_1, \overline{U}_{-1}) \geqslant \epsilon .$$

Soient W_1 et W_{-1} deux ouverts pour $\sigma(E',E)$ tels que $x \in W_1$, $y \in W_{-1}$ et :

$$\overline{W}_1 \subset V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n},\ \overline{W}_{-1} \subset V_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n} ,$$

$$\delta(Y \cap \overline{W}_1) \leqslant 2^{-n}, \qquad \delta(Y \cap \overline{W}_{-1}) \leqslant 2^{-n} .$$

Posons finalement :

$$V_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1} = U_1 \cap W_1 \cap V_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$$

$$V_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\,-1} = U_{-1} \cap W_{-1} \cap V_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} .$$

On voit finalement que $V_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1}$ et $V_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\,-1}$ vérifient les propriétés 1), 2), 3) et 4) et on a donc démontré la possibilité de la récurrence.

Soit maintenant $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n,\ldots) \in \Delta$. Posons

$$F_\eta = \bigcap_n \,(Y \cap \overline{V}_{\eta_1,\ldots,\eta_n}).$$

L'ensemble F_η est non vide (par compacité), et est en fait réduit à un point d'après 4). Posons $F_\eta = \{x_\eta\}$. Nous allons montrer que l'application $\varphi : \eta \to x_\eta$ est un homéomorphisme de Δ sur $\varphi(\Delta) \subset Y$, lorsqu'on munit $\varphi(\Delta)$ de la topologie $\sigma(E',E)$. Tout d'abord, l'application φ est injective. Soit $\eta \neq \eta'$, et soit n le premier entier tel que $\eta_n \neq \eta'_n$. D'après 2), les ensembles $Y \cap \overline{V}_{\eta_1,\ldots,\eta_n}$ et $Y \cap \overline{V}_{\eta'_1,\ldots,\eta'_n}$ sont disjoints, donc $x_\eta \neq x_{\eta'}$. Plus précisément, puisque $e(Y \cap \overline{V}_{\eta_1,\ldots,\eta_n,1},\ Y \cap \overline{V}_{\eta_1,\ldots,\eta_n,\,-1}) \geqslant \varepsilon$, on voit que :

$$\eta \neq \eta' \Longrightarrow \|x_\eta - x_{\eta'}\| \geqslant \varepsilon,$$

soit encore, en posant $Z = \varphi(\Delta)$:

$$\forall x,y \in Z, \quad x \neq y \Longrightarrow \|x - y\| \geqslant \varepsilon.$$

Pour montrer que φ est continue, il suffit de voir (puisque Δ et Y sont compacts métrisables) que si (η^k) converge vers η dans Δ, et si x_{η^k} converge vers y dans Y, on a $y = x_\eta$.

Soit n un entier. Pour tout j, la j-ième composante η_j^k converge vers η_j quand $k \to \infty$. On aura pour k assez grand, $k \geqslant k_n$:

$$\eta_j^k = \eta_j , \quad j = 1,\ldots,n.$$

On en déduit pour $k \geqslant k_n$:

$$x_{\eta^k} \in Y \cap \overline{V}_{\eta_1,\ldots,\eta_n} ,$$

donc à la limite $y \in Y \cap \overline{V}_{\eta_1,\ldots,\eta_n}$.

Cela étant vrai pour tout n, on en déduit bien que $y = x_\eta$, ce qui montre que $Z = \varphi(\Delta)$ muni de la topologie $\sigma(E',E)$ est homéomorphe à Δ. La proposition 2 est démontrée.

La démonstration du théorème 1 est maintenant immédiate : supposons que E soit séparable, E' non séparable et soit Z une partie de E' possédant les propriétés énoncées dans la proposition 2. On sait qu'il existe sur Δ une probabilité de Radon diffuse λ (par exemple la probabilité de pile ou face, $\lambda = \bigotimes^{\infty} \{1/2\ \delta_1 + 1/2\ \delta_{-1}\}$). On en déduit une probabilité de Radon μ pour $\sigma(E',E)$, diffuse et portée par Z. Cette probabilité ne peut pas provenir d'une probabilité de Radon ν sur E' (puisque Z est "éparpillé" pour la norme : voir la discussion préliminaire après l'énoncé du théorème 1), et par conséquent le dual E' ne vérifie pas R.N.P. Pour l'implication inverse dans le théorème 1, rappelons (cf. exposé 4) qu'un dual séparable vérifie toujours R.N.P.

Dans le cas d'un espace de Banach E quelconque, Stegall a énoncé le théorème suivant :

<u>THEOREME 2</u> : Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le dual E' vérifie R.N.P.,

2) Pour tout sous-espace séparable G de E, le dual G' est séparable,

3) Tout sous-espace séparable F de E' se plonge dans un dual séparable.

<u>Démonstration</u> : Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2). Soient G un sous-espace séparable de E, et π la surjection canonique de E' sur G'. Nous allons montrer que G'

vérifie R.N.P. Soit donc μ une probabilité de Radon sur $\sigma(G',G)$. Remarquons que G' est réunion d'une suite d'images par π de compacts de $\sigma(E',E)$ (tout simplement $G' = \bigcup_n \pi(B_n)$, où B_n est la boule de rayon n dans E'). D'après [1], exposé 1, proposition 1.2.2, il existe une probabilité de Radon $\tilde{\mu}$ sur $\sigma(E',E)$ telle que $\mu = \pi(\tilde{\mu})$. Puisque E' vérifie R.N.P., la probabilité $\tilde{\mu}$ provient d'une probabilité de Radon $\tilde{\nu}$ sur E'. L'image $\nu = \pi(\tilde{\nu})$ est alors de Radon sur G', et on constate facilement que μ provient de ν. On a donc montré que G' vérifie R.N.P., donc G' est séparable d'après le théorème 1.

L'implication 2) $\Longrightarrow$ 3) résulte immédiatement du lemme suivant :

<u>LEMME 2</u> : Soit E un espace de Banach. Tout sous-espace séparable F de E' se plonge isométriquement dans le dual G' d'un sous-espace séparable G de E.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit F un sous-espace séparable de E', et soit (ξ_n) une suite dense dans F (pour la norme). Pour tout n et tout m, soit $x_{n,m}$ un vecteur de E tel que $\|x_{n,m}\| \leqslant 1$, et :

$$|< x_{n,m} , \xi_n >| \geqslant (1 - \frac{1}{m}) \|\xi_n\| .$$

Désignons par G le sous-espace fermé de E engendré par la suite double $(x_{n,m})$, et par π la projection canonique de E' sur G'. Nous allons voir que la restriction de π à F est une isométrie de F dans G'. Pour cela il suffit de montrer que l'on a : $\|\pi(\xi_n)\| = \|\xi_n\|$ pour tout n, ce qui est clair puisque :

$$\|\xi_n\| \geqslant \|\pi(\xi_n)\| = \sup \{ |< x,\xi_n >| \; ; \quad x \in G, \quad \|x\| \leqslant 1 \}$$

$$\geqslant \sup_m |< x_{n,m}, \xi_n >| = \|\xi_n\|,$$

ce qui démontre le lemme.

Pour achever la démonstration du théorème 2, il reste à voir que 3) $\Longrightarrow$ 1). Si 3) est réalisée, tout sous-espace séparable F de E' vérifie R.N.P., donc E' vérifie R.N.P. (cf. exposé V-VI, corollaire 7.6).

BILIOGRAPHIE

[1] Séminaire L. Schwartz 1969-70.

[2] C. Stegall : The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, (à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.