

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

**Fonctions mesurables et $*$ -scalairement mesurables,
mesures banachiques majorées, martingales banachiques,
et propriété de Radon-Nikodym**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 4, p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A4_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

FONCTIONS MESURABLES ET *-SCALAIREMENT MESURABLES, MESURES
BANACHIQUES MAJOREES, MARTINGALES BANACHIQUES,
ET PROPRIETE DE RADON-NIKODYM

par L. SCHWARTZ

Exposé n° IV

27 Novembre 1974

§ 1. ESPACES DE FONCTIONS MESURABLES ET *-SCALAIREMENT MESURABLES

Une mesure $\lambda \geq 0$ sur un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{O}$ est une fonction sur $\mathcal{O}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, dénombrablement additive. Nous supposerons toujours qu'elle est essentielle, c.à.d. que, pour $B \in \mathcal{O}$, $\lambda(B) = \sup\{\lambda(B') ; B' \in \mathcal{O}, B' \subset B, \lambda(B') < +\infty\}$ (ce qui, en particulier, exclut l'existence de masses ponctuelles infinies). On définit alors l'intégrale supérieure λ^* (appelée en général intégrale supérieure essentielle, mais nous supprimerons l'adjectif essentiel pour abrégé) comme suit :

1) si $f \geq 0$ ⁽¹⁾ est dénombrablement étagée,

$$f = \sum_n c_n 1_{B_n}, \quad B_n \in \mathcal{O}, \quad c_n \in [0, +\infty],$$

$$\lambda^*(f) = \sum_n c_n \lambda(B_n) \quad (2);$$

2) si $f \geq 0$ est arbitraire,

$$\lambda^*(f) = \inf \{ \lambda^*(g) ; g \text{ dénombrablement étagée } \geq f \};$$

3) si $f \geq 0$ est arbitraire ,

$$\lambda^*(f) = \sup \{ \lambda^*(f 1_B) ; B \in \mathcal{O}, \lambda(B) < +\infty \}.$$

La fonctionnelle positive λ^* vérifie le théorème de Fatou du passage à la limite des suites croissantes :

si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f$, alors $\lambda^*(f_n) \nearrow \lambda^*(f)$, et l'inégalité de sous-additivité dénombrable :

$$\lambda^*\left(\sum_n f_n\right) \leq \sum_n \lambda^*(f_n).$$

(1) ≥ 0 voudra toujours dire à valeurs dans $[0, +\infty]$.

(2) avec, toujours, la convention $0 \cdot \infty = 0$, donc aussi $\frac{0}{0} = 0$.

Une partie A de Ω sera dite λ -négligeable (on dit habituellement λ -essentielle-ment négligeable, mais nous abrègerons) si $\lambda^*(A) = 0$. Nous abrègerons λ -presque partout par λ -pp. Une fonction f sur Ω , à valeurs dans un Banach E , sera dite λ -intégrable (on dit habituellement λ -essentielle-ment intégrable, mais nous abrègerons), si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g = \sum_{i \in I} c_i 1_{B_i}$, I fini, $c_i \in E$, $B_i \in \mathcal{O}$, $\lambda(B_i) < +\infty$, telle que, si on pose $\lambda(g) = \sum_{i \in I} c_i \lambda(B_i)$, on ait $\lambda^*(|f-g|) \leq \varepsilon$. A une fonction intégrable f on attache une intégrale $\int_{\Omega} f d\lambda$ ou $\lambda(f) \in E$, qui vérifie le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Une partie A de Ω est dite λ -mesurable si son intersection avec toute partie λ -intégrable est λ -intégrable. Les parties λ -mesurables forment une tribu $\mathcal{O}_{\lambda} \supset \mathcal{O}$, sur laquelle λ^* est dénombrablement additive. Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite λ -mesurable si, pour tout borélien R de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(R)$ est λ -mesurable ; pour des fonctions $f_n \geq 0$ λ -mesurables, l'inégalité de sous-additivité dénombrable devient l'égalité d'additivité dénombrable, $\lambda^*(\sum_n f_n) = \sum_n \lambda^*(f_n)$, et $\sum_n f_n$ est λ -mesurable.

Pour des fonctions à valeurs dans un Banach E , il y a plusieurs notions possibles de mesurabilité. Si $f: \Omega \rightarrow E$ est telle que, pour tout borélien B de E , $f^{-1}(B)$ soit λ -mesurable, et si f est bornée et λ finie, f n'est pas nécessairement λ -intégrable ; donc cette notion de mesurabilité n'est pas assez forte.

Définition (1,0) : Nous dirons donc que $f: \Omega \rightarrow E$ est λ -mesurable, si, pour tout borélien B de E , $f^{-1}(B)$ est λ -mesurable, et si en outre, pour tout $A \in \mathcal{O}$ de λ -mesure finie, il existe $N \subset A$ λ -négligeable tel que $f(A \setminus N)$ soit contenu dans un sous-Banach séparable de E ; cela revient à dire que, sur A , f est limite λ -pp d'une suite de fonctions étagées.

Sur un Banach E , nous noterons par $|e|$ la norme d'un élément e de E ; si $f: \Omega \rightarrow E$ est une fonction à valeurs dans E , $|f|$ est la fonction $\geq 0: \omega \mapsto |f(\omega)|$; nous réserverons $\|f\|$ pour la norme de f dans divers espaces fonctionnels possibles, donc $|f|$ est une fonction et $\|f\|$ un nombre.

Alors $f: \Omega \rightarrow E$ est λ -intégrable, si et seulement si elle est λ -mesurable et si $\lambda'(|f|) < +\infty$. Cela entraîne que f soit portée par une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de λ' -mesures finies ; et qu'il existe N λ -négligeable tel que $f(\bigcap N)$ soit contenu dans un sous-Banach séparable de E .

On appelle $\mathcal{L}^p(\Omega, \lambda; E)$, $0 < p < +\infty$, l'espace vectoriel des fonctions f λ -mesurables à valeurs dans E , pour lesquels $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \lambda; E)} = (\lambda'(|f|^p))^{1/p} < +\infty$, et on le munit de la quasi-norme

$\| \cdot \|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \lambda; E)}$ (norme si $p \geq 1$) ; il est complet (Fischer-Riesz). Son quotient par la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f = g$ λ -pp, muni de la quasi-norme quotient (en fait $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \lambda; E)}$ est la même pour tous les

éléments f d'une même classe f') sera noté $L^p(\Omega, \lambda; E)$, il est encore complet, c'est un quasi-Banach (Banach si $p \geq 1$)⁽¹⁾.

On appelle $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda; E)$ l'espace des fonctions λ -mesurables à valeurs dans E , pour lesquelles $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda; E)} = \sup\text{-ess.}_\lambda |f| = \inf\{M \geq 0; |f| \leq M \text{ } \lambda\text{-pp}\} < +\infty$; il sera muni de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda; E)}$; il est complet. Son quotient par la relation d'équivalence "égalité λ -pp" est le Banach $L^\infty(\Omega, \lambda; E)$.

On appelle $\mathcal{L}^0(\Omega, \lambda; E)$ l'espace des fonctions λ -mesurables à valeurs dans E . On le munit de la topologie de la "convergence en mesure sur tout ensemble de mesure finie", définie par les jauges :

$$J_{\alpha, A}(\lambda; f) = \inf \{M \geq 0; \lambda' \{ \omega \in A; |f(\omega)| > M \} \leq \alpha \} \text{ pour } 0 < \alpha < 1, A \in \mathcal{O},$$

$$\lambda(A) < +\infty;$$

f converge vers 0 dans $\mathcal{L}^0(\Omega, \lambda; E)$ si et seulement si, pour tout α et tout A , $J_{\alpha, A}(\lambda; f)$ tend vers 0. Le quotient par la relation d'équivalence "égalité λ -pp" sera $L^0(\Omega, \lambda; E)$, avec $J_{\alpha, A}(\lambda; f') = J_{\alpha, A}(\lambda; f)$ pour n'importe quelle

(1) En principe, il faudrait soigneusement distinguer $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \lambda)$ et sa classe f' dans $L^p(\Omega, \lambda)$, $f \in f'$. Nous le ferons autant que possible, mais sans exagération, et nous nous permettrons d'écrire, comme tout le monde, $f \in L^p(\Omega, \lambda)$.

$f \in f'$. Sans hypothèse supplémentaire, $\mathcal{L}^0$ et L^0 ne sont pas nécessairement complets.

On est amené à introduire les mesures λ concassables.

Définition (1.1) : On dit que λ est concassable s'il existe une partition
 $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ de Ω en parties Ω_i λ -intégrables telle que :

1) $A \subset \Omega$ soit λ mesurable si et seulement si tous les $A \cap \Omega_i$ sont λ -mesurables ;

2) pour tout $A \subset \Omega$, $\lambda^*(A) = \sum_{i \in I} \lambda^*(A \cap \Omega_i)$. En particulier, A est
négligeable si et seulement si tous les $A \cap \Omega_i$ sont λ -négligeables.

Si la partition est dénombrable, λ est dite σ -finie. Si Ω est un espace topologique séparé muni de sa tribu borélienne $\mathcal{O}$, une mesure λ sur $(\Omega, \mathcal{O})$ est dite de Radon si, pour tout $B \in \mathcal{O}$, $\lambda(B) = \sup\{\lambda(K) ; K \text{ compact } \subset B\}$ (régularité intérieure) et si elle est localement finie (tout point a un voisinage ouvert λ -intégrable). Toute mesure de Radon est concassable ; on peut choisir tous les Ω_i , sauf un, compacts et le restant λ -négligeable. Parmi les mesures concassables, on a donc au moins les mesures abstraites σ -finies et les mesures de Radon quelconques. Si λ est concassable, $\mathcal{L}^0(\Omega, \lambda; E)$ et $L^0(\Omega, \lambda; E)$ sont complets (on raisonne sur chaque morceau Ω_i). Le dual de $L^p(\Omega, \lambda)$ est dans tous les cas $L^{p'}(\Omega, \lambda)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < +\infty$; le dual de L^1 est L^∞ si λ est concassable.

Sauf mention expresse du contraire, nous supposons toujours
 λ concassable.

Une fonction $\Phi : \Omega \rightarrow E'$ sera dite $*$ -scalairement λ -mesurable, si, pour tout $e \in E$, $\langle \Phi, e \rangle : \omega \mapsto \langle \Phi(\omega), e \rangle$, est λ -mesurable. On appellera alors $\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E)$, $0 < p < +\infty$ (l'indice inférieur $*$ ne sera donc employé que pour des fonctions à valeurs dans un dual) l'espace des fonctions Φ $*$ -scalairement mesurables, pour lesquelles $\|\Phi\|_{\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')} = (\lambda^*(|\Phi|^p))^{\frac{1}{p}} < +\infty$; (1)

(1) $|\Phi|$ n'est pas forcément λ -mesurable !

et on le normera par $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')}$. On appellera $\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')$ le quotient par la relation d'équivalence : $\Phi \sim \Phi'$ si $\Phi = \Phi' * \text{-scalablement } \lambda\text{-pp}$, c.à.d. si, $\forall e \in E$, $\langle \Phi, e \rangle = \langle \Phi', e \rangle \lambda\text{-pp}$; et on le normera par la norme quotient :

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')} = \inf_{\Phi \in \Phi'} \|\Phi\|_{\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')} ; \text{ cette fois, c'est une "vraie" norme quotient, car } \Phi \sim \Phi' \text{ n'entraîne pas } \|\Phi\|_{\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')} = \|\Phi'\|_{\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')} \quad (2)$$

a une
définition analogue pour $\mathcal{L}_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ et $\mathcal{L}_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ en prenant

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}_*^\infty(\Omega, \lambda; E')} = \inf\{M; |\Phi| \leq M \lambda\text{-pp.}\}.$$

Enfin on appellera $\mathcal{L}_*^0(\Omega, \lambda; E')$ l'espace des fonctions $*$ -scalablement mesurables ; on le munira de la topologie définie par les jauges

$$\Phi \mapsto J_{\alpha, A}(\Phi) = \inf\{M; \lambda\{\omega \in A; |\Phi(\omega)| > M\} \leq \alpha\},$$

et $\mathcal{L}_*^0(\Omega, \lambda; E)$ sera le quotient par la relation d'équivalence "égalité $*$ -scalablement $\lambda\text{-pp}$ ", avec la topologie quotient, définie par les jauges $J_{\alpha, A}(\Phi') = \inf_{\Phi \in \Phi'} J_{\alpha, A}(\Phi)$.

Les espaces $\mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')$, $0 \leq p \leq +\infty$, sont habituellement trop peu utilisés ; nous allons voir qu'ils sont en fait la clef d'un grand nombre de propriétés diverses, dont les propriétés de Radon-Nikodym.

§ 2. ETUDE DE L'ESPACE $\mathcal{L}_*^0(\Omega, \lambda; E')$

Introduisons d'abord l'espace $L^0(\Omega, \lambda; \overline{\mathbb{R}})$ des classes (pour l'égalité $\lambda\text{-pp}$) de fonctions λ -mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$; on le munit de la structure d'ordre naturelle $\leq$, et de la topologie de la convergence en mesure correspondant à la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ (en remplaçant $\overline{\mathbb{R}}$ par l'espace homéomorphe $[0, 1]$, elle devient induite par $L^0(\Omega, \lambda; \mathbb{R})$).

(2) Voir note (1) page 3. Ici il peut être dangereux d'identifier $\Phi \in \mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')$ et sa classe $\Phi' \in \mathcal{L}_*^p(\Omega, \lambda; E')$, $\Phi \in \Phi'$, puisque les différentes fonctions $|\Phi| \geq 0$, pour $\Phi \in \Phi'$, en général non λ -mesurables, mais même si elles le sont, ne sont pas deux à deux $\lambda\text{-pp}$ égales.

Théorème (2.1) : L'ensemble ordonné $L^0(\Omega, \lambda; \overline{\mathbb{R}})$ est achevé : toute partie a une borne supérieure SUP et une borne inférieure INF. En outre, si λ est σ -finie, $f^* = \sup_{i \in I} f_i^*$ est aussi $(\sup_{i \in J} f_i^*)$, où Sup est le Sup ponctuel, et où J est un sous-ensemble dénombrable convenablement choisi de I ; et, dans tous les cas, si I est un ordonné filtrant croissant, avec $f_i^* \leq f_j^*$ pour $i \leq j$, $\sup_{i \in I} f_i^*$ est la limite de f_i^* dans $L^0(\Omega, \lambda; \overline{\mathbb{R}})$. Toute fonction, λ -mesurable ou non, qui majore toute f_i λ -pp., majore f λ -pp. Si Ω est un espace topologique et λ de Radon, et si les f_i sont des fonctions ≥ 0 semi-continues inférieurement, $\sup_{i \in I} f_i^* = (\sup_{i \in I} f_i)^*$ (sup ponctuel).

Démonstration : Puisque λ est toujours supposée concassable, on raisonne sur chaque morceau, donc on peut supposer λ finie. Comme $\overline{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $[0, 1]$ comme ensemble ordonné et espace topologique, on peut remplacer $\overline{\mathbb{R}}$ par $[0, 1]$. On peut toujours ajouter à l'ensemble des f_i leurs enveloppes supérieures finies, donc on peut supposer I ordonné filtrant. Soit alors $+\infty > M = \sup_{i \in I} \int_{\Omega} f_i d\lambda$; il existe une suite croissante f_n extraite de la famille, telle que $\int f_n d\lambda$ tende vers M ; soit f sa limite. Pour tout i , $f_n \vee f_i \nearrow f \vee f_i$ pour $n \rightarrow +\infty$; donc $\int (f_n \vee f_i) d\lambda$ (qui est $\leq M$ parce que $f_n \vee f_i$ est majorée par une fonction de la famille) $\nearrow \int (f \vee f_i) d\lambda \geq \int f d\lambda = M$. Donc $\int (f \vee f_i) d\lambda = M$; alors $f \vee f_i \geq f$ et a même intégrale finie, donc $f \vee f_i = f$ λ -pp., donc $f \geq f_i$ λ -pp. D'autre part toute fonction (mesurable ou non) qui dépasse λ -pp. chaque f_i dépasse chaque f_n donc f λ -pp. ; donc $f^* = \sup_{i \in I} f_i^*$. Le reste est évident (si I est ordonné filtrant, comme f_n converge vers f λ -pp. donc en mesure, $J_{\alpha}(f - f_n) \leq \varepsilon$ pour n assez grand, et a fortiori $J_{\alpha}(f - f_i) \leq \varepsilon$ pour $f_i \geq f_n$, donc f_i^* converge vers f^* dans $L^0(\Omega, \lambda)$).

Dans le cas Ω topologique, λ Radon, f_i semi continues inférieurement ≥ 0 , le SUP se détermine facilement localement, donc on peut supposer λ finie. Alors SUP = Sup à cause du passage à la limite des intégrales pour un ordonné filtrant croissant de fonctions sci ≥ 0 .

Théorème (2.2) (Dunford-Pettis-Maharam) : Soit $\Phi \in \mathcal{L}_*^{\infty}(\Omega, \lambda; E')$; elle définit, par $e \mapsto \langle \Phi, e \rangle$, une application linéaire continue v_{Φ} de norme $\leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}_*^{\infty}(\Omega, \lambda; E')}$, de E dans $L^{\infty}(\Omega, \lambda)$; si $\Phi = \Phi' * \text{scalairement } \lambda\text{-pp.}$, $v_{\Phi} = v_{\Phi'}$, donc $\Phi' \in L_*^{\infty}(\Omega, \lambda; E')$ définit $v_{\Phi'} \in \mathcal{L}(E; L^{\infty}(\Omega, \lambda))$,

$\|v_{\tilde{\Phi}}\| \leq \|\tilde{\Phi}'\|_{L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')}$. L'application $\tilde{\Phi}' \mapsto v_{\tilde{\Phi}}$ est une bijection linéaire isométrique de $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ sur $\mathcal{L}(E; L^\infty(\Omega, \lambda))$.

En résumé brutal :

L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE E DANS $L^\infty(\Omega, \lambda)$ EST $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$.

Démonstration : Il suffit de montrer que, si $v \in \mathcal{L}(E; L^\infty(\Omega, \lambda))$, il existe $\tilde{\Phi} \in L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ telle que $v_{\tilde{\Phi}} = v$, avec $\|\tilde{\Phi}\|_{L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')} \leq \|v\|$. Soit ρ un relèvement de Maharam ⁽¹⁾, application linéaire continue de norme 1 de $L^\infty(\Omega, \lambda)$ dans $B(\Omega)$, espace des fonctions bornées sur Ω , muni de la norme $\|\varphi\|_{B(\Omega)} = \sup_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega)|$, avec : pour $f^* \in L^\infty(\Omega, \lambda)$, $\rho(f^*) \in f^*$ ($\rho(f^*)$ est λ -mesurable et appartient à la classe f^*) ; $\|\rho\| = 1$ signifie que $\sup_{\omega \in \Omega} |\rho(f^*)(\omega)| = \sup_{\omega \in \Omega} \text{ess.} \lambda |f^*|$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $e \mapsto \rho(v(e))(\omega)$ est une forme linéaire continue $\tilde{\Phi}(\omega)$ sur E , donc $\tilde{\Phi}(\omega) \in E'$; et $|\tilde{\Phi}(\omega)| \leq \|v(e)\|_{L^\infty(\Omega, \lambda)} \leq \|v\| |e|$. Comme $\langle \tilde{\Phi}(\omega), e \rangle = \rho(v(e))(\omega)$, on a $\langle \tilde{\Phi}, e \rangle = \rho(v(e))$, donc $\langle \tilde{\Phi}, e \rangle$ est λ -mesurable et par suite $\tilde{\Phi}$ est *-scalairement λ -mesurable, et $\langle \tilde{\Phi}, e \rangle^* = v(e)$, donc $v_{\tilde{\Phi}} = v$; et $\|\tilde{\Phi}\| \leq \|v\|$ donc $\|\tilde{\Phi}\|_{L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')} \leq \|\tilde{\Phi}\|_{\mathcal{L}(\Omega; E')} \leq \|v\|$, cqfd.

Lemme (2.2bis) : (λ n'a pas besoin d'être concassable). Si $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \lambda; E)$ et $\tilde{\Phi} \in L_*^0(\Omega, \lambda; E')$, $\langle \tilde{\Phi}, f \rangle : \omega \mapsto \langle \tilde{\Phi}(\omega), f(\omega) \rangle \in \mathbb{C}$ est λ -mesurable. Elle est λ -intégrable si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \lambda; E)$, $\tilde{\Phi} \in L_*^{p'}(\Omega, \lambda; E')$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

La classe $\langle \tilde{\Phi}, f \rangle^*$ ne dépend que des classes $f^* \in L^0(\Omega, \lambda; E)$, $\tilde{\Phi}^* \in L_*^0(\Omega, \lambda; E')$ et
 $|\int \langle \tilde{\Phi}, f \rangle d\lambda| \leq \|f^*\|_{L^p(\Omega, \lambda; E)} \|\tilde{\Phi}^*\|_{L_*^{p'}(\Omega, \lambda; E')}.$

Démonstration : Si f est étagée, $\langle \tilde{\Phi}, f \rangle$ est trivialement mesurable puisque $\tilde{\Phi}$ est *-scalairement mesurable. Mais, sur tout ensemble λ -intégrable, f

(1) Dorothy Maharam : "On a theorem of von Neumann" Proc. Amer. Math. Soc., tome 9, 1958, pp. 987-994. On trouvera des variantes dans Ionescu Tulcea : "On the lifting property", J. Math. Anal. Appl., tome 3, 1961, pp. 537-546, et dans P. A. Meyer : "Probabilités et potentiel" Paris, Hermann, 1966, page 195, théorème T12 du chap. VIII.

est limite λ -pp. d'une suite de fonctions étagées ; donc $\langle \Phi, f \rangle$ est toujours λ -mesurable. L'inégalité de Hölder est toujours valable :

$$\lambda \cdot (|\langle \Phi, f \rangle|) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \lambda; E)} \|\Phi\|_{\mathcal{L}_*^{p'}(\Omega, \lambda; E')} .$$

Mais $\langle \Phi, f \rangle$ est trivialement λ -pp nulle si f est λ -pp nulle ; mais aussi si Φ est $*$ -scalairement λ -pp nulle, car f est, sur tout ensemble λ -intégrable, limite λ -pp d'une suite de fonctions étagées. Donc $\langle \Phi, f \rangle'$ ne dépend que de Φ' et f' , et alors l'inégalité de Hölder devient celle de l'énoncé pour Φ' et f' .

Ceci va être utilisé, pour $p = 1$, $p' = +\infty$, au 3) du corollaire suivant :

Corollaire (2.3) :

1) $u \mapsto {}^t u$ est une bijection linéaire isométrique de $\mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E')$ sur $\mathcal{L}(E, L^\infty(\Omega, \lambda))$; le théorème (2.2) définit donc une bijection linéaire isométrique de $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ sur $\mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E')$, en associant à $\Phi \in \mathcal{L}_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ l'application linéaire continue u_Φ de $L^1(\Omega, \lambda)$ dans $E' : f \mapsto \int \Phi f d\lambda \in E'$ (intégrale $*$ -scalaire, définie par

$$\langle \int \Phi f d\lambda, e \rangle = \int \langle \Phi, e \rangle f d\lambda .$$

2) L'espace $\mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E')$ est linéairement isométrique à l'espace $\mathcal{B}(L^1(\Omega, \lambda), E)$ des formes bilinéaires continues sur $L^1(\Omega, \lambda) \times E$, en associant à $u \in \mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E')$ la forme bilinéaire continue $(f, e) \mapsto \langle u(f), e \rangle$. Donc le théorème (2.2) définit une bijection linéaire isométrique de $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ sur $\mathcal{B}(L^1(\Omega, \lambda), E)$, associant à $\Phi \in \mathcal{L}_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ la forme bilinéaire sur $L^1(\Omega, \lambda) \times E : (f, e) \mapsto \int \langle \Phi, e \rangle f d\lambda \in \mathbb{C}$.

3) L'espace $\mathcal{B}(L^1(\Omega, \lambda), E)$ des formes bilinéaires continues sur $L^1(\Omega, \lambda) \times E$ est le dual de $L^1(\Omega, \lambda) \hat{\otimes}_\pi E = L^1(\Omega, \lambda; E)$, $\mathcal{B}(L^1(\Omega, \lambda), E) \simeq (L^1(\Omega, \lambda; E))'$; l'isomorphisme associe à $\Theta \in (L^1(\Omega, \lambda; E))'$ la forme bilinéaire continue sur $L^1(\Omega, \lambda) \times E : (f, e) \mapsto \Theta(fe)$. Donc le théorème (2.2) définit un isomorphisme de $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ sur $(L^1(\Omega, \lambda; E))'$, qui associe à $\Phi \in \mathcal{L}_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ la forme linéaire continue sur $L^1(\Omega, \lambda; E) : f' \mapsto \int \langle \Phi, f' \rangle d\lambda \in \mathbb{C}$; ou encore $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$ est le dual de $L^1(\Omega, \lambda; E)$, la dualité étant définie par

$$\langle \Phi^*, f^* \rangle_{L_*^\infty(\Omega, \lambda; E'), L^1(\Omega, \lambda; E)} = \int \langle \Phi, f \rangle_{E', E} d\lambda = \int \langle \Phi(\omega), f(\omega) \rangle_{E', E} d\lambda(\omega).$$

En résumé brutal :

L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE E DANS $L^\infty(\Omega, \lambda)$,
L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE $L^1(\Omega, \lambda)$ DANS
E', L'ESPACE DES FORMES BILINIAIRES CONTINUES SUR $L^1(\Omega, \lambda) \times E$, LE
DUAL DE $L^1(\Omega, \lambda; E)$ SONT L'ESPACE $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$.

Définition (2.4) : On appelle $L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')$ ⁽¹⁾ le sous-espace fermé de $L_*^\infty(\Omega, \lambda; E'')$ formé des Φ^* pour lesquelles, pour tout $B \in \mathcal{O}$ λ -intégrable, $\int_B \Phi d\lambda$ (intégrale *-scalaire, a priori dans E'') est dans E.

Corollaire (2.4) : L'espace $\mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E)$ est isométrique à $L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')$; l'isomorphisme associe à $\Phi^* \in L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')$ l'application linéaire continue de $L^1(\Omega, \lambda)$ dans E : $f \mapsto \int \Phi f d\lambda$ (intégrale *-scalaire) $\in E$.

Démonstration : $\mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E)$ est le sous-espace de $\mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E'')$ envoyant $L^1(\Omega, \lambda)$ dans E, et $\mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E'') \simeq L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')$. Or une application linéaire continue de $L^1(\Omega, \lambda)$ dans E'' envoie $L^1(\Omega, \lambda)$ dans E dès qu'elle envoie les fonctions étagées λ -intégrables dans E, donc dès qu'elle envoie dans E toute fonction caractéristique 1_B d'un $B \in \mathcal{O}$ λ -intégrable.

Théorème (2.5) : Toute $\Phi \in \mathcal{L}_*^0(\Omega, \lambda; E)$ définit une application linéaire continue v_Φ de E dans $L^0(\Omega, \lambda)$, par $v_\Phi(e) = \langle \Phi, e \rangle^*$, si $\Phi = \Phi^*$ *-scalairement λ -pp., $v_\Phi = v_{\Phi^*}$, donc $\Phi^* \in L_*^0(\Omega, \lambda; E')$ définit $v_{\Phi^*} \in \mathcal{L}(E'; L^0(\Omega, \lambda))$. Pour qu'une application linéaire continue v de E dans $L^0(\Omega, \lambda)$ soit réalisée par une $\Phi^* \in L_*^0(\Omega, \lambda; E')$, i.e. que $v = v_{\Phi^*}$ (auquel cas Φ^* est évidemment unique), il faut et il suffit que la classe ≥ 0 λ -mesurable $\theta^* = \sup_{\substack{e \in E \\ |e| \leq 1}} |v(e)|$

(le SUP étant celui du théorème (2.1)), soit finie :

$\theta^* \in L^0(\Omega, \lambda; \mathbb{R}_+) \not\subseteq L^0(\Omega, \lambda; \overline{\mathbb{R}_+})$. Dans ce cas, θ^* est le module minimum des fonctions de la classe Φ^* : pour toute $\Phi \in \Phi^*$, $\theta \leq |\Phi|$ λ -pp., et il

(1) L'indice inférieur ** ne s'emploie donc que pour des fonctions à valeurs dans un bidual E'' .

existe une $\bar{\phi} \in \phi'$ telle que $|\bar{\phi}| = \theta$ (λ -mesurable).

Démonstration : Si $v = v_{\phi}$, la fonction (en générale non mesurable) $|\phi|$ majore toute $|\langle \phi, e \rangle|$ λ -pp., donc, d'après le théorème (2.1), $+\infty > |\phi| \geq \theta$ λ -pp. Cela prouve d'une part que θ' est finie, d'autre part que $\theta \leq |\phi|$ λ -pp pour toute $\phi \in \phi'$.

Inversement supposons θ finie. Considérons l'application linéaire de E dans $L^\infty(\Omega, \lambda)$: $e \mapsto v(e)/\theta'$ (là où $\theta = 0$, $v(e)$ est λ -pp. nulle puisque $|v(e)| \leq |e|_{\theta'}$, donc $v(e)/\theta = \frac{0}{0} = 0$), de norme ≤ 1 . D'après le théorème (2.2), il existe $\psi \in L_*^\infty(\Omega, \lambda; E')$, $|\psi| \leq 1$, telle que $\frac{v(e)}{\theta} = \langle \psi, e \rangle$ pour $e \in E$. Alors $v(e) = \langle \theta \psi, e \rangle = \langle \bar{\phi}, e \rangle$, où $\bar{\phi} = \psi \theta \in L_*^0(\Omega, \lambda; E')$ (puisque θ est λ -mesurable), et $|\bar{\phi}| \leq \theta$ donc $\theta = \theta$ λ -pp.

Remarque (2.6) :

1) Supposons E séparable. Alors toute θ *-scalairement mesurable à valeurs dans E' est mesurable à valeurs dans $\sigma(E', E)$ lusinien, et deux fonctions *-scalairement λ -pp. égales sont λ -pp. égales. Donc θ' est le module commun de toutes les $\phi \in \phi'$.

2) Supposons $\phi \in L^0(\Omega, \lambda; E')$, i.e. λ -mesurable. Alors elle prend ses valeurs dans un sous-Banach séparable G de E' . Soit D' dénombrable dense dans G . Pour tout $e' \in D'$, il existe $D_{e'}$ dénombrable de la boule unité de E tel que $|e'| = \sup_{e \in D_{e'}} |\langle e', e \rangle|$. Si alors $D = \bigcup_{e' \in D'} D_{e'}$, on a $|e'| = \sup_{e \in D} |\langle e', e \rangle|$

pour tout $e' \in D'$ donc aussi pour tout $e' \in G$. Donc $|\phi| = \sup_{e \in D} |\langle \phi, e \rangle| = \sup_{e \in E} |\langle \phi, e \rangle| \leq \theta$ donc $\theta = \theta$ λ -pp. Donc toute fonction mesurable (s'il en existe) $e \in E$

dans $\phi' \in L_*^0(\Omega, \lambda; E')$, réalise son module minimum. Il en résulte aussi que deux fonctions λ -mesurables de la même classe (s'il en existe) sont λ -pp. égales ; et aussi que, si

$$\phi \in L^p(\Omega, \lambda; E') \quad , \quad \|\phi'\|_{L^p(\Omega, \lambda; E')} = \|\phi'\|_{L_*^p(\Omega, \lambda; E')}$$

(le . n'ayant pas la même signification dans les deux membres : c'est la classe dans L^p pour le premier, dans L_*^p pour le deuxième).

Définition (2.7) : On appelle $L_{**}^0(\Omega, \lambda; E'')$ l'espace des $\phi' \in L_*^0(\Omega, \lambda; E')$ telles que, si θ' est la fonction de module minimum associée à ϕ' par le

théorème (2.5), alors, pour tout $B \in \mathcal{G}$ $\theta\lambda$ -intégrable ⁽¹⁾, $\int_B \Phi d\lambda$
(intégrale *-scalaire) $\in E$.

§ 3. PROPRIETE DE RADON-NIKODYM (RNP, RADON-NIKODYM-PROPERTY) PAR LES FONCTIONS *-SCALAIREMENT MESURABLES.

La propriété de Radon-Nikodym n'a rien à voir ni avec Radon ni avec Nikodym, mais elle est liée au théorème de Dunford-Pettis-Maharam. En comparaison avec le corollaire (2.4) :

Définition (3.1) : On dit que E a la propriété RNP si, pour toute λ , toute application linéaire continue de $L^1(\Omega, \lambda)$ dans E est définie par une $\Phi' \in L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')$ admettant un représentant $\Phi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda; E)$.

En résumé brutal :

E A LA PROPRIETE RNP SI L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE TOUT $L^1(\Omega, \lambda)$ DANS E EST $L^\infty(\Omega, \lambda; E)$.

Deux représentants Φ, Φ' ayant cette propriété sont égaux λ -pp. d'après la remarque (2.6), et en outre $\|\Phi'\|_{L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')} = \|\Phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda; E)}$. On a donc une autre forme de la définition :

Définition (3.1bis) : E a la propriété RNP si, pour tout $\Omega, \mathcal{G}, \lambda$, l'application canonique de $L^\infty(\Omega, \lambda; E)$ dans $L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')$ est une bijection isométrique de $L^\infty(\Omega, \lambda; E)$ sur $L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'') \simeq \mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E)$.

Il suffit trivialement (par concassage) que ceci soit vrai pour toute probabilité λ ; nous verrons même plus loin qu'il suffit que ce soit vrai pour $\Omega = [0, 1]$, λ - mesure de Lebesgue.

Nous verrons que tout Banach réflexif, tout dual séparable (exemple : ℓ^1) vérifient RNP. On peut le démontrer par l'une quelconque

(1) La mesure $\theta\lambda$ est définie par $(\theta\lambda)(B) = \lambda'(\theta 1_B)$ pour $B \in \mathcal{G}$; elle est essentielle, et concassable lorsque λ est concassable et que θ est λ -pp. finie. Pour toute $f \geq 0$, $(\theta\lambda)'(f) = \lambda'(\theta f)$; f banachique est $\theta\lambda$ -intégrable si et seulement si θf est λ -intégrable, et les intégrales sont égales. Voir appendice.

des propriétés nécessaires et suffisantes de ce paragraphe ou des suivants ; nous choisirons le moment où c'est le plus rapide (corollaire (4.5)).

Théorème (3.2) : Si E vérifie RNP, toute classe $\bar{\phi}$ de $L_{**}^0(\Omega, \lambda; E)$ admet un représentant $\phi \in \mathcal{L}^0(\Omega, \lambda; E)$, qui réalise le module minimum θ de $\bar{\phi}$ suivant le théorème (2.5) ; ou encore l'application naturelle $L^0(\Omega, \lambda; E) \rightarrow L_{**}^0(\Omega, \lambda; E'')$ est une bijection de $L^0(\Omega, \lambda; E)$ sur $L_{**}^0(\Omega, \lambda; E'')$.

Inversement, si la propriété ci-dessus est vraie pour toute $\bar{\phi} \in L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'')$, E vérifie RNP.

En résumé brutal :

E A LA PROPRIETE RNP SI ET SEULEMENT SI $L_{}^0(\Omega, \lambda; E'') = L^0(\Omega, \lambda; E)$.**

Démonstration : Supposons que E vérifie RNP, et soit $\bar{\phi} \in \mathcal{L}_{**}^0(\Omega, \lambda; E)$.

Soit θ définie par le théorème (2.5). Alors, si f est une fonction étagée $\theta\lambda$ -intégrable, $\int f \bar{\phi} d\lambda$ (intégrale *-scalaire) $\in E$, et son module est $\leq \|f\|_{L^1(\Omega, \theta\lambda)}$. Donc $f \mapsto \int \bar{\phi} f d\lambda$ se prolonge en une application linéaire

continue, de norme ≤ 1 , de $L^1(\Omega, \theta\lambda)$ dans E. Comme E vérifie RNP, il existe $\psi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \theta\lambda; E)$, $|\psi| \leq 1$, telle que $\int \bar{\phi} f d\lambda = \int \psi f \theta d\lambda$; on peut remplacer ψ par 0 là où $\theta = 0$, alors $\psi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda; E)$. Alors $\int \bar{\phi} f d\lambda = \int \bar{\phi} f d\lambda$, si $\bar{\phi} = \psi \theta$; $|\bar{\phi}| \leq \theta$, et $\bar{\phi} \in L^0(\Omega, \lambda; E)$. Cela entraîne que $\bar{\phi} = \phi$

*-scalairement $\theta\lambda$ -pp. ; mais $\bar{\phi} = 0$ là où $\theta = 0$, et $\phi = 0$ *-scalairement λ -pp. là où $\theta = 0$, donc $\bar{\phi} = \phi$ *-scalairement λ -pp. On a donc bien montré que $L^0(\Omega, \lambda; E)$ s'envoie surjectivement sur $L_{**}^0(\Omega, \lambda; E'')$; l'injectivité résulte de la remarque (2.6), 2.

Inversement, si l'on a les propriétés précédentes pour toute $\bar{\phi}$ bornée, cela veut dire exactement que $L_{**}^\infty(\Omega, \lambda; E'') = L^\infty(\Omega, \lambda; E)$, donc que E vérifie RNP.

§ 4. LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM ET LES PROBABILITES CYLINDRIQUES

Théorème (4.1) (Kwapien) : Soit Λ une probabilité cylindrique sur $\sigma(E', E)$; supposons-la définie par une fonction aléatoire linéaire $v : E \rightarrow L^0(\Omega, \lambda)$, λ probabilité.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Λ est de Radon ;
- 2) v est réalisable par une fonction $\Phi \in \mathcal{L}_*^0(\Omega, \lambda; E')$;
- 3) $\theta^* = \sup_{\substack{e \in E \\ |e| \leq 1}} |v(e)|$ est finie, i.e. $\in L^0(\Omega, \lambda; \mathbb{R}_+)$ et alors on peut choisir
 Φ avec $|\Phi| = \theta^*$.

Dans ce cas, Λ est d'ordre p si et seulement si $\theta \in L^p(\Omega, \lambda)$, et

$$\|\Lambda\|_p = \|\theta\|_{L^p(\Omega, \lambda)} = \|\Phi^*\|_{L^p_*(\Omega, \lambda; E')}$$
.

Démonstration : L'équivalence de 2 et 3 est le théorème (2.5). Montrons donc l'équivalence de 1 et 2. D'après Prokhorov, Λ est de Radon si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R < +\infty$ tel que Λ soit cylindriquement concentrée à ε près sur la boule $B(R)$ de rayon R (compacte dans $\sigma(E', E)$), i.e., pour toute w linéaire continue de $\sigma(E', E)$ dans un espace vectoriel G de dimension finie, $(w(\Lambda))(w(B(R))) \geq 1 - \varepsilon$.

Si alors $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont des éléments de E , $|e_i| \leq 1$, l'image de $B(R)$ par $(e_1, \dots, e_n) : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ est contenue dans le cube $Q_{e_1, \dots, e_n}(R) = \{(z_1, \dots, z_n) ; |z_1| \leq R, \dots, |z_n| \leq R\}$, donc la condition $((e_1, \dots, e_n)(\Lambda))((e_1, \dots, e_n)(B(R))) \geq 1 - \varepsilon$ entraîne $((e_1, e_2, \dots, e_n)(\Lambda))(Q_{e_1, \dots, e_n}(R)) \geq 1 - \varepsilon$. Mais la réciproque est vraie. Supposons en effet que cette condition soit vérifiée pour tous $e_1, \dots, e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Soit w linéaire continue de $\sigma(E', E)$ dans un espace vectoriel G de dimension finie. Alors, par Hahn Banach, $w(B(R))$ est l'intersection des $\{g \in G ; |\langle \eta, g \rangle| \leq R\}$ qui le contiennent, $\eta \in G'$; il est donc l'intersection de l'ordonné filtrant décroissant de leurs intersections finies ; donc si, pour tout système fini $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in G'$ tel que les $\{g \in G ; |\langle \eta_i, g \rangle| \leq R\}$ contiennent $w(B(R))$, on a $(w(\Lambda)) \{g \in G ; |\langle \eta_1, g \rangle| \leq R, \dots, |\langle \eta_n, g \rangle| \leq R\} \geq 1 - \varepsilon$, on a aussi $(w(\Lambda))(w(B(R))) \geq 1 - \varepsilon$ et Λ sera cylindriquement concentrée à ε près sur $B(R)$. Mais $\{g \in G ; |\langle \eta_i, g \rangle| \leq R\} \supset w(B(R))$ équivaut à $|(\eta_i \circ w)(B(R))| \leq R$ ou $|\eta_i \circ w|_E \leq 1$; d'autre part $w(\Lambda) \{g \in G ; |\langle \eta_1, g \rangle| \leq R, \dots, |\langle \eta_n, g \rangle| \leq R\} = ((\eta_1 \circ w, \dots, \eta_n \circ w)(\Lambda)) \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; |z_1| \leq R, \dots, |z_n| \leq R\} = ((e_1, \dots, e_n)(\Lambda))(Q_{e_1, \dots, e_n}(R))$ si $e_i = \eta_i \circ w$. Donc l'ensemble des conditions $(e_1, \dots, e_n)(\Lambda)(Q_{e_1, \dots, e_n}(R)) \geq 1 - \varepsilon$, $|e_i| \leq 1$, est bien équivalent à la concentration cylindrique de Λ à ε près sur $B(R)$.

Mais $(e_1, \dots, e_n)(\Lambda)$ est aussi l'image de λ par $(v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_n))$, λ -classe d'applications $\Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$. Donc la condition s'écrit :

$J_\varepsilon(\lambda, \text{Sup}(|v(e_1)|, \dots, |v(e_n)|)) \leq R$. Ceci est vrai quelque soit le système fini $e_1, e_2, \dots, e_n$, si et seulement si $J_\varepsilon(\theta) \leq R$ (J_ε est semi continue inférieurement sur $L^0(\Omega, \lambda; \overline{\mathbb{R}})$). Et $J_\varepsilon(\theta)$ est fini pour tout ε si et seulement si θ^* est finie.

Soit N la fonction norme sur E , semi-continue inférieurement sur $\sigma(E', E)$. C'est la Sup des fonctions $e' \mapsto |\langle e, e' \rangle|$, pour $|e| \leq 1$; comme Λ est de Radon, le Sup ponctuel d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est aussi leur SUP dans $L^0(\sigma(E', E), \Lambda; \overline{\mathbb{R}})$. Comme le SUP est aussi la limite dans $L^0(\sigma(E', E), \Lambda; \overline{\mathbb{R}})$ de l'ordonné filtrant des Sup finies, l'image $N(\Lambda)$ est la limite étroite des images de Λ par les fonctions $e' \mapsto \text{Max}(|\langle e_1, e' \rangle|, |\langle e_2, e' \rangle|, \dots, |\langle e_n, e' \rangle|)$, $|e_i| \leq 1$; c'est donc aussi la limite étroite des images de λ par les fonctions sur Ω : $\text{Max}(|v(e_1)|, |v(e_2)|, \dots, |v(e_n)|)$, c.à.d. l'image $\theta(\lambda) : N(\Lambda) = \theta(\lambda)$. Mais $\|\Lambda\|_p = (\int t^p(dN(\Lambda))(t))^{1/p} = (\int t^p(d\theta(\lambda))(t))^{1/p} = (\int \theta^p d\lambda)^{1/p}$, cqfd.

Remarque : On peut beaucoup généraliser le dernier résultat. Soient E, E' deux evtlcs en dualité séparante. Soit Λ une probabilité de Radon sur $\sigma(E', E)$. Soit U une fonction $\sigma(E', E) \rightarrow]-\infty, +\infty]$, non identique à $+\infty$, semi-continue inférieurement (sci) et convexe. Sa duale de Moreau U^* sur E est définie par : $U^*(e) = \text{Sup}_{e' \in E'} (\langle e', e \rangle - U(e'))$. Alors U^* est aussi à

valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, non identique à $+\infty$, semi continue inférieurement sur $\sigma(E, E')$ et convexe ; et sa duale de Moreau est $U = U^{**}$,
 $U(e') = \text{Sup}_{e \in E} (\langle e', e \rangle - U^*(e))$. Alors on peut montrer $U(\Lambda) = \theta(\lambda)$, si

$$\theta^* = \text{SUP}_{e \in E} (v(e) - U^*(e)).$$

Définition (4.2) : Soit Λ une probabilité cylindrique sur E . On dit qu'elle est de type (τ, p) si, lorsque $\xi \in E'$ converge vers 0 dans $\tau(E', E)$, $\|\xi(\Lambda)\|_p$ converge vers 0; $0 < p \leq +\infty$.⁽¹⁾ Si Λ est réalisée par une fonction aléatoire linéaire $E' \rightarrow L^0(\Omega, \lambda)$, cela revient à dire que v est continue de $\tau(E', E)$ dans $L^p(\Omega, \lambda)$; dans le cas $p = 1$, qui va nous intéresser maintenant, comme $L^1 = \tau(L^1, L^\infty)$, cela revient à dire qu'elle est continue $\tau(E', E) \rightarrow \tau(L^1, L^\infty)$ ou $\sigma(E', E) \rightarrow \sigma(L^1, L^\infty)$, ou que sa transposée ${}^t v$ envoie (continuellement) $L^\infty(\Omega, \lambda)$ dans E .

(1) Λ est de type $(\tau, 0)$ si, lorsque ξ converge vers 0 dans $\tau(E', E)$, $\xi(\Lambda)$ converge étroitement vers 0.

Théorème (4.3) : Si E vérifie RNP, toute probabilité cylindrique Λ sur E, qui est de type $(\tau, 1)$ sur E et de Radon sur $\sigma(E'', E')$, est de Radon sur E. Inversement, si cette propriété est réalisée pour les Λ de type $+\infty$ sur E (qui sont toujours de Radon sur $\sigma(E'', E')$) et de type $(\tau, 1)$, E vérifie RNP.

Démonstration : Supposons que E vérifie RNP, et que Λ , de type $(\tau, 1)$ sur E et de Radon sur $\sigma(E'', E')$, soit réalisée par $v : E' \rightarrow L^0(\Omega, \lambda)$. D'après le théorème (4.1), il existe $\Phi \in \mathcal{L}_*^0(\Omega, \lambda; E'')$ telle que $\langle \Phi, \xi \rangle = v(\xi)$ pour tout $\xi \in E'$. Mais ${}^t v$ envoie $L^\infty(\Omega, \lambda)$ dans E, donc a fortiori $L^\infty(\Omega, \theta\lambda)$ dans E, où θ est associée à v et Φ par le théorème (4.1). Si donc $B \in \mathcal{G}$ est $\theta\lambda$ -intégrable, la forme linéaire continue sur $E' : \xi \mapsto \int_B \langle \Phi, \xi \rangle d\lambda$ est un élément de E ; donc $\int_B \Phi d\lambda$ (intégrale *-scalaire) $\in E$. Alors le théorème (3.2) dit qu'on peut choisir $\Phi \in \mathcal{L}^0(\Omega, \lambda; E)$, et alors $\Lambda = \Phi(\lambda)$ est de Radon sur E.

Inversement, supposons que toute Λ de type $+\infty$ et de type $(\tau, 1)$ sur E soit de Radon sur E. Soit $u \in \mathcal{L}(L^1(\Omega, \lambda); E)$, λ probabilité. Alors $v = {}^t u$ est continue de $\tau(E', E)$ dans $\tau(L^\infty, L^1)$ donc a fortiori dans $\tau(L^1, L^\infty) = L^1(\Omega, \lambda)$, elle est de type $(\tau, 1)$. Donc Λ est de Radon sur E et comme elle est de Radon d'ordre $+\infty$ sur $\sigma(E'', E')$, elle l'est aussi sur E. On sait qu'alors elle est réalisable par une $\Phi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda; E)^{(1)}$, donc E vérifie RNP.

Théorème (4.4) (Linde-Pietsch) : Si E vérifie RNP, toute application 1-sommante d'un Banach G dans E est 1-radonifiante ; si G est un espace $C(\Omega)$, Ω compact, elle est 1-nucléaire et sa norme/est sa norme 1-sommante. Inversement, si toute application d'un espace $L^\infty(\Omega, \lambda)$ dans E, λ probabilité de Radon sur un Ω compact, est 1-radonifiante, E vérifie RNP.

Démonstration : Supposons que E vérifie RNP, et que u soit 1-sommante $G \rightarrow E$. Elle est alors 1-radonifiante de G dans $\sigma(E'', E')$. Soit Λ cylindrique

(1) Ceci est connu classiquement pour λ de Radon sur Ω compact (voir prop. (XIII, 3.1), exposé XIII, séminaire Ecole Polytechnique 1969-70); mais c'est vrai pour λ abstraite quelconque.

de type 1 sur G . $u(\Lambda)$ est de Radon sur $\sigma(E'', E')$. Mais elle est de type $(\tau, 1)$ sur E ; en effet, u est faiblement compacte, donc ${}^t u$ est continue de $\tau(E', E)$ dans G' , et Λ est de type 1, ce qui veut dire que si η converge vers 0 dans G' , $\|\eta(\Lambda)\|_1$ tend vers 0. Donc, d'après le théorème (4.3), $u(\Lambda)$ est de Radon sur E , et u est bien 1-radonifiante. Si $G = C(\Omega)$, u se factorise par $C(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega, \lambda) \xrightarrow{j} L^1(\Omega, \lambda) \xrightarrow{w} E$, λ probabilité convenable⁽²⁾. Alors, E ayant la propriété RNP, w se réalise, par définition par une $\Phi' \in L^\infty(\Omega, \lambda; E)$, $\|\Phi'\| = \|w\| = \pi_1(u)$. Alors wj se réalise par $\Phi \in L^1(\Omega, \lambda; E) = L^1(\Omega, \lambda) \hat{\otimes}_\pi E$, donc $u = wj$ est nucléaire, et $\|u\|_{\text{nucl.}} \leq \|\Phi'\| = \pi_1(u)$.

Inversement, supposons que toute application 1-sommante d'un $L^\infty(\Omega, \lambda)$ (λ probabilité de Radon sur Ω compact) dans E , soit 1-radonifiante. Soit Λ une probabilité cylindrique sur E , de type $+\infty$ et de type $(\tau, 1)$. Elle peut être réalisée par une $v: E' \rightarrow L^\infty(\Omega, \lambda)$, $u = {}^t v: L^1(\Omega, \lambda) \rightarrow E$. Alors $V: C(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega, \lambda) \xrightarrow{u} E$ est 1-sommante, donc 1-radonifiante. L'application $v \mapsto v/\lambda$, densité de la partie absolument continue de v par rapport à λ , est une application linéaire continue de $C(\Omega)$ dans $L^1(\Omega, \lambda)$, donc définit une probabilité cylindrique ∇ de type 1 sur $C(\Omega)$; donc $V(\nabla)$ est de Radon sur E . Mais $V(\nabla)$ est réalisée par v (car $v(e) = \frac{v(e)\lambda}{\lambda}$), donc c'est Λ , qui est donc de Radon, nécessairement d'ordre $+\infty$ puisqu'elle l'est sur $\sigma(E'', E')$. Donc le théorème (4.3) dit que E vérifie RNP.

Corollaire (4.5) : Un Banach réflexif, un dual séparable de Banach, ont la propriété RNP.

Démonstration : Ils vérifient la condition du théorème (4.4).

Corollaire (4.6) : Si E' vérifie RNP, tout opérateur intégral d'un Banach dans E' est nucléaire, et tout opérateur intégral de E dans un dual de Banach est nucléaire (et la norme nucléaire est la norme intégrale)

Démonstration : Si $G \rightarrow E'$ est intégral, il se factorise par $G \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow E'$, et $L^\infty \rightarrow L^1 \rightarrow E'$ est nucléaire par le théorème (4.4). Si $E \rightarrow G'$ est intégral, son transposé $G \rightarrow E'$ l'est aussi, donc est nucléaire, donc lui aussi l'est.

(2) Pour $p \geq 1$, la mesure de Pietsch est portée par l'adhérence de l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $C(\Omega)$, on peut donc la prendre λ sur Ω ; et alors l'adhérence de l'image de $C(\Omega)$ dans $L^p(\Omega, \lambda)$ est $L^p(\Omega, \lambda)$ lui même.

Corollaire (4.7) : Si E' vérifie RNP, toute application 1-sommante de E dans un Banach est 1-radonifiante.

Démonstration : Par la factorisation de Pietsch, il suffit de savoir que tout opérateur $E \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1$ est 1-radonifiant ; or $E \rightarrow L^\infty \rightarrow L^1 \hookrightarrow (L^1)''$ est nucléaire par le corollaire (4.6).

Remarque : Dans le Séminaire de l'Ecole Polytechnique 1969-1970, exposé (XII,4), § 3, nous avons signalé les cas suivants où une application 1-sommante de E dans G est 1-radonifiante : G est réflexif ou dual séparable de Banach ; E est réflexif ou de dual séparable. Nous venons de voir plus généralement que c'est vrai si G ou E' vérifie RNP (théorème (4.4) et corollaire (4.7)).
