

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. STERN

Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 8, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A7_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROPRIÉTÉS LOCALES ET ULTRAPUISSANCES D'ESPACES DE BANACH

(suite et fin)

par J. STERN

Exposé N^o VIII

8 Janvier 1975

Dans cet exposé, on se propose d'étudier les rapports entre les notions d'ultrapuissance et de u -extension (définies dans l'exposé précédent) et certaines opérations intervenant naturellement dans la géométrie des espaces de Banach, le passage au dual et le passage d'un espace E à un sous-espace complémenté de E .

1. SUPER-REFLEXIVITE ET DUALITE DES ULTRAPUISSANCES.

Soit E un espace de Banach ; $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I ; il existe un plongement isométrique $j : E^I/\mathcal{U} \rightarrow (E^I/\mathcal{U})'$ où $j((f_i)_{i \in I})$ est l'élément de $(E^I/\mathcal{U})'$ défini par $(x_i)_{i \in I} \mapsto \lim f_i(x_i)$. On identifiera $E^I/\mathcal{U}$ et $j(E^I/\mathcal{U})$; on peut se demander quand $E^I/\mathcal{U} = (E^I/\mathcal{U})'$. Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 1 : Soit E un espace de Banach ; les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) E est super-réflexif.
- (ii) Pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble I quelconque, $(E^I/\mathcal{U})' = (E^I/\mathcal{U})$.
- (iii) Il existe un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ tel que $(E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})' = (E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})$.

On rappelle (cf. [1]) que E est dit super-réflexif si tout espace finiment représentable dans E est réflexif. D'après la proposition 1 de l'exposé précédent, E est super-réflexif si et seulement si toute ultrapuissance de E est réflexive.

Preuve du théorème : 1) $\rightarrow$ ii) : Si $E^I/\mathcal{U} \subsetneq (E^I/\mathcal{U})'$, alors, il existe une forme linéaire φ sur $(E^I/\mathcal{U})'$ qui est nulle sur $E^I/\mathcal{U}$ et de norme 1. Puisque $E^I/\mathcal{U}$ est réflexif, il existe un élément x de $E^I/\mathcal{U}$ tel que si $f \in (E^I/\mathcal{U})'$, $\varphi(f) = f(x)$. Soit $(x_i)_{i \in I}$ un représentant de x . Pour chaque i , on choisit une forme linéaire f_i de E' , telle que $\|f_i\| = 1$ et $f_i(x_i) = \|x_i\|$. Soit f l'élément de $E^I/\mathcal{U}$ défini par $(f_i)_{i \in I}$; on a :

$$0 = \varphi(f) = f(x) = \lim_{\mathcal{U}} f_i(x_i) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 1$$

contradiction.

ii) $\rightarrow$ iii) est clair.

iii) $\rightarrow$ i) : On introduit d'abord la propriété (P)

suivante

(P) : il existe θ , $0 < \theta < 1$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$, $\exists z_1 \in E \dots \exists z_n \in E$,
 $\exists g_1 \in E' \dots \exists g_n \in E'$ tels que $\|z_1\| \leq 1 + \varepsilon, \dots, \|z_n\| \leq 1 + \varepsilon$
 $\|g_1\| \leq 1 + \varepsilon, \dots, \|g_n\| \leq 1 + \varepsilon$.

et

$$\begin{aligned} g_j(z_i) &= \theta \quad \text{si } j \leq i \\ g_j(z_i) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

La démonstration se décompose alors en deux lemmes.

Lemme 2 : Si un espace de Banach E a la propriété (P), alors pour tout ultrafiltre non trivial $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$, $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \neq (E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})'$.

Lemme 3 : Si E n'est pas super-réflexif, E a la propriété (P).

Preuve du lemme 2 : Pour chaque entier n, on considère les éléments $z_1^n, \dots, z_n^n$; $g_1^n, \dots, g_n^n$ donnés par la propriété (P) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

On désigne par $[1, n]$ l'ensemble des entiers m, $1 \leq m \leq n$; on note $\mathbb{N}^*$ le quotient du produit $\prod_n [1, n]$ par la relation d'équivalence

$\delta \sim \delta'$ si $\{n : \delta(n) = \delta'(n)\} \in \mathcal{U}$.

$\mathbb{N}^*$ est totalement ordonné par la relation $\delta \leq \delta'$ si $\{n : \delta(n) \leq \delta'(n)\} \in \mathcal{U}$.

On notera $\bar{n}$ un élément de $\mathbb{N}^*$ défini par une fonction δ presque partout égale à n. A tout élément δ de $\mathbb{N}^*$, on peut associer un élément z_δ de $E^{\mathbb{I}}/\mathcal{U}$ en posant $z_\delta = (z_{\delta(n)}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Il résulte des conventions : $z_{\bar{m}} = (z_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$)

De même, on définit g_δ , élément de $E'^{\mathbb{I}}/\mathcal{U}$.

La famille des sous-ensembles X_δ de $\mathbb{N}^*$ définis par $X_\delta = \{\delta' : \delta' \leq \delta, \delta' \neq \bar{1}, \dots, \delta' \neq \bar{n}, \dots\}$, a la propriété de l'intersection finie; soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}^*$ qui étend cette famille. On va voir que la forme linéaire g de $(E^{\mathbb{I}}/\mathcal{U})'$

$$g(x) = \lim_{\mathcal{F}} g_\delta(x)$$

n'est pas un élément de $E'^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$.

On a $\|g_\delta\| \leq 1$ pour $\delta \neq \bar{m}$, $m \in \mathbb{N}$ et, donc, $\|g\| \leq 1$, en effet, puisque $\{n : \delta(n) > m\} \in \mathcal{U}$, $\{n : \|g_{\delta(n)}^n\| \leq 1 + \frac{1}{m}\} \in \mathcal{U}$.

. $g(z_\delta) = \theta$ pour $\delta \neq \bar{m}$, $m \in \mathbb{N}$; en effet, pour $\delta' \in X_\delta$, $g_{\delta'}(z_\delta) = \theta$.

. $g(z_{\bar{n}}) = 0$, en effet, pour $\delta \neq \bar{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $g_\delta(z_{\bar{n}}) = 0$.

Dans le but de trouver une contradiction, on suppose que $g \in E' / \mathcal{U}$,
soit $g = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $\lim_{\mathcal{U}} h_n(z_m^n) = 0$ (pour m fixé), donc si $X_m = \{n : |h_n(z_m^n)| \leq \frac{\theta}{2}\}$,
alors $X_m \in \mathcal{U}$.

On pose $Y_m = X_1 \cap \dots \cap X_m - [1, m]$; alors X_m est une suite décroissante
d'éléments de $\mathcal{U}$ d'intersection vide. On définit $\delta(n)$ comme étant le
plus petit entier p tel que $n \notin Y_{p+1}$. On a alors :

$$|h_n(z_{\delta(n)}^n)| \leq \frac{\theta}{2} \text{ puisque } n \in X_{\delta(n)}.$$

Donc $|g(z_\delta)| \leq \frac{\theta}{2}$.

Or, δ n'est égal à aucun entier $\bar{m}$, sinon on aurait $Y_{m+1} \notin \mathcal{U}$, donc,
 $g(z_\delta) = \theta$, contradiction

Preuve du lemme 3 : Si E n'est pas super-réflexif, il existe un espace F
non réflexif finiment représentable dans E ; dans ces conditions, il
existe θ , $0 < \theta < 1$ et des suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F , F' respectivement
telles que :

$$\|y_n\| \leq 1 \quad \|f_n\| \leq 1$$

$$\text{et} \quad f_j(y_i) = \theta \quad \text{si } j \leq i$$

$$f_j(y_i) = 0 \quad \text{sinon.}$$

(Pour la démonstration de ce résultat, voir [1], exposé XIV).

Soit $\varepsilon > 0$ donné, $n \in \mathbb{N}$ donné; soit A le sous-espace de F engendré par
les éléments $y_1, \dots, y_n$; φ un $1 + \varepsilon$ -isomorphisme de A sur un sous-espace
de E .

$z_1 = \varphi(y_1), \dots, z_n = \varphi(y_n)$.

les formes linéaires $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ sur $\varphi(A)$ par $\tilde{f}_j = f_j \upharpoonright A \circ \varphi^{-1}$

pour chaque j , on choisit une forme linéaire g_j sur E qui étend $\tilde{f}_j$

à la même norme que f_j . On a alors :

$$\|z_1\| \leq 1 + \varepsilon, \dots, \|z_n\| \leq 1 + \varepsilon$$

$$\|g_1\| \leq 1 + \varepsilon, \dots, \|g_n\| \leq 1 + \varepsilon$$

$$g_j(z_i) = 1 \text{ si } j \leq i$$

$$g_j(z_i) = 0 \text{ sinon}$$

c'est-à-dire qu'on a la propriété (P).

2. LE DUAL D'UNE ULTRAPUISSANCE.

Dans le cas où E n'est pas super-réflexif, l'inclusion $E^I/\mathcal{U} \subseteq (E^I/\mathcal{U})'$ a des propriétés comparables à celles de l'inclusion $E \subseteq E''$.

Théorème 4 : Soit E un espace de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I ; il existe un ultrafiltre $\mathcal{V}$ sur un ensemble J et une application linéaire $\varphi : (E^I/\mathcal{U})' \rightarrow (E^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ tels que :

1. φ est une isométrie de $(E^I/\mathcal{U})'$ sur un sous-espace de $(E^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ fortement complété.
2. $\varphi \upharpoonright E^I/\mathcal{U}$ est l'isométrie canonique de $E^I/\mathcal{U}$ dans $(E^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$.

Le théorème 4 est la conséquence du lemme suivant analogue du principe de "réflexivité locale".

Lemme 5 : Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout espace de dimension finie $A \subset (E^I/\mathcal{U})'$ et pour toute suite d'éléments $x_1, \dots, x_n$ de $E^I/\mathcal{U}$, il existe une application linéaire $T : A \rightarrow E^I/\mathcal{U}$ telle que

- $T|_{A \cap E^I/\mathcal{U}}$ est l'identité.
- T est un $1 + \varepsilon$ -isomorphisme de A sur une image.
- $|T(f)(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon \|f\| \quad j = 1, \dots, n ; f \in A.$

Preuve du théorème à partir du lemme : Soit J l'ensemble des couples (A, S) où A est un espace de dimension finie $A \subseteq (E^I/\mathcal{U})'$ et S un ensemble fini d'éléments de $E^I/\mathcal{U}$. J est ordonné par double inclusion. Soit $\mathcal{V}$ un ultrafiltre sur I qui étend la famille des $(\widehat{A}, S)$ où $(\widehat{A}, S) = \{(A', S') : (A', S') \supseteq (A, S)\}$. Pour chaque (A, S) , on choisit $T_{(A, S)}$ donné par le lemme avec $\varepsilon = \frac{1}{\dim A}$.

On pose $\varphi(f) = (T_{(A, S)}(f))_{(A, S) \in J}$ où $T_{(A, S)}(x) = 0$ si $x \notin A$.

φ est une isométrie de $(E^I/\mathcal{U})'$ dans $(E^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ qui est l'identité sur $E^I/\mathcal{U}$.

On définit $\pi : (E^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V} \rightarrow (E^I/\mathcal{U})'$ en posant si g est $(g_{(A, S)})_{(A, S) \in J}$

$$\pi(g) \cdot x = \lim_{\mathcal{V}} g_{(A, S)}(x) \quad x \in E^I/\mathcal{U}.$$

Il est clair que $\pi(\varphi(f)) = f$. Donc $\varphi \circ \pi$ est une projection de norme 1 de $(E^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ sur $\varphi((E^I/\mathcal{U})')$.

Preuve du lemme : Un raisonnement analogue à celui fait dans la deuxième partie de la preuve de la proposition 2 de l'exposé précédent montre qu'on peut se borner à démontrer le résultat suivant :

- Si $f_1, \dots, f_p$ sont des éléments de $E^I/\mathcal{U}$, $g_1, \dots, g_n$ des éléments de $(E^I/\mathcal{U})'$; $x_1, \dots, x_l$ des éléments de $E^I/\mathcal{U}$ et $(\alpha_{kj})_{1 \leq k \leq p; 1 \leq j \leq n}$ des réels, et si on pose :

$$\|f_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} g_j\| = \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$\|f_p + \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} g_j\| = \gamma_p$$

$$g_j(x_s) = \lambda_{js} \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq s \leq l.$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des éléments $h_1, \dots, h_n$ de $(E' / \mathcal{U})$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k + \varepsilon \leq \left\| f_k + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} h_j \right\| \leq \gamma_k + \varepsilon \quad 1 \leq k \leq p \\ \lambda_{js} - \varepsilon \leq h_j(x_s) \leq \lambda_{js} + \varepsilon, \quad 1 \leq s \leq l, \quad 1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

En fait, on peut même affaiblir la conclusion en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| f_k + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} h_j \right\| \leq \gamma_k + \varepsilon \\ \lambda_{js} - \varepsilon \leq h_j(x_s) \leq \lambda_{js} + \varepsilon. \end{array} \right.$$

En effet, l'inégalité $\left\| f_k + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} h_j \right\| \geq \gamma_k - \varepsilon$ est la conséquence

d'une inégalité (plus forte) $(f_k + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} h_j)(y_k) \geq \gamma_k - \varepsilon \quad \|y_k\| \leq 1$

et cette inégalité sera obtenue si on applique la forme affaiblie du résultat à $f_1, \dots, f_p$; $g_1, \dots, g_n$; $x_1, \dots, x_l$; $y_1, \dots, y_p$ pour $\varepsilon' > 0$ assez petit.

On suppose que f_k est donné par $(f_k^i)_{i \in I}$ et que x_s est donné par $(x_s^i)_{i \in I}$. On va montrer que l'ensemble des i tels qu'on puisse trouver $h_1^i, \dots, h_n^i$ dans E' tels que

$$\left\| f_k^i + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} h_j^i \right\| \leq \gamma_k + \varepsilon \quad 1 \leq k \leq p$$

$$\lambda_{js} - \varepsilon \leq h_j^i(x_s^i) \leq \lambda_{js} + \varepsilon \quad 1 \leq j \leq n ; \quad 1 \leq s \leq l$$

appartient à $\mathcal{U}$, ce qui établira l'existence de $h_1, \dots, h_n$ ($h_j = (h_j^i)_{i \in I}$).

Si on ne peut trouver $h_1^i, \dots, h_n^i$ réalisant les inégalités ci-dessus ; a fortiori, on ne peut réaliser les inégalités suivantes

$$(*) \quad f_k^i + \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} h_j^i(x) < \gamma_k + \varepsilon \quad \|x\| \leq 1$$

$$\lambda_{js} - \varepsilon < h_j^i(x_s^i) < \lambda_{js} + \varepsilon.$$

Dans l'espace $E^n \times \mathbb{R}$, on considère les points :

$$- v_k^i(x) = (\alpha_{k1}x, \dots, \alpha_{kn}x, f_k^i(x) - \gamma_k - \varepsilon) \quad \|x\| < 1$$

$$- z_{js}^i = (0, \dots, 0, -x_s^i, \dots, \lambda_{js} - \varepsilon \text{ où } -x_s^i \text{ représente la } j^{\text{ième}} \text{ coordonnée ; } \\ 1 \leq j \leq n, 1 \leq s \leq l.$$

$$- z'_{js}^i = (0, \dots, 0, x_s^i, \dots, -\lambda_{js} - \varepsilon) \text{ où } x_s^i \text{ représente la } j^{\text{ième}} \text{ coordonnée ; } \\ 1 \leq j \leq n, 1 \leq s \leq l.$$

$$- -1^i = (0, \dots, 0, -1).$$

L'espace $E^n \times \mathbb{R}$ est un espace de Banach (muni, par exemple de la norme $(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sup (\|x_1\|, \dots, \|x_n\|, |\lambda|)$).

L'ultrapuissance $(E^n \times \mathbb{R})^I / \mathcal{U}$ est canoniquement isométrique à $(E^I / \mathcal{U})^n \times \mathbb{R}$. Dans cet espace, on définit les points $v_k(x)$, z_{js} , z'_{js} , -1 comme $v_k^i(x)$, z_{js}^i , z'_{js}^i , -1^i en omettant l'indice supérieur i .

Si on ne peut réaliser les inégalités (*), alors, a fortiori, on ne peut séparer du vecteur nul, par un hyperplan fermé, l'enveloppe des points $v_k(x) \quad \|x\| < 1 \quad 1 \leq k \leq p$, et des points situés à une distance $< \delta$ d'un au moins des points z_{js}^i , z'_{js}^i , -1^i , et $v_k(x) \quad \|x\| < 1 \quad 1 \leq k \leq p$.

Il en résulte que 0 appartient à l'enveloppe convexe A^i définie ci-dessus ; cette enveloppe est en effet un ouvert. Dans l'espace $(E^n \times \mathbb{R})^I / \mathcal{U}$, on désigne par A l'ensemble des points dont un représentant au moins est de la forme $(x_i)_{i \in I}$ pour $x_i \in A^i$. Il n'est pas difficile de voir que A est dans l'enveloppe convexe des points situés à une distance $\leq \delta$ de l'un des points $v_k(x) \quad \|x\| \leq 1 \quad 1 \leq k \leq p$ ou de l'un des points z_{js} , z'_{js} , -1 .

Soit g la forme linéaire sur $(E^n \times \mathbb{R})^I / \mathcal{U}$ qui à $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ associe $\sum_{j=1}^n g_j(x_j) + \lambda$. Par hypothèse, on a :

$$g(v_k(x)) \leq -\varepsilon$$

$$g(z_{ij}) \leq -\varepsilon$$

$$g(z'_{ij}) \leq -\varepsilon$$

$$g(-1) \leq -\varepsilon \quad (\text{en supposant } \varepsilon \leq 1).$$

Il en résulte que pour $y \in A$, on a :

$$g(y) \leq -\varepsilon + \delta \|g\|$$

$$\text{et si } \delta \|g\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad g(y) \leq -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $0 \in A$, contradiction.

Le théorème 4 permet par exemple de mettre en évidence la propriété duale de celle de finie-représentabilité.

Définition 6 : On dit qu'un espace F est un quotient local de E si F est isométrique au quotient d'une ultrapuissance $E^I/\mathcal{U}$ de E par un sous-espace fermé.

Théorème 7 : -Si F est un quotient local de E , F' est finiment représentable dans E' .

-Si F est finiment représentable dans E , F' est un quotient local de E' .

Les deux assertions du théorème découlent directement du théorème 4.

3. SOUS-ESPACES COMPLEMENTES ET u -EXTENSIONS FAIBLES.

Soit E un sous-espace complété de F ; il existe une condition suffisante très simple pour que F soit une u -extension faible de E .

Théorème 8 : Soit E un sous-espace complémenté de F ; si F est finiment représentable dans E alors F est une u-extension faible de E .

Avant de donner la preuve de ce théorème, on va en tirer quelques conséquences. Soit $\mathcal{E}$ une classe d'espaces de Banach (comme dans l'exposé précédent) ; si, de plus, $\mathcal{E}$ est stable par isomorphisme, les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace de Banach E :

- E a une u-extension dans $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire $E \in \overline{\mathcal{E}}$)
- E a une u-extension faible dans $\mathcal{E}$.

En effet, une u-extension faible est isomorphe à une u-extension. On a alors le résultat suivant :

Proposition 9 : Soit $\mathcal{E}$ une classe d'espaces de Banach stable par ultrapuissance et isomorphisme ; E un espace de Banach ; $E \in \overline{\mathcal{E}}$ si et seulement si il existe F , $F \in \mathcal{E}$ tel que

- F est finiment représentable dans E ,
- E'' est isométrique à un sous-espace complémenté de F .

Preuve : si $E \in \overline{\mathcal{E}}$, E a une u-extension H , $H \in \overline{\mathcal{E}}$; d'après la proposition 2 de l'exposé précédent, E'' est isométrique à un sous-espace complémenté de H'' ; or H'' est isométrique à un sous-espace complémenté d'une ultrapuissance de H , soit $H^I/\mathcal{U} = F$.

D'autre part, F est finiment représentable dans H , donc dans E .

On a montré l'une des deux implications de la proposition 9 ; l'implication inverse résulte du théorème 8.

Corollaire 10 : Soit $\mathcal{E}$ une classe d'espaces de Banach stable par ultrapuissance et isomorphisme ; $\overline{\mathcal{E}}$ est stable par passage au bidual.

En effet, E'' est isométrique à un sous-espace complémenté d'une ultrapuissance de E .

Remarques : 1 - La proposition 9 n'apporte aucune information nouvelle dans le cas des espaces $\mathfrak{L}^p$; en revanche, elle donne une caractérisation nouvelle semble-t-il des espaces à structure locale inconditionnelle.

2 - Le corollaire 10 a été prouvé par Lindenstrauss-Rosenthal [3] dans le cas où $\overline{\mathcal{E}}$ est la classe des espaces $\mathcal{L}^p$ et par Figiel-Johnson-Tzafriri [2] dans le cas où $\overline{\mathcal{E}}$ est la classe des espaces à structure locale inconditionnelle.

On va maintenant donner la preuve du théorème 8. Soit Q la projection de F sur E . On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 11 : Soit A un sous-espace de dimension finie de $I - Q(F)$; pour tout n et pour tout $\delta > 0$, il existe une suite de sous-espaces de E , $A_1, \dots, A_n$ $1+\delta$ -isomorphes à A et tels que si $S_1, \dots, S_n$ sont les sphères unités de $A_1, \dots, A_n$ respectivement, on a $d(S_i, S_j) \geq \|Q\|^{-1} (1-\delta)$; $i \neq j$.

On va démontrer par récurrence sur n qu'il existe une ultrapuissance de E , $E^J/\mathcal{U}$ qui a une suite de sous-espaces $B_1, \dots, B_n$ isométriques à A et dont les sphères unités sont à des distances mutuelles $\geq \|Q\|^{-1}$. C'est ce qu'affirme l'hypothèse pour $n=1$ puisque F se plonge isométriquement dans une ultrapuissance de E .

Soient $B_1, \dots, B_n$ isométriques à A , $B_i \subseteq E^J/\mathcal{U}$ $1 \leq i \leq n$ et tels que les sphères unités des B_i soient à des distances mutuelles $\geq \|Q\|^{-1}$. L'espace $E^J/\mathcal{U}$ est un sous-espace complété de $F^J/\mathcal{U}$; de plus, si $\tilde{Q}$ est la projection de $F^J/\mathcal{U}$ sur $E^J/\mathcal{U}$ (obtenue par "ultrapuissance" de Q), on a $\|\tilde{Q}\| = \|Q\|$. Il existe un sous-espace B_{n+1} du noyau de $\tilde{Q}$ isométrique à A (obtenu par ultrapuissance de A). Enfin, si $x \in E^J/\mathcal{U}$ et si $\tilde{Q}(y) = 0$, on a :

$$\|x\| = \|\tilde{Q}(x-y)\| \leq \|\tilde{Q}\| \|x-y\|.$$

Par suite, si $y \in B_{n+1}$, $x \in E^J/\mathcal{U}$ et $\|y\| = \|x\| = 1$, on a $\|y-x\| \geq \|Q\|^{-1}$.

Donc, les sphères unités de B_i $1 \leq i \leq n$, et B_{n+1} sont bien à une distance $\geq \|Q\|^{-1}$. D'autre part, $B_1, \dots, B_n, B_{n+1}$ sont des sous-espaces de $F^I/\mathcal{U}$ qui est finiment représentable dans E et donc se plonge dans une ultrapuissance de E .

Lemme 12 : Soit A un sous-espace de dimension finie de $I - Q(F)$, K un sous-ensemble compact de E ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace B de E $1+\varepsilon$ -isomorphe à A et tel que si S est la sphère unité de B,

$$\underline{d(K, S) \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2} (1 - \varepsilon)}.$$

Preuve : On recouvre K par un ensemble fini de boules de diamètre

$\frac{\varepsilon \|Q\|^{-1}}{2}$, $C_1, \dots, C_n$; en appliquant le lemme 11, on trouve des sous-espaces A_i de E, $1 + \frac{\varepsilon}{2}$ -isomorphes à A et dont les sphères unités S_i sont à des distances mutuelles $\geq \|Q\|^{-1} (1 - \frac{\varepsilon}{2})$. On choisit une famille de $n+1$ sous-espaces. Si, pour chaque i , $d(S_i, K) < \frac{\|Q\|^{-1}}{2} (1 - \varepsilon)$, alors il existe $x_i \in S_i$, $y_i \in K$ tels que

$$\|x_i - y_i\| < \frac{\|Q\|^{-1}}{2} (1 - \varepsilon) .$$

Deux des $n+1$ points y_i appartiennent à la même boule C_k .

Donc, il existe i, j tels que

$$\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - y_i\| + \|y_i - y_j\| + \|y_j - x_j\| < \|Q\|^{-1} (1 - \frac{\varepsilon}{2}) ,$$

contradiction.

On peut maintenant terminer la preuve du théorème.

Soit W un sous-espace de F de dimension finie. Soit A l'espace $I - Q(W)$, et soit K l'ensemble des éléments de QW de norme ≤ 2 . D'après le lemme 12 on peut trouver un sous-espace B de E, $1+\varepsilon$ -isomorphe à A et dont la sphère unité S est telle que $d(S, K) \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2} (1 - \varepsilon)$. Soit τ un $1+\varepsilon$ -isomorphisme de A sur B. On pose pour $w \in W$

$$T(w) = Q(w) + \tau(w - Q(w)).$$

T est l'identité sur $W \cap E$. On a :

$$\|T(w)\| \leq [\|Q\| + (1+\varepsilon)(1 + \|Q\|)] \|w\| .$$

D'autre part, si w est donné et si $y = \tau(w - Q(w))$, il vient :

$$- \text{ si } \|Q(w)\| \leq 2 \|y\| \quad \text{puisque} \quad d(K, S) \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2} (1 - \varepsilon)$$

$$\|T(w)\| = \|Q(w) + y\| \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2} (1 - \varepsilon) \|y\| \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2} (1 - \varepsilon) \frac{\|Q(w)\|}{2} ,$$

$$- \text{ si } \|Q(w)\| > 2 \|y\|$$

$$\|T(w)\| = \|Q(w) + y\| \geq \frac{\|Q(w)\|}{2} \geq \|y\| .$$

Dans tous les cas

$$\|T(w)\| \geq \alpha (\|y\| + \|Q(w)\|) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\|Q\|^{-1}}{8} (1 - \varepsilon) .$$

$$\text{Or} \quad \|y\| \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \|w - Q(w)\| .$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad \|T(w)\| &\geq \alpha (1 + \varepsilon)^{-1} (\|w - Q(w)\| + \|Q(w)\|) \\ &\geq \alpha (1 + \varepsilon)^{-1} \|w\| . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que F est une λ -u-extension de E pour $\lambda = 8 \|Q\| (2 \|Q\| + 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Beauzamy : Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974, exposés XIII-XIV.
- [2] T. Figiel, W.B. Johnson, L. Tzafriri : On a Banach spaces having local unconditional structures. Preprint.
- [3] J. Lindenstrauss et H.P Rosenthal : The $\mathfrak{L}_p$ spaces, Israel J. Math. 7 (1969), p. 325-349.
