Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. Stern

Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 7, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A6_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1974-1975

PROPRIETES LOCALES ET ULTRAPUISSANCES D'ESPACES DE BANACH

par J. STERN

Exposé N° VII

18 Décembre 1974

Le but de cet exposé est de définir et d'étudier certains plongements isométriques d'un espace de Banach E dans un espace F, qui a les mêmes "propriétés locales" que E. Le fait que plusieurs choix soient possibles résulte du caractère imprécis de la notion de "propriété locale", mis en lumière par l'exemple suivant :

<u>Exemple</u> : On est tenté de résumer le principe de "réflexivité locale" de Lindenstrauss-Rosenthal [4] en disant que E et E" sont identiques du point de vue local. Considérons la propriété suivante :

$$\forall\, x \in B \quad \exists\, y \in B \quad \exists\, z \in B \quad (x = \frac{y+z}{2} \text{ et } \|y - z\| \geq 2 - \varepsilon) \quad \text{où } 0 < \varepsilon < 1 .$$

Cette propriété s'interprète dans un espace de Banach E dont la boule unité est B. Elle n'est pas satisfaite dans l^∞ dont la boule unité a un point extrêmal ; en revanche, elle est satisfaite par c_o : soit x dans la boule unité de c_o, $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$; on choisit x_n de façon que $|x_n| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et, on pose

$$y = (x_1, \dots, x_{n-1},\ x_n + (1 - \frac{\varepsilon}{4}),\ x_{n+1}, \dots)$$

$$z = (x_1, \dots, x_{n-1},\ x_n - (1 - \frac{\varepsilon}{4}),\ x_{n+1}, \dots) .$$

On a donc un exemple d'une propriété qui mérite le qualificatif de "locale", mais qui sort du cadre envisagé par le théorème de "réflexivité locale".

On rappelle d'abord la définition de l'opération d'ultraproduit (cf. [2]) ; soient $(E_i)_{i \in I}$ un ensemble d'espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble I. On pose

$$\prod\nolimits_o = \{ (x_i)_{i \in I} \ : \ \forall\, i \quad x_i \in E_i \quad \text{et } \exists\, \lambda \ \{ i : \|x_i\| \leq \lambda \} \in \mathcal{U} \} .$$

Une semi-norme sur $\prod_o$ est définie par $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|x_i\|$. Soit N le sous-espace des éléments de semi-norme zéro. On appelle <u>ultraproduit</u> des $(E_i)_{i \in I}$

par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, et on note $\prod_{i\in I} E_i/\mathcal{U}$, le quotient $\prod_o / N$.
On démontre que $\prod_{i\in I} E_i/\mathcal{U}$ est complet [1]. Dans le cas où tous les E_i sont égaux à un même espace E, $\prod_{i\in I} E_i/\mathcal{U}$ est noté $E^I/\mathcal{U}$ et appelé ultrapuissance de E. L'isométrie canonique de E dans $E^I/\mathcal{U}$ est une application qui associe à x l'élément de $E^I/\mathcal{U}$ représenté par la fonction constante égale à x.

La construction qu'on vient de décrire est voisine d'une construction utilisée en logique. Cet exposé devrait être abordable sans aucune familiarité avec les techniques de logique. On utilisera cependant le résultat suivant qui est la conséquence d'un théorème profond de théorie des modèles dû à Keisler et Shelah [7].

Théorème 0 : Soit E un espace de Banach ; $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I ; $\mathcal{V}$ un ultrafiltre sur J ; il existe un ensemble K et un ultrafiltre $\mathcal{W}$ sur K tels que les espaces $(E^I/\mathcal{U})^K/\mathcal{W}$ et $(E^J/\mathcal{V})^K/\mathcal{W}$ soient isométriques.

On utilisera aussi le résultat suivant, conséquence du théorème classique de Lowenheim-Skolem en théorie des modèles et du théorème de Keisler-Shelah.

Théorème 0' : Soit E un espace de Banach, F un sous-espace séparable de E ; il existe un sous-espace H, $F \subseteq H \subseteq E$, séparable et tel que E et H aient des ultrapuissances isométriques. De plus, si E est un treillis de Banach, on peut supposer que H est un sous-treillis de E.

1. ULTRAPUISSANCES ET FINIE-REPRESENTABILITE.

Proposition 1 : Soient E et F des espaces de Banach ; F se plonge isométriquement dans une ultrapuissance de E si et seulement si F est finiment représentable dans E.

(On rappelle que F est finiment représentable (f.r.) dans E si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace de dimension finie $A \subseteq F$, il existe un sous-espace $B \subseteq E$ tel que $d(A,B) \leq 1+\varepsilon$).

Proposition 2 : Soient E,F deux espaces de Banach, $E \subseteq F$; les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $e > 0$ et pour tout sous-espace de dimension finie $A \subseteq F$, il existe une application linéaire $T_A : A \to E$ telle que :
   - $T_A \restriction A \cap E$ est l'identité.
   - T_A est un $1+\varepsilon$-isomorphisme de A sur son image.

ii) Il existe une ultrapuissance $E^I/\mathcal{U}$ et une isométrie j de F dans $E^I/\mathcal{U}$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & E^I/\mathcal{U} \\ & F \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

(où i représente l'injection canonique de E dans $E^I/\mathcal{U}$).

Lorsque l'une ou l'autre des conditions i) ou ii) est satisfaite, on dit que F est une u-extension de E.

Preuve : On se bornera à donner la preuve de la proposition 2. On remarque d'abord que, si $\dim(E) < \infty$, chacune des conditions i ou ii) est équivalente à $F = E$. On suppose donc $\dim(E)$ infinie.

On démontre d'abord i) $\to$ ii). Soit I l'ensemble des espaces de dimension finie de F, ordonné par inclusion. Pour tout élément A de I, on pose $\hat{A} = \{B : B \supseteq A\}$. La famille des ensembles $\hat{A}$; $A \in I$ a la propriété d'intersection finie et donc peut-être étendue en un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Pour chaque A de I, on peut choisir une application T_A qui est telle que

- $T_A \upharpoonright A \cap E$ est l'identité.
- T_A est un $1+\varepsilon_A$-isomorphisme de A sur son image E_A.

On suppose $0 < \varepsilon_A < \frac{1}{\dim A}$ (remarquer que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \varepsilon_A = 0$).

Il existe des isométries ψ, φ, telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
E \subseteq F \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "i"'] & \prod\limits_{A \in I} E_A/\mathcal{U} \arrow[d, "\varphi"] \\
& E^I/\mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

ψ est définie par $\psi(x) = (T_A(x))_{A \in I}$ où $T_A(x)$ représente 0 si $x \notin A$.
φ est définie à partir des inclusions $i_A : E_A \to E$ par

$$\varphi((x_A)_{A \in I}) = (i_A(x_A))_{A \in I} .$$

Il est clair que φ est une isométrie ; soit x un élément de F ; on peut choisir un espace $A \subseteq F$, de dimension $\geq n$; on a alors si $B \in \hat{A}$ et $x \in A$:

$$(1+\tfrac{1}{n})^{-1} \|x\| \leq \|T_B(x)\| \leq (1+\tfrac{1}{n}) \|x\|$$

et donc : $$(1+\tfrac{1}{n})^{-1} \|x\| \leq \|\psi(x)\| \leq (1+\tfrac{1}{n}) \|x\| \; ;$$

comme n est arbitraire, on a prouvé que ψ est une isométrie.

Soit enfin x un élément de E ; $\psi \circ \varphi(x)$ est l'élément de $E^I/\mathcal{U}$ défini par $(T_A(x))_{A \in I}$ et $T_A(x) = x$ sur un ensemble de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

On démontre maintenant ii) $\to$ i). Il est clair qu'il suffit de montrer cette implication dans le cas où $F = E^I/\mathcal{U}$. Soit donc B un sous-espace de dimension finie de $E^I/\mathcal{U}$. Soit $b_1, \dots, b_l$ une base formée d'éléments de norme 1 de $E \cap B$; on complète cette base en une base : $b_1, \ldots, b_l$; $c_1, \ldots, c_n$. Soit M un nombre réel positif qui est tel que pour toute suite de réels $(\lambda_k)_{1 \le k \le l}$ et toute suite $(\mu_j)_{1 \le j \le n}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda_k| + \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| \le M \left\| \sum_{i=1}^{l} \lambda_k b_k + \sum_{j=1} \mu_j c_j \right\| .$$

Soit δ un nombre positif strictement tel que $\dfrac{1+\delta+M\delta(1+\delta)}{1-\delta-M\delta(1+\delta)} \le 1+\varepsilon$.

Comme la sphère unité de B est compacte, on peut trouver une suite $y_1, \ldots, y_p$ qui est δ-dense ; on peut supposer que les éléments de la base apparaissent dans la suite $(y_s)_{1 \le s \le p}$.

On suppose $y_s = \sum_{k=1}^{l} \beta_k^s b_k + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^s c_j$.

On cherche alors des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de E tels que les inégalités suivantes soient vraies :

$$(*) \qquad 1-\delta \le \left\| \sum_{k=1}^{l} \beta_k^s b_k + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^s x_j \right\| \le 1+\delta .$$

Supposons qu'on puisse trouver de tels éléments, on pose alors

$$T\left(\sum_{k=1}^{l} \lambda_k b_k + \sum_{j=1}^{n} \mu_j c_j \right) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k b_k + \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j .$$

T est une application linéaire de B dans E qui laisse invariants les éléments de $E \cap B$.

Soit $y = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k b_k + \sum_{j=1}^{n} \mu_j c_j$ un élément de B de norme 1 ; on peut choisir y_s tel que $\|y - y_s\| \le \delta$; alors :

$$\|T(y) - T(y_s)\| \le \left(\sum_{k=1}^{l} |\lambda_k - \beta_k^s| + \sum_{j=1}^{n} |\mu_j - \gamma_j^s| \right)(1+\delta)$$

$$\le M \|y - y_s\| (1+\delta) \le M\delta(1+\delta),$$

donc :

$$\|T(y_s)\| - M\delta(1+\delta) \leq \|T(y)\| \leq \|T(y_s)\| + M\delta(1+\delta)$$

mais :

$$1 - \delta \leq \|T(y_s)\| \leq 1 + \delta$$

d'où finalement :

$$1 - \delta - M\delta(1+\delta) \leq \|T(y)\| \leq 1 + \delta + M\delta(1+\delta).$$

Si $\|y\|$ est quelconque, on obtient :

$$(1 - \delta - M\delta(1+\delta))\ \|y\| \leq \|T(y)\| \leq (1 + \delta + M\delta(1+\delta))\ \|y\|.$$

Comme $\dfrac{1 + \delta + M\delta(1+\delta)}{1 - \delta - M\delta(1+\delta)} \leq 1+\varepsilon$, on a prouvé que T est un $1+\varepsilon$-isomorphisme.

Reste à trouver les éléments $x_1, \dots, x_n$; on suppose que $c_1, \dots, c_n$ sont respectivement représentés par $(c_i^1)_{i \in I}, \dots, (c_i^n)_{i \in I}$; on a

$$\lim_{\mathcal{U}} \left\| \sum_{k=1}^{1} \beta_k^s b_k + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^s c_i^j \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{1} \beta_k^s b_k + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^s c_j \right\|$$

par suite les inégalités (*) sont satisfaites en prenant $x_1 = c_i^n, \dots, x_n = c_i^n$ pour i décrivant un ensemble de l'ultrafiltre.

<u>Proposition 3</u> : <u>Soient E, F deux espaces de Banach</u>, $E \subseteq F$; <u>on suppose que F est une u-extension de E</u> ; <u>alors, il existe une application π : $F \to E''$ telle que</u> :

- $\|\pi\| = 1$
- $\pi \restriction E$ est l'injection canonique de E dans E".

<u>Preuve</u> : Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $F = E^I/\mathcal{U}$; soit $x \in E^I/\mathcal{U}$, donné par $(x_i)_{i \in I}$, on pose

$$\pi(x) \,.\, f = \lim_{\mathcal{U}} f(x_i) \,.$$

Corollaire 4 : Soient E, F deux espaces de Banach $E \subseteq F$; on suppose que F est une u-extension de E, alors E'' est isométrique à un sous-espace fortement complémenté de F''.

(Par sous-espace fortement complémenté, on entend un sous-espace sur lequel existe une projection de norme 1).

Preuve : en transposant deux fois le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "j"'] & F \arrow[d, "\pi"] \\ & E'' \end{tikzcd}$$

où j est l'injection canonique de E dans E'', on obtient :

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "j''"'] & F'' \arrow[d, "\pi''"] \\ & E'''' \end{tikzcd}$$

où φ est une isométrie ;
soit k l'isométrie de E' dans E''' définie par $kf(x) = x(f)$ $(x \in E'')$;
k' est une projection de E'''' sur $j''(E'')$ et $\|k'\| = 1$, d'où le résultat.

La proposition suivante est une extension naturelle de la proposition 2 :

Proposition 5 : Soient E, F deux espaces de Banach, $E \subseteq F$; $\lambda \geq 1$; les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout sous-espace de dimension finie $A \subseteq F$, il existe une application linéaire $T_A : A \to E$ telle que
- $T_A \restriction A \cap E$ est l'identité,
- T_A est un $\lambda+\varepsilon$-isomorphisme de A sur son image.

ii) Il existe une ultrapuissance $E^I/\mathcal{U}$ et un isomorphisme j de F dans $E^I/\mathcal{U}$ de norme au plus λ, tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & E^I/\mathcal{U} \\ & F \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Lorsque l'une ou l'autre des conditions i) ou ii) est satisfaite, on dit que F est une λ-u-extension de E ; si F est une λ-u-extension de E pour au moins un λ, on dit que F est une u-extension faible de E.

2. EXTENSIONS LOCALES DE CLASSES D'ESPACES DE BANACH.

Soit $\mathscr{C}$ une classe d'espaces de Banach qu'on suppose stable par ultrapuissance. On note :

- $\widetilde{\mathscr{C}}$ la classe des Banach E tels que E a une ultrapuissance dans $\mathscr{C}$ (à une isométrie près).
- $\overline{\mathscr{C}}$ la classe des Banach E tels que E a une u-extension dans $\mathscr{C}$.

Proposition 6 :

1. $\widetilde{\mathscr{C}} \subseteq \overline{\mathscr{C}}$.
2. $\overline{\overline{\mathscr{C}}} = \overline{\mathscr{C}}$.
3. $\widetilde{\widetilde{\mathscr{C}}} = \widetilde{\mathscr{C}}$.
4. $\widetilde{\mathscr{C}}$ et $\overline{\mathscr{C}}$ sont stables par ultrapuissance.
5. Si $\mathscr{C}$ est stable par isomorphisme, il en est de même de $\widetilde{\mathscr{C}}$ et $\overline{\mathscr{C}}$.

Preuve : La démonstration des résultats 1,2,5 ne présente pas de difficulté.
En ce qui concerne le résultat 3, il suffit d'établir que $(E^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ est une ultrapuissance de E, en fait, c'est $E^{I\times J}/\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ où $\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ est défini par

$$a \in \mathcal{U}\times\mathcal{V} \qquad \{j : \{i : <i,j> \in a\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V} .$$

Preuve du résultat 4 :

1) Pour $\tilde{\mathcal{C}}$: soit $E^I/\mathcal{U} \in \mathcal{C}$, on considère $E^J/\mathcal{V}$; d'après le théorème 0, les espaces $E_1 = (E^I/\mathcal{U})^K/\mathcal{W}$ et $E_2 = (E^J/\mathcal{V})^K/\mathcal{W}$ sont isométriques pour un choix convenable de $K, \mathcal{W}$.
Or, $E_1 \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par ultrapuissance, donc $E_2 \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire $E^J/\mathcal{V} \in \tilde{\mathcal{C}}$.

2) Pour $\bar{\mathcal{C}}$: on suppose $E \in \bar{\mathcal{C}}$; soit F une u-extension de E qui est dans $\bar{\mathcal{C}}$; $E^I/\mathcal{U}$ est un sous-espace de $F^I/\mathcal{U}$.
En fait, $F^I/\mathcal{U}$ est une u-extension de $E^I/\mathcal{U}$. Soit, en effet, $A \subseteq F^I/\mathcal{U}$, $\dim(A) < \infty$; soit $a_1, \dots, a_n$ une base de $A \cap E^I/\mathcal{U}$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$ une base de A. Les éléments $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$ sont représentés respectivement par :

$$(a_i^1)_{i \in I}, \dots, (a_i^n)_{i \in I}, (b_i^1)_{i \in I}, \dots, (b_i^p)_{i \in I} .$$

Soit A_i le sous-espace de F engendré par les éléments d'indice i ; puisque F est une u-extension de E, il existe $T_{A_i} : A_i \to E$ t.q. :

- $T_{A_i} \restriction E \cap A_i$ est l'identité
- T_{A_i} est un $1+\varepsilon$-isomorphisme de A_i sur son image.

On pose

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j + \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \left(T_{A_i}\left(\Sigma \lambda_j a_i^j + \Sigma \mu_k b_i^k\right)\right)_{i \in I}$$

$$T(a_j) = (T_{A_i}(a_i^j))_{i \in I} = (a_i^j)_{i \in I} = a_j,$$

donc $T \restriction E^I/\mathcal{U} \cap A$ est l'identité. D'autre part, puisque

$$\|T_{A_i}(x_i)\| \leq \|T_{A_i}\| \, \|x_i\| ,$$

il vient
$$\|T(x)\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|T_{A_i}\| \, \|x\| ,$$

et, de même
$$\|T(x)\| \geq \lim_{\mathcal{U}} \|T_{A_i}^{-1}\|^{-1} \, \|x\| ,$$

par suite, T est un $1+\varepsilon$-isomorphisme de A sur son image.

3. REFLEXIVITE LOCALE.

On va établir que si une classe $\mathcal{C}$ est stable par ultrapuissance et, par complémentation forte, elle est stable par passage au bidual ; c'est la conséquence du théorème suivant :

Théorème 7 : Soit E un espace de Banach ; il existe un ultrafiltre sur un ensemble I et une application linéaire $\varphi : E'' \to E^I/\mathcal{U}$ tels que :

1 - φ est une isométrie de E'' sur un sous-espace de $E^I/\mathcal{U}$ fortement complémenté.

2 - $\varphi \restriction E$ est l'injection canonique de E dans $E^I/\mathcal{U}$.

Preuve : On suppose bien sûr $\dim(E) = \infty$.
Une forme renforcée du principe de "réflexivité locale (voir [5], théorème II.5.1) est la suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout sous-espace de dimension finie $A \subseteq E''$ et, pour toute suite de formes linéaires $f_1, \dots, f_n$ de E', il existe une application linéaire $T : A \to E$ telle que

- $T \restriction A \cap E$ est l'identité.
- T est un $1+\varepsilon$-isomorphisme de A sur son image.
- $f_j(T(x)) = x(f_j)$, $j = 1, \dots, n$; $x \in A$.

Soit I l'ensemble des couples (A,S) où A est un sous-espace de dimension finie de E'' et S un ensemble fini d'éléments de E'. I est ordonné par double inclusion ($A \subseteq A'$, $S \subseteq S'$). Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ qui étend la famille des $\widehat{(A,S)}$ où $\widehat{(A,S)} = \{(A',S') : A' \supseteq A \text{ et } S' \supseteq S\}$.
Pour chaque (A,S), on choisit $T_{(A,S)} : A \to E$ obtenu par application du principe de réflexivité avec $\varepsilon = \dfrac{1}{\dim A}$.

On définit une injection isométrique φ de E'' dans $E^I/\mathcal{U}$, en posant :

$$\varphi(x) = (T_{(A,S)}(x))_{(A,S) \in I}$$

où $T_{(A,S)}(x)$ vaut 0 si $x \notin A$.

Il est clair que $T \upharpoonright E$ est l'injection canonique de E dans $E^I/\mathcal{U}$.
De plus, si $x \in A$ et $f \in S$, on a

$$f(T_{(A,S)}(x)) = x(f) .$$

Donc $$\lim_{\mathcal{U}} f(T_{(A,S)}(x)) = x(f) .$$

Par suite, l'application $\pi : E^I/\mathcal{U} \to E''$ définie dans la preuve de la proposition 3 satisfait $\pi(\varphi(x)) = x$, donc π est une projection de $E^I/\mathcal{U}$ sur $\varphi(E'')$.

4. EXEMPLES DE CLASSES $\overline{\mathcal{C}}$ ET $\widetilde{\mathcal{C}}$.

On rappelle les définitions suivantes (cf. [3], [6]).

Définitions 8 : Soit E un espace de Banach ;

- E est un espace $\mathcal{L}^p$ s'il existe λ tel que pour tout sous-espace de dimension finie $A \subseteq E$, il existe un sous-espace B, $A \subseteq B$ qui soit λ-isomorphe à un espace l^p_n.

- E est un espace à structure locale inconditionnelle (s.l.i.) s'il existe λ tel que pour tout sous-espace de dimension finie $A \subseteq E$, il existe un sous-espace B, $A \subseteq B$, qui admet une base dont la constante d'inconditionnalité est $\leq \lambda$.

Proposition 9 :

1. Si $\mathcal{C}$ est la classe des espaces isomorphes à un L^p $(1 \leq p < \infty)$, $\overline{\mathcal{C}}$ est la classe des $\mathcal{L}^p$.
2. Si $\mathcal{C}$ est la classe des espaces isomorphes à un $C(K)$, $\overline{\mathcal{C}}$ est la classe des $\mathcal{L}^\infty$.
3. Si $\mathcal{C}$ est la classe des espaces isomorphes à un treillis de Banach, $\overline{\mathcal{C}}$ est la classe des s.l.i.

Preuve de 1 : Soit E un espace $\mathcal{L}^p$; on suppose que I est l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de E, ordonné par inclusion. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I qui étend la famille d'ensembles $\hat{A} = \{A' : A' \supseteq A\}$.

Pour chaque $A \in I$, on choisit un sous-espace B_A qui contient A et un λ-isomorphisme θ_A de B_A sur l^p_n $(n = \dim B_A)$. On voit facilement qu'il existe des injections isométriques φ, ψ qui rendent le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & \prod_{A \in I} B_A/\mathcal{U} \arrow[d, "\psi"] \\ & E^I/\mathcal{U} \end{tikzcd}$$

Donc, $\prod_{A \in I} B_A/\mathcal{U}$ est une u-extension de E. De plus, par ultraproduit, les applications $(\theta_A)_{A \in I}$ définissent un λ-isomorphisme de cet espace sur $\prod_{A \in I} l^p_{\dim(A)}/\mathcal{U}$ qui est un L^p. Donc, $\mathcal{L}^p \subseteq \overline{\mathcal{C}}$.

L'inclusion inverse résulte du fait que tout espace L^p est un $\mathcal{L}^p$ (avec $\lambda = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque).

<u>Preuve de 2</u> : La preuve est la même -mutatis mutandis- pour les $\mathcal{L}^\infty$.

<u>Preuve de 3</u> : En ce qui concerne les s.l.i., on peut se reporter à [6].

<u>Théorème 10</u> : <u>Tout espace $\mathcal{L}^p$ $(1 < p < \infty)$ a une ultrapuissance isomorphe à un L^p.</u>

Donc, si $\mathcal{C}$ est la classe des espaces isomorphes à un L^p $(1 < p < \infty)$, $\overline{\mathcal{C}} = \tilde{\overline{\mathcal{C}}} = \mathcal{L}^p$.

Le théorème 10 prouve qu'il n'y a guère d'espoir d'isoler, par des propriétés locales - et, en particulier, par des formules -, les espaces $\mathcal{L}^p$ des espaces isomorphes à des L^p. En effet, il affirme que <u>tout $\mathcal{L}^p$ a une ultrapuissance qui est un L^p</u> (à isomorphisme près).

<u>Preuve</u> : On sait que tout espace $\mathcal{L}^p$ $(1 \leq p < \infty)$ admet un sous-espace complémenté isomorphe à l^p. ([5], proposition II.5.5).
D'autre part, on a vu dans la preuve de la proposition 9 que tout espace $\mathcal{L}^p$, E, a une extension isomorphe à un espace $F = \prod_{A \in I} l^p_{\dim A}/\mathcal{U}$.

Puisque F est réflexif, E également et, donc, d'après la proposition 3, E est complémenté dans tout u-extension; par suite, E est isomorphe à un sous-espace complémenté de F. Chaque espace $l^p_{\dim A}$ est lui-même complété dans l^p donc $\prod_{A \in I} l^p_{\dim A}/\mathcal{U}$ est un sous-espace complémenté de $(l^p)^I/\mathcal{U}$. On a donc la situation suivante

- l^p est isomorphe à un sous-espace complémenté de E,
- E est isomorphe à un sous-espace complémenté de $(l^p)^I/\mathcal{U}$.

D'après le théorème 0, il existe un ultrafiltre $\mathcal{W}$ sur un ensemble K tel que $(l^p)^K/\mathcal{W}$ et $((l^p)^I/\mathcal{U})^K/\mathcal{W}$ soient isométriques.
Soit H l'espace $(l^p)^K/\mathcal{W}$. On a :

- H est isomorphe à un sous-espace complémenté de $E^K/\mathcal{W}$.
- $E^K/\mathcal{W}$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de H.

On utilise alors la variante suivante de la classique méthode de décomposition de Pelczynski :

- Si deux espaces G, H sont tels que

  . G est isomorphe à un sous-espace complémenté de H.
  . H est isomorphe à un sous-espace complémenté de G.
  . $l^p(H)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de H,
  alors G et H sont isomorphes.

(La preuve de ce résultat est obtenue en remarquant que $l^p(E)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de H, et $l^p(H)$ à un sous-espace complémenté de E. Des isomorphismes :

$$H \sim l^p(E) \oplus S$$

$$E \sim l^p(H) \oplus T \quad .$$

On déduit $H \oplus E \sim l^p(E) \oplus S \oplus E \sim l^p(E) \oplus S \sim H$

et $H \oplus E \sim l^p(H) \oplus T \oplus H \sim l^p(H) \oplus T \sim E$.)

Pour montrer donc que $E^K/\mathcal{U}$ et H sont isomorphes - ce qui achève la démonstration - il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme 11 : Si $H = (l^p)^K/\mathcal{U}$, alors $l^p(H)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de H.

Preuve : Puisque $l^p(l^p)$ est en fait l^p, on peut écrire H comme $(l^p(l^p))^K/\mathcal{U}$. Chaque élément de $l^p(l^p)$ est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l^p. Un élément de H est donc donné par un ensemble d'éléments de l^p (x_n^k) ; $n\in\mathbb{N}$, $k\in K$; la norme étant calculée en posant $\|x\| = \lim_{\mathcal{U}} (\sum_n \|x_n^k\|^p)^{1/p}$.

Si on pose $\pi_n(x) = (x_n^k)_{k\in K}$, on obtient un élément de $(l^p)^K/\mathcal{U}$ (soit H). De plus

$$\|\pi_n(x)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n^k\| ,$$

on a donc

$$\sum_{n=1}^N \|\pi_n(x)\|^p = \lim_{\mathcal{U}} \sum_{n=1}^N \|x_n^k\|^p \leq \|x\|^p ,$$

d'où

$$\left(\sum_n \|\pi_n(x)\|^p \right)^{1/p} \leq \|x\| .$$

On a donc une projection de norme 1 de $H = (l^p(l^p))^K/\mathcal{U}$ sur $l^p((l^p)^K/\mathcal{U}) = l^p(H)$.

En ce qui concerne les espaces $\mathcal{L}^1$, la même méthode permet d'obtenir seulement le résultat suivant.

Théorème 11 : Tout espace isomorphe à un sous-espace complémenté d'un espace L^1 a une ultrapuissance isomorphe à un L^1.

Pour les espaces $\mathcal{L}^\infty$, on a :

<u>Théorème 12</u> : <u>Tout espace isomorphe à un sous-espace complémenté d'un espace C(K) a une ultrapuissance isomorphe à un C(K).</u>

Avant de donner la preuve de ce théorème, on doit rappeler le résultat suivant dû à Pelczynski : ([5], théorème II.4.36)

- Si K est un espace métrique compact et si C(K) est isomorphe à un sous-espace d'un espace de Banach séparable Y, alors C(K) est isomorphe à un sous-espace complémenté de Y.

Ce résultat a pour conséquence dans le cas non séparable :

- Si K est un espace compact et si C(K) est isomorphe à un sous-espace d'un espace de Banach Y, alors il existe une ultrapuissance X_o de C(K) et une ultrapuissance Y_o de Y tels que X_o soit isomorphe à un sous-espace complémenté de Y_o.

<u>Preuve de cette assertion</u> : Soit Z un sous-espace de C(K), qui contient l'unité de C(K) est un sous-treillis séparable de C(K) et est tel que Z et C(K) aient des ultrapuissances isométriques. L'existence d'un tel Z résulte du théorème O'. Z est un M-espace avec unité et donc un espace $C(K_1)$ où K_1 est un compact métrisable. Soit maintenant φ un isomorphisme de C(K) dans Y. Soit Y_1 un sous-espace séparable de Y qui contient l'image par φ de $C(K_1)$ et qui est tel que Y_1 et Y aient des ultrapuissances isométriques. D'après le résultat de Pelczynski, $C(K_1)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de Y_1. Si $C(K_1)^I/\mathcal{U}$ et $C(K)^J/\mathcal{V}$ sont isométriques, $C(K)^J/\mathcal{V}$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $Y_1{}^I/\mathcal{U}$. D'autre part, puisque $Y_1 \in \tilde{\mathcal{E}}$ où $\tilde{\mathcal{E}}$ est la classe des ultrapuissances de Y, $Y_1{}^I/\mathcal{U} \in \tilde{\mathcal{E}}$ (proposition 6.4). Si $(Y_1{}^I/\mathcal{U})^L/\mathcal{W}$ et $(Y^M/\mathcal{X})$ sont isométriques, alors $(C(K)^I/\mathcal{U})^L/\mathcal{W}$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $Y^M/\mathcal{X}$. c.q.f.d.

<u>Preuve du théorème 12</u> : On suppose E complémenté dans C(K) ; alors E a un sous-espace isomorphe à c_o ([5], proposition II.4.33).

D'après le résultat qu'on vient d'établir, il existe des ultrapuissances $c_o{}^I/\mathcal{U}$ et $E^J/\mathcal{V}$ telles que $c_o{}^I/\mathcal{U}$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $E^J/\mathcal{V}$. $E^J/\mathcal{V}$ est complémenté dans $C(K)^J/\mathcal{V}$. L'espace $C(K)^J/\mathcal{V}$ est un espace de fonctions continues sur un compact, soit $C(\Omega)$. $C(\Omega)$ qui est un espace $\mathcal{L}^\infty$ se plonge dans une ultrapuissance de c_o. Par suite, il existe une ultrapuissance $C(\Omega)^L/\mathcal{W}$ qui est isomorphe à un sous-espace complémenté d'une ultrapuissance de c_o. L'espace E_1, $E_1 = (E^J/\mathcal{V})^L/\mathcal{W}$

- est isomorphe à un sous-espace complémenté d'une ultrapuissance de c_o,
- a un sous-espace complémenté isomorphe à une ultrapuissance de c_o.

Comme dans la preuve du théorème 10, on en déduit que E_1 (et donc E) a une ultrapuissance isomorphe à une ultrapuissance de c_o.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Dacunha-Castelle : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972, Exposé IX.

[2] D. Dacunha-Castelle et J.L. Krivine : Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach, Studia Math. 41 (1972), p. 315-344.

[3] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968), p. 275-326.

[5] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri : Classical Banach spaces, Lecture Notes in Mathematics 338 (Springer).

[4] J. Lindenstrauss et H.P. Rosenthal : The $\mathcal{L}_p$ spaces, Israel J. Math. 7 (1969), p. 325-349.

[6] B. Maurey : Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974, Exposés XXIV-XXV.

[7] S. Shelah : Every two elementary equivalent models nave isomorphic ultrapowers, Israel J. Math. 10 (1971), p. 224-233.

[8] J. Stern : Some applications of model theory in Banach space theory, à paraître dans Annals of Math. Logic.