

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. REVERSAT

Recouvrement d'un cercle par des intervalles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 13, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A12_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
11, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

RECouvreMENT D'UN CERCLE PAR DES INTERVALLES

par M. REVERSAT

Exposé N° XIII

19 Février 1975

Les problèmes considérés consistent en l'étude des éléments x de \mathbb{R}/\mathbb{Z} pour lesquels il existe une infinité de solutions en entiers n à l'inéquation

$$\|x - u_n\| < \varepsilon_n$$

(où $\|\cdot\|$ est définie par : $\|x\| = \min_{n \in \mathbb{N}} |\dot{x} - n|$, \dot{x} désignant un représentant dans \mathbb{R} de $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$), (u_n) étant une suite donnée d'éléments de \mathbb{R}/\mathbb{Z} et (ε_n) une suite donnée de nombres réels positifs, décroissante, telle que la série $\sum \varepsilon_n$ soit divergente. C'est-à-dire que si l'on désigne par I_n l'intervalle ouvert de centre u_n et de rayon ε_n , on étudie l'ensemble $\bigcap_{N \geq n} \bigcup_{n \geq N} I_n$. Si cet ensemble est de mesure pleine on dit que la suite (u_n) est (ε_n) -eutaxique. Une suite (u_n) est dite eutaxique si elle est (ε_n) -eutaxique pour toute suite (ε_n) décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge.

Ces problèmes ont d'abord été étudiés par J. Lesca ([5]). Les motivations en sont arithmétiques (l'étude des éléments de \mathbb{R}/\mathbb{Z} étant celle des parties décimales des nombres réels) et conduisent donc à l'étude de recouvrement d'un cercle par des intervalles. Des problèmes voisins furent précédemment étudiés : recouvrement d'un cercle (de longueur 1) par des intervalles (I_n) , de longueurs (ε_n) ((ε_n) étant une suite décroissante de nombres réels positifs), et dont les centres sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur le cercle ([3], ch. IX). Le lemme de Borel-Cantelli montre qu'alors $I = \bigcap_{N \geq n} \bigcup_{n \geq N} I_n$ est presque sûrement de complémentaire négligeable et, dans le cas où $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, P. Billard a montré que le complémentaire de I est presque sûrement vide ou dénombrable ([1]). Dans les problèmes d'eutaxie, au contraire, la suite des centres des intervalles I_n est fixée, et le fait que I soit de complémentaire négligeable ne peut résulter du lemme de Borel-Cantelli.

Il fut aussi étudié la mesure de l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour lesquels l'inéquation

$$\|n\alpha - x\| < \varepsilon_n$$

a une infinité de solutions n , x étant un élément de \mathbb{R}/\mathbb{Z} fixé, (ε_n) une suite décroissante fixée de nombres réels positifs (problème métrique de Khintchine : [4], [2] ch. VIII). Cette équation admet une infinité de solutions pour presque tout ou presque aucun α selon que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge ou converge. Cela implique, (ε_n) étant donnée, que $(n\alpha)$ est (ε_n) -eutaxique pour α appartenant à un ensemble de complémentaire négligeable. Comme cet ensemble dépend de la suite (ε_n) , il n'en résulte pas que $(n\alpha)$ est eutaxique pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En effet, comme l'a montré J. Lesca et comme il résulte du critère énoncé plus loin, $(n\alpha)$ est eutaxique pour presque aucun α (plus précisément : si et seulement si

$$\psi(\alpha) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \|n\alpha\|} < +\infty).$$

§ 1. UNE MESURE DE REPARTITION

Il est facile de voir qu'une suite eutaxique est dense et qu'une suite dense est (ε_n) -eutaxique pour toute suite (ε_n) qui ne tend pas vers zéro. Une suite eutaxique doit donc être "bien répartie". Pour étudier la répartition des suites d'éléments de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , nous introduisons les fonctions λ ([7], [8], [9]) définies par : pour toute suite $u = (u_n)$ d'éléments de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , pour tout intervalle I de \mathbb{R}/\mathbb{Z} de mesure non nulle et pour tout entier N , on désigne par $\lambda(I, n, N)$ le nombre d'entiers k tels que $0 \leq k < N$, et tels que $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right[\cap I$ contienne au moins un point u_n avec $1 \leq n \leq N$. Posons :

$$\lambda(I, u) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda(I, u, N)}{N \mu(I)}.$$

Remarquons que les fonctions λ sont invariantes par le "shift-endomorphisme", c'est-à-dire par l'application de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ dans lui-même qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}$.

Théorème 1 : S'il existe un intervalle I (de mesure non nulle) tel que $\lambda(I, u) = 0$, la suite u n'est pas eutaxique.

Preuve : Si $\lambda(I, u) = 0$, on peut alors construire par récurrence une suite d'entiers positifs (N_k) telle qu'en posant $M_s = \sum_{0 < t \leq s} N_t$ (et $M_0 = 0$) on ait pour tout $s \geq 0$

$$\lambda(I, T^{M_s}(u), N_{s+1}) \leq \frac{N_{s+1}}{2^{s+1}}$$

(où T^{M_s} désigne la M_s -ième itérée du "shift-endomorphism").

Soit (ε_n) la suite définie par : $\varepsilon_n = \frac{1}{2N_{s+1}}$ si $M_s < n \leq M_{s+1}$.

Cette suite décroît et la série $\sum \varepsilon_n$ diverge (car $\sum_{M_s < n \leq M_{s+1}} \varepsilon_n = \frac{1}{2}$ pour

tout s).

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $I_n =]u_n - \varepsilon_n, u_n + \varepsilon_n[$. On a

$$\begin{aligned} \mu(I \cap \bigcup_{M_s < n \leq M_{s+1}} I_n) &\leq \lambda(I, T^{M_s}(u), N_{s+1}) \frac{3}{N_{s+1}} \\ &\leq \frac{3}{2^{s+1}}. \end{aligned}$$

Donc $\mu(I \cap (\bigcap_{N \geq n} \bigcup_{n \geq N} I_n)) = 0$. La suite (u_n) n'est pas eutaxique.

§ 2. UNE CONDITION SUFFISANTE

La réciproque du théorème 1 est fautive, cependant, si l'on pose $\chi(u) = \inf_I \lambda(I, u)$ (I parcourant les intervalles de \mathbf{R}/\mathbf{Z} de mesure non nulle et à extrémités rationnelles), on a le résultat :

Théorème 2 : Si $\chi(u) > 0$, la suite u est eutaxique.

Preuve : Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge. Soit $V_n =]u_n - \varepsilon_n, u_n + \varepsilon_n[$ et $V = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} V_n$. Comme les fonctions λ sont invariantes par le "shift-endomorphism", il suffit de montrer que $\mu(V) = 1$. Soit a tel que $0 < a < \chi(u)$. La démonstration se déroule en deux étapes selon que la suite (ε_n) décroît lentement ou rapidement :

Lemme 1 : S'il existe un intervalle I (de mesure non nulle et à extrémités rationnelles) tel que $\mu(I \cap V) \leq \frac{a}{4} \mu(I)$, alors pour toute suite (t_s) d'entiers positifs telle que $\frac{t_s}{t_{s-1}} > \frac{8}{a\mu(I)}$, il existe un entier s_0 tel que $\varepsilon_{t_s} < \frac{1}{2t_s}$ si $s \geq s_0$.

Preuve : Soit $(t_s)_{s \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs telle que

$\frac{t_s}{t_{s-1}} > \frac{8}{a\mu(I)}$ et soit s_1 tel que $\lambda(I, u, t_s) > a\mu(I)t_s$ si $s \geq s_1$. Soit $s > s_1$, et supposons que $\varepsilon_{t_s} \geq \frac{1}{2t_s}$. Posons $U_s = \bigcup_{t_{s-1} < n \leq t_s} V_n$. Les intervalles

$\left[\frac{k}{t_s}, \frac{k+1}{t_s} \right]$ ($k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < t_s$) inclus dans I et contenant au moins un point u_n avec $t_{s-1} < n \leq t_s$ sont au moins au nombre de $a\mu(I)t_s - t_{s-1} - 2$ (car il y en a au plus t_{s-1} qui contiennent un point u_n avec $1 \leq n \leq t_{s-1}$ et au plus 2 non contenus dans I et contenant un point u_n tel que $t_{s-1} < n \leq t_s$ et que $u_n \in I$). Pour chacun de ces intervalles, on a

$$\mu\left(U_s \cap \left[\frac{k}{t_s}, \frac{k+1}{t_s} \right]\right) \geq \frac{1}{2t_s}, \quad \text{puisque}$$

si $t_{s-1} < n \leq t_s$, on a $\varepsilon_n \geq \varepsilon_{t_s} \geq \frac{1}{2t_s}$. Donc :

$$\mu(U_s \cap I) \geq \frac{1}{2t_s} (a\mu(I)t_s - t_{s-1} - 2) > \frac{a}{4}\mu(I)$$

pour s suffisamment grand, d'où la contradiction.

Lemme 2 : Pour tout intervalle I de \mathbb{R}/\mathbb{Z} (de longueur non nulle et d'extrémités rationnelles) on a :

$$\mu(I \cap V) > \frac{a}{4} \mu(I) .$$

Preuve : Soit I un intervalle de \mathbb{R}/\mathbb{Z} de longueur non nulle et d'extrémités rationnelles tel que $\mu(I \cap V) \leq \frac{a}{4} \mu(I)$. Soit (t_s) une suite d'entiers

positifs tels que $\frac{t_s}{t_{s-1}} = \delta$, où δ est un entier positif, $\delta > \frac{8}{a\mu(I)}$. Soit

(ε'_n) la suite définie par $\varepsilon'_n = \varepsilon_{t_s}$ si $t_{s-1} < n \leq t_s$, et pour tout s , soit

$W_{t_s} = \bigcup_{n \leq t_s}]u_n - \varepsilon'_n, u_n + \varepsilon'_n[$. D'après le lemme 1, on peut supposer s suffisamment grand pour que $u_{t_s} < \frac{1}{2t_s}$.

Evaluons $\mu(I \cap (W_{t_s} - W_{t_{s-1}}))$: les intervalles $\left[\frac{k}{t_s}, \frac{(k+1)}{t_s} \right]$

rencontrant $I \cap W_{t_{s-1}}$ sont au plus au nombre de $(\frac{a}{4}\mu(I)t_s + 2t_{s-1})$ puisque

$\mu(I \cap W_{t_{s-1}}) \leq \frac{a}{4}\mu(I)$ et que $W_{t_{s-1}}$ possède au plus t_{s-1} composantes connexes.

D'autre part, ceux contenus dans I et contenant un point u_n avec $t_{s-1} < n \leq t_s$ sont au moins au nombre de $(a\mu(I)t_s - (t_{s-1} - 2))$. Donc :

$$\mu(I \cap (W_{t_s} - W_{t_{s-1}})) \geq \left(\frac{3a}{4} \mu(I)t_s - 3t_{s-1} - 2\right) \varepsilon_{t_s} \geq \frac{3a}{16} \mu(I) t_s \varepsilon_{t_s},$$

ce qui est contradictoire avec le lemme suivant :

Lemme 3 : La série $\sum_s t_s \varepsilon_{t_s}$ diverge.

Preuve :

$$\begin{aligned} t_s \varepsilon_{t_s} &= \frac{t_s}{t_{s+1} - t_s} (t_{s+1} - t_s) \varepsilon_{t_s} \geq \frac{t_s}{t_{s+1} - t_s} \sum_{n=t_{s+1}}^{t_{s+1}} \varepsilon_n \\ &= \frac{1}{\delta - 1} \sum_{n=t_{s+1}}^{t_{s+1}} \varepsilon_n. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_s t_s \varepsilon_{t_s} \geq \frac{1}{\delta - 1} \sum_{n \geq t_1} \varepsilon_n.$$

Fin de la démonstration du théorème 2 : Le lemme 2 prouve que V est de densité positive en tout point de \mathbb{R}/\mathbb{Z} et par suite, d'après un théorème de Lebesgue, que V est de complémentaire négligeable.

§ 3. QUELQUES EXEMPLES

Le critère précédant permet de montrer qu'il existe "beaucoup" de suites eutaxiques :

Corollaire 1 : Presque toute suite d'éléments de \mathbb{R}/\mathbb{Z} (relativement à la mesure de Haar de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$) est eutaxique.

On peut en effet montrer que, relativement à la mesure de Haar de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, on a pour presque toute suite u $\chi(u) \geq t$, où t est le nombre de l'intervalle $]0,1[$ tel que $t^t (e(1-t))^{1-t} = 1$ ([8], [9]).

Comme exemples de suites eutaxiques, on a :

Corollaire 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La suite $(n\alpha)$ est eutaxique si et seulement si le nombre $M(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \|n\alpha\|}$ est fini (c'est-à-dire pour presque aucun α).

On a en effet ([7], [8], [9]) $\frac{1}{1+M(\alpha)} \leq \chi(u) \leq 2 \sqrt{\frac{2}{M(\alpha)}}$. Ce corollaire résulte donc des théorèmes 1 et 2.

Les méthodes du chapitre 3 de [6] et le théorème 1 permettent aussi de montrer :

Corollaire 3 : Soit (a_n) une suite croissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum \frac{a_n}{a_{n+1}}$ soit convergente. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n x)$ est eutaxique (modulo 1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Billard : Série de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes, Ann. Sc. E.N.S., 82, (1965), 131-179.
- [2] J.W.S. Cassels : An introduction to diophantine approximation, Cambridge tracts in Math., No 45, (1965).
- [3] J.P. Kahane : Some random series of functions, Heath Mathematical Monographs, Lexington, Mass. (1968).
- [4] A. Khintchine : Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z., 24 (1926), 706-714.
- [5] J. Lesca : Approximations diophantiennes à une dimension, thèse sc. math, Grenoble (1968).
- [6] B. de Mathan : Approximations diophantiennes dans un corps local, Bull. Soc. Math. France, mémoire 21, (1970).
- [7] B. de Mathan : Un critère de non-eutaxie, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, A (1971), p. 433-436.
- [8] M. Reversat : Un critère d'eutaxie, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, A (1973), p. 405-407.
- [9] M. Reversat : Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites, thèse 3ème cycle, Bordeaux (1973).
-