Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Pisier

Sur les espaces qui ne contiennent pas de l_n^1 uniformément

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 7, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A9_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

SUR LES ESPACES QUI NE CONTIENNENT PAS DE l_n^1 UNIFORMEMENT

par

G. PISIER

Exposé N° VII

12 Décembre 1973

Nous allons montrer comment la théorie des espaces B-convexes introduits par A. Beck [1] pour caractériser les espaces de Banach dans lesquels une certaine forme de loi des grands nombres est vérifiée se rattache à la théorie des espaces de type p.
Dans toute la suite, les espaces vectoriels considérés seront sur le corps des réels. En fait, cela n'est pas une restriction car il résulte de [2] (théorème I. 5) qu'un espace normé complexe contient uniformément des l^1_n complexes si et seulement si il contient uniformément des l^1_n réels.
A l'aide de cette proposition, il est facile de voir que tous les résultats qui suivent s'étendent au cas complexe.

<u>Définition 1</u> : Soit E un espace normé, soit k un entier et ε dans $]0,1]$; E est dit B-(k,ε) convexe si, pour tout k-uple $(x_1,\dots,x_k)$ d'éléments de E, on a :

$$\inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_i x_i \right\| \leq k(1-\varepsilon) \sup \|x_i\| .$$

On dit que E est B-convexe s'il existe un entier k et $\varepsilon \in]0,1]$ tels que E soit B-(k,ε) convexe.

Cette définition nous conduit à définir, pour tout entier k, le nombre $\lambda_k(E)$ comme la plus petite constante positive λ vérifiant, pour tout k-uple $(x_1,\dots,x_k)$ dans E :

$$\inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_i x_i \right\| \leq \lambda\, k \sup \|x_i\| .$$

On a alors trivialement la

<u>Proposition 1</u> : Soit E un espace normé :

i) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda_k(E) \leq 1$;

ii) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k(E) \geq \frac{1}{k}$ si $E \neq \{0\}$; $\lambda_k(\{0\}) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

iii) $\forall\ n,k \in \mathbb{N}$, $(n+k)\lambda_{n+k}(E) \leq n\ \lambda_n(E) + k\ \lambda_k(E)$.

iv) $\forall\ n,m \in \mathbb{N}$, $n \leq m \Rightarrow n\ \lambda_n(E) \leq m\ \lambda_m(E)$.

<u>Remarque 1</u> : Il résulte du lemme de Dvoretzky-Rodgers (cf. [6], exposé XXVI lemme 2) que pour tout espace normé E de dimension infinie et pour tout entier n $\lambda_n(E) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. En effet, si on transpose le résultat de Dvoretzsky-Rogers, on obtient : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ x_1,\ldots,x_n$ dans E tels que :

$$\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n ,\ (\Sigma\ |\alpha_i|^2)^{1/2} \leq \|\Sigma\ \alpha_i\ x_i\| \leq (1+\varepsilon)\ \Sigma\ |\alpha_i|\ .$$

Le lemme suivant est implicite dans [2] :

<u>Lemme 1</u> : Soit E un espace normé, on a

$$\forall\ k,n \in \mathbb{N} \qquad \lambda_{nk}(E) \leq \lambda_n(E)\ \lambda_k(E)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_j)_{1 \leq j \leq nk}$ un nk-uple dans E.

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit $(\varepsilon_j^i)_{(i-1)k < j \leq ik}$ tel que :

$$\|\sum_{(i-1) < j \leq ik} \varepsilon_j^i\ x_j\| = \inf_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\sum_{(i-1)k < j \leq ik} \varepsilon_j\ x_j\| \quad ;$$

on pose $X_i = \sum_{(i-1)k < j \leq ik} \varepsilon_j^i\ x_j$ pour chaque i dans $\{1,\ldots,n\}$.

Par construction, on a $\|X_i\| \leq k\ \lambda_k(E) \sup_{(i-1)k < j \leq ik} \|x_j\|$;

de plus

$$\inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i\ X_i\| \leq n\ \lambda_n(E) \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|$$

$$\leq n\ \lambda_n(E)\ k\ \lambda_k(E) \sup_{1 \leq j \leq nk} \|x_j\|\ .$$

d'où finalement :

$$\inf_{\varepsilon_j=\pm 1} \|\sum_{j=1}^{j=nk} \varepsilon_j x_j\| \leq \inf_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i X_i\| \leq (nk)\, \lambda_n(E)\, \lambda_k(E) \sup_{1\leq j\leq nk} \|x_j\|,$$

ce qui entraîne bien

$$\lambda_{nk}(E) \leq \lambda_n(E)\, \lambda_k(E).$$

<u>Définition</u> :

i) Deux espaces normés E et F sont dit λ-isomorphes s'il existe un isomorphisme T de E sur F tel que $\|T\|\,\|T^{-1}\| \leq \lambda$.

ii) Soit E un espace normé et $\lambda \geq 1$, on dit que E contient des l^1_n λ-uniformément, si pour tout entier n il existe un sous-espace E_n de E λ-isomorphe à l^1_n.

<u>Théorème 1</u> ([2]) : Soit E un espace normé, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout λ fini, E ne contient pas de l^1_n λ-uniformément.

ii) Il existe un réel $\lambda > 1$ tel que E ne contienne pas de l^1_n λ-uniformément.

iii) E est B-convexe.

<u>Démonstration</u> : i $\Rightarrow$ ii est trivial.

ii $\Rightarrow$ iii : si E n'est pas B-convexe, alors pour tout n et tout ε dans $]0,1[$, il existe $x_1,\ldots,x_n$ dans E tels que

$$\inf_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_i x_i\| \geq n - \varepsilon$$

$$\text{et} \qquad \sup \|x_i\| \leq 1 .$$

Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Sigma\, |\alpha_i| = 1$, soit ε_i le signe de α_i.

On a : $$n - \varepsilon \leq \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} [\varepsilon_i(1-|\alpha_i|) + \alpha_i]\, x_i\|$$

soit :

$$n-\varepsilon \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (1 - |\alpha_i|)\, x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |1 - |\alpha_i|| + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i \right\|$$

$$\leq n - 1 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i \right\|$$

d'où $\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\Sigma\, |\alpha_i| = 1$:

$$1 - \varepsilon \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i \right\| \leq 1\ ,$$

et par conséquent :

$$\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n \qquad (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\, x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\ ,$$

ce qui signifie que $(x_1,\ldots,x_n)$ engendre dans E un sous-espace $(\frac{1}{1-\varepsilon})$-isomorphe à l^1_n. Donc, si E n'est pas B-convexe, alors, pour tout ε dans $]0,1[$, E contient des l^1_n $(\frac{1}{1-\varepsilon})$-uniformément, et ii) est impossible.

iii) $\Rightarrow$ i) : On vérifie aisément que si i) n'est pas vérifié, il existe λ tel que $\lambda_n(E) \geq \frac{1}{\lambda}$ pour tout entier n ; or, si E est B-convexe, le lemme 1 entraîne que $\lambda_n(E)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. E n'est donc pas B-convexe et l'implication est démontrée.

Définition : Soit E un espace normé, soit $p \in]0,2]$, nous dirons que E est d'infratype p s'il existe une constante C telle que, pour toute famille finie (x_n) dans E, on ait :

$$\inf_{\varepsilon_n = \pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_n\, x_n\| \leq C\, (\Sigma\, \|x_n\|^p)^{1/p}\ .$$

Tout espace normé de type p-Rademacher est trivialement d'infratype p, la réciproque est un problème ouvert.

<u>Lemme 2</u> : Si E est un espace normé tel que $\lambda_N(E) = \frac{1}{N^{1/p'}}$ pour un entier $N > 1$ et un réel p' dans $[1,\infty[$,
Alors E est d'infratype q pour tout $q < p$ où p est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

<u>Démonstration</u> : Soit q tel que $q < p$, et soit (x_n) une suite finie dans E, on pose

$$\forall\ k = 0,1,2,\dots\ , \qquad A_k = \{n \mid \left(\frac{\Sigma \|x_n\|^q}{N^{k+1}}\right)^{1/q} < \|x_n\| \leq \left(\frac{\Sigma \|x_n\|^q}{N^k}\right)^{1/q}\}\ .$$

On notera $|A_k|$ le cardinal de A_k.
L'inégalité triangulaire entraîne trivialement :

$$\inf_{\varepsilon_n = \pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_n\, x_n\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \inf_{\varepsilon_n = \pm 1} \|\sum_{n \in A_k} \varepsilon_n\, x_n\|$$

d'où $$\inf_{\varepsilon_n = \pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_n\, x_n\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |A_k|\ \lambda_{|A_k|}(E)\ \frac{(\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q}}{N^{k/q}} \qquad (1)\ ;$$

mais, on a
$$(\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q} \geq \left(\sum_{n \in A_k} \|x_n\|^q\right)^{1/q} \geq |A_k|^{1/q}\ \frac{(\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q}}{N^{k+1/q}}\ ,$$

d'où $$|A_k| \leq N^{k+1}$$

(en supposant $\Sigma \|x_n\|^q \neq 0$, ce qui ne restreint pas la généralité !).

D'après la proposition 1 (iv)) :

$$|A_k|\ \lambda_{|A_k|}(E) \leq N^{k+1}\ \lambda_{N^{k+1}}(E)\ ,$$

et d'après le lemme 1 : $\lambda_{N^{k+1}}(E) \leq [\lambda_N(E)]^{k+1}$;

On déduit donc de (1) :

$$\inf_{\varepsilon_n = \pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_n\, x_n\| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^{k+1}}{N^{k+1/p'}\cdot N^{k/q}}\right)\ (\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q}$$

ce qui termine la démonstration puisque

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^{k+1}}{N^{k+1/p'} \cdot N^{k/q}} = N^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{N^{k(1/q - 1/p)}} \right)$$

$$= \frac{N^{1/q}}{N^{1/q - 1/p} - 1} < \infty .$$

Proposition 2 : Un espace normé E est B-convexe si et seulement si il existe un réel p dans $]1,2]$ tel que E soit d'infratype p. Soit Λ_E la borne supérieure de l'ensemble des p tels que E soit d'infratype p, on a :

$$\Lambda_E = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}[n\,\lambda_n(E)]} .$$

Démonstration : Par définition, E est B-convexe si et seulement s'il existe un entier N tel que $\lambda_N(E) < 1$, donc si et seulement si il existe un réel p' tel que $\lambda_N(E) = \frac{1}{N^{1/p'}}$, pour un entier $N > 1$; la première assertion résulte donc du lemme 2.

Si E est d'infratype p, il existe une constante C telle que $n\,\lambda_n(E) \le C\, n^{1/p}$ pour tout entier n.

On a donc

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}[n\,\lambda_n(E)]} \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} C + \frac{1}{p}\operatorname{Log} n} = p ,$$

et par conséquent

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(n\,\lambda_n(E))} \ge \Lambda_E .$$

Si $q > \Lambda_E$, le lemme 2 entraîne que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad n\,\lambda_n(E) \ge n^{1/q} ;$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}[n\,\lambda_n(E)]} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\frac{1}{q}\operatorname{Log} n} = q ,$$

et par conséquent $\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}[n\,\lambda_n(E)]} \le \Lambda_E$ c.q.f.d. .

****

Dans toute la suite, on note (ε_n) la suite des variables de Rademacher sur $([0,1]dt)$.
Soit E un espace normé, on notera $\mu_n(E)$ [resp. $\nu_n(E)$] la plus petite constante positive μ [resp. ν] telle que l'on ait pour tout n-uple $(x_1,\ldots,x_n)$ dans E :

$$\left(\int \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\, x_i\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \mu\, n \sup_{1\leq i\leq n} \|x_i\|$$

$$\left[\text{resp. } \left(\int \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\, x_i\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \nu \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|x_i\|^2\right)^{1/2}\right].$$

les propriétés évidentes de ces nombres sont rassemblées dans la

<u>Proposition 3</u> : Soit E un espace normé :

i) $\mu_1(E) = \nu_1(E) = 1$ si $E \neq \{0\}$; $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \lambda_n(E) \leq \mu_n(E) \leq \nu_n(E) \leq 1$.

ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(E) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\nu_n(E) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ si $E \neq \{0\}$.

iii) $\forall\, n,k \in \mathbb{N}$, $(n+k)\, \mu_{n+k}(E) \leq n\, \mu_n(E) + k\, \mu_k(E)$

et $\sqrt{n+k}\, \nu_{n+k}(E) \leq \sqrt{n}\, \nu_n(E) + \sqrt{k}\, \nu_k(E)$.

iv) $\forall\, n,m \in \mathbb{N}$, $n \leq m \Rightarrow \begin{cases} n\, \mu_n(E) \leq m\, \mu_m(E) \\ \sqrt{n}\, \lambda_n(E) \leq \sqrt{m}\, \lambda_m(E) \end{cases}$.

A priori, l'application $n \to \mu_n(E)$ n'est pas sous-multiplicative, c'est ce qui justifie l'introduction de $\nu_n(E)$ qui, par contre, vérifie le

<u>Lemme 3</u> : Soit E un espace normé, on a :

$$\forall\, n,k \in \mathbb{N}\ ,\quad \nu_{nk}(E) \leq \nu_n(E)\, \nu_k(E)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_i)_{1\leq i\leq nk}$ un nk-uple dans E. Pour tout i dans

$\{1,\dots,n\}$ et tout θ dans $[0,1]$, on pose :

$$X_i(\theta) = \sum_{(i-1)k < j \leq ik} \varepsilon_j(\theta)\, x_j \quad ;$$

on a alors

$$\left(\int \left\|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\, X_i(\theta)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\; \nu_n(E) \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i(\theta)\|^2\right)^{1/2},$$

soit en intégrant après élévation au carré :

$$\left(\int \left\|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\, X_i(\theta)\right\|^2 dt\, d\theta\right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\; \nu_n(E) \left(\sum_{i=1}^{i=n} \int \|X_i(\theta)\|^2 d\theta\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{n}\; \nu_n(E) \left(\sum_{i=1}^{i=n} k\; \nu_k(E)^2 \sum_{(i-1)k<j\leq ik} \|x_i\|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{nk}\; \nu_n(E)\; \nu_k(E) \left(\sum_{j=1}^{j=nk} \|x_j\|^2\right)^{1/2},$$

mais, par un argument de symétrie, le premier membre vaut :

$$\left(\int \left\|\sum_{j=1}^{j=nk} \varepsilon_j(\theta)\, x_j\right\|^2 d\theta\right)^{1/2} \quad ;$$

on obtient donc bien $\qquad \nu_{nk}(E) \leq \nu_n(E)\, \nu_k(E).$

<u>Lemme 4</u> : Si E est un espace normé tel que $\nu_N(E) = \frac{1}{N^{1/p'}}$ pour un entier $N > 1$ et un réel p' dans $[2,\infty[$, alors E est de type p-Rademacher pour tout $q < p$ où p est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

<u>Démonstration</u> : On utilise la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mu_n(E) \leq \nu_n(E)$ et on procède de manière analogue à la démonstration du lemme 2.

<u>Proposition 4</u> : Soit E un espace normé et R_E la borne supérieure de l'ensemble des réels p tels que E soit de type p-Rademacher ; on a :

$$R_E = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}[n\, \nu_n(E)]} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $p \in]0,2]$ tel que E soit de type p-Rademacher, il existe une constante C telle que, pour toute suite finie (x_n) dans E, on ait :

$$\left(\int \|\Sigma\, \varepsilon_n(t)\, x_n\| dt\right)^{1/2} \le C\, \left(\Sigma\, \|x_n\|^p\right)^{1/p} \quad ;$$

soit $(x_i)_{1 \le i \le n}$ un n-uple dans E, on a :

$$\left(\int \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\, x_i\|^2 dt\right)^{1/2} \le C\, \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p} \le C\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} ,$$

d'où

$$\nu_n(E) \le C\, n^{\frac{1}{p}-1} \qquad \text{et} \qquad n\, \nu_n(E) \le C\, n^{1/p} \quad ,$$

donc

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}[n\, \nu_n(E)]} \ge \liminf_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} C + \frac{1}{p} \operatorname{Log} n} = p \ ,$$

ce qui entraîne

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}[n\, \nu_n(E)]} \ \ge\ R_E \ .$$

Si $p > R_E$, alors le lemme 4 entraîne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ n\, \lambda_n(E) \ \ge\ n^{1/p}$$

d'où $\displaystyle \limsup_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n\, \nu_n(E)} \le p$; par conséquent :

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n\, \nu_n(E)} \ \le\ R_E \ .$$

<u>Lemme 5</u> : Soit E un espace normé et n un entier,

$$(\lambda_n(E) = 1) \Leftrightarrow (\mu_n(E) = 1) \Leftrightarrow (\nu_n(E) = 1) .$$

<u>Démonstration</u> : La première équivalence résulte de la relation

$$\mu_n(E) \leq \left[\frac{n^2\lambda_n(E)^2 + (2^{n-1}-1)\ n^2}{2^{n-1}}\right]^{1/2} \qquad (2)$$

qui découle elle-même de l'inégalité évidente :

$$\left(\int \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\ x_i \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left[\frac{\inf\limits_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ x_i \right\|^2 + (2^{n-1}-1)\ n^2 \sup \|x_i\|^2}{2^{n-1}}\right]^{1/2} .$$

Si $\lambda_n(E) < 1$, alors (2) implique $\mu_n(E) < \left(\frac{n^2+(2^{n-1}-1)\ n^2}{2^{n-1}}\right)^{1/2} = 1$;

réciproquement si $\mu_n(E) < 1$ alors $\lambda_n(E) < 1$ puisque $\lambda_n(E) \leq \mu_n(E)$ pour tout entier n.

Montrons la deuxième équivalence : puisque $\mu_n(E) \leq \nu_n(E) \leq 1$ pour tout entier n, il suffit de montrer que $(\nu_n(E) = 1) \Rightarrow (\mu_n(E) = 1)$.

Supposons que $\nu_n(E) = 1$, alors $\forall\ \varepsilon > 0$, on peut trouver un n-uple $(x_1,\dots,x_n)$ dans E vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = n$$

$$\text{et} \qquad \left(\int \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\ x_i \right\|^2 dt\right)^{1/2} \geq (1-\varepsilon)n .$$

On a donc a fortiori :

$$(1-\varepsilon)\ \sqrt{n}\ \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| ,$$

d'où :

$$(1-\varepsilon)^2 \; n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|x_i\|\right)^2 ,$$

soit

$$n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\right)^2 \leq (2\varepsilon - \varepsilon^2) \; n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leq 2\varepsilon \; n^2 ,$$

donc

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (\|x_i\| - \|x_j\|)^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left(\sum \|x_i\|\right)^2 \leq 2\varepsilon \; n^2 ;$$

soit $i_o \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\|x_{i_o}\| = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$, on a :

$$\sum_{j=1}^{j=n} (\|x_{i_o}\| - \|x_j\|)^2 \leq 4\, n^2 \, \varepsilon ,$$

d'où :

$$\sqrt{n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} \geq \sqrt{n}\, \|x_{i_o}\| - \left[\sum_{j=1}^{j=n} (\|x_{i_o}\| - \|x_j\|)^2\right]^{1/2}$$

$$\geq \sqrt{n}\, \|x_{i_o}\| - 2\, n \sqrt{\varepsilon} ,$$

donc

$$\|x_{i_o}\| \leq 1 + 2\sqrt{n\, \varepsilon} ,$$

soit finalement :

$$\left(\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\, x_i \Big\|^2 dt\right)^{1/2} \geq \frac{1-\varepsilon}{1 + 2\sqrt{n\, \varepsilon}} \; n \sup \|x_i\| ,$$

et par conséquent

$$\forall\, \varepsilon \in \,]0,1[\qquad \mu_n(E) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + 2\sqrt{n\, \varepsilon}} ,$$

ce qui implique bien $\mu_n(E) = 1$.

<u>Théorème 2</u> : Soit E un espace normé, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) E ne contient pas de l_n^1 uniformément.

ii) E est d'infratype p pour au moins un p dans $]1,\infty[$. ($\Leftrightarrow \Lambda_E>1$).

iii) E est de type p -Rademacher pour au moins un p dans $]1,2]$. ($\Leftrightarrow R_E>1$).

iv) E est de type $(1+\varepsilon)$-stable pour au moins un $\varepsilon \in]0,1]$.

v) E est de type 1-stable.

<u>Démonstration</u> : i) $\Rightarrow$ ii) : découle de la proposition 2 et du théorème 1.
ii) $\Rightarrow$ iii) : si iii) n'est pas vérifié, le lemme 4 montre que nécessairement $\nu_n(E)=1$ pour tout entier n, le lemme 5 montre alors que $\lambda_n(E)=1$ pour tout entier n et cela contredit ii).
iii) $\Rightarrow$ iv) : si E est de type p-Rademacher avec $1<p\le 2$, alors, par la proposition 3 de l'exposé 3, E est de type q-stable si $1\le q<p\le 2$.
iv) $\Rightarrow$ v) : découle de la proposition de l'exposé 3.
v) $\Rightarrow$ i) : résulte de la proposition (bien connue) ci-dessous :

<u>Proposition 5</u> : Soit $p \in]0,2[$, si un espace quasi-normé E vérifie :

il existe une constante C telle que, pour tout entier n, on peut trouver $(x_1^n,\dots,x_n^n)$ dans E avec :

$$\forall\ (\alpha_i)\in \mathbb{R}^n\ ,\ \Big(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\Big)^{1/p} \le \|\Sigma\ \alpha_i\ x_i^n\| \le C\ \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

alors E n'est pas de type p-stable.

<u>Démonstration</u> : Soit $r\in]0,p[$, si E est de type p-stable, il existe une constante K telle que, pour toute suite finie (x_n) de E :

$$\Big(\int \|\Sigma\ f_i(t)\ x_i\|^r\ dt\Big)^{1/r} \le K\ \big(\Sigma\ \|x_i\|^p\big)^{1/p}$$

où (f_n) est une suite stable d'ordre p.

L'hypothèse faite sur E entraîne alors : $\forall\ n\in\mathbb{N}$,

$$\Big(\int\Big(\sum_{i=1}^{i=n}|\alpha_i|^p\ |f_i(t)|^p\Big)^{r/p}dt\Big)^{1/r} \le \Big(\int\ \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ f_i(t)\ x_i^n\|^r\ dt\Big)^{1/r} \le K\,C\ \Big(\sum_{i=1}^{i=n}|\alpha_i|^p\Big)^{1/p},$$

mais, on sait (cf. [7], proposition XXVI,2 ; 3) que cela est impossible car

$$\sum_n |\alpha_n|^p \, |f_n(t)|^p \overset{p.s}{<} \infty \Leftrightarrow \sum_n |\alpha_n|^p \left(1 + \left|\mathrm{Log}\,\frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < \infty .$$

<u>Remarque 2</u> : 1) Les assertions du théorème 2 sont encore équivalentes (d'après les lemmes 1,3,5) à

vi) $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tel que $\lambda_N(E) < 1$.

vii) $\lambda_n(E) \to 0$ quand $n \to \infty$.

viii) $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tel que $\mu_N(E) < 1$.

ix) $\mu_n(E) \to 0$ quand $n \to \infty$.

x) $\exists\, N \in \mathbb{N}$, tel que $\nu_N(E) < 1$.

xi) $\nu_n(E) \to 0$ quand $n \to \infty$.

2) Soit E un espace normé, posons

$$\Delta\,(l_n^1, E) = \inf_{F \subset E} \, d(l_n^1, F)$$

[on rappelle que si E et F sont deux espaces normés, on note d(E,F) la borne inférieure des nombres $\|T\|\,\|T^{-1}\|$ quand T décrit les isomorphismes de E sur F ; si E et F ne sont pas isomorphes, on pose $d(E,F) = +\infty$.]

On a :

$$\forall\, n,k \in \mathbb{N} \qquad \Delta(l_{nk}^1, E) \geq \Delta(l_n^1, E)\, \Delta(l_k^1, E) \qquad (3) .$$

En effet, soit $\delta_n(E)$ la plus petite constante positive δ telle que l'on ait, pour toute n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ dans E :

$$\inf_{\substack{n \\ \sum_{i=1} |\alpha_i| = 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i \right\| \leq \delta \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \quad ;$$

il est facile de vérifier (cf. la démonstration du lemme 1) que

$$\forall\, n,k \in \mathbb{N} \quad \delta_{nk}(E) \leq \delta_n(E)\, \delta_k(E) \qquad ;$$

de plus, on voit aisément que

$$\delta_n(E) = \frac{1}{\Delta(l_n^1,E)} .$$

La relation (3) montre donc que si $\Delta(l_n^1,E)$ croît lentement avec n [i.e. $\forall\, \varepsilon > 0 , \frac{\Delta(l_n^1,E)}{n^\varepsilon} \to 0$ quand $n \to \infty$], alors $\Delta(l_n^1,E) = 1$ pour tout entier n.

Par exemple : si E contient une suite (E_n) de sous-espaces telle que, pour tout n, E_n est $(1 + \mathrm{Log}\, n)$-isomorphe à l_n^1, alors E contient des l_n^1 uniformément.

3) Le théorème précédent généralise un résultat de Rosenthal [5] sur les sous-espaces réflexifs de L^1 : en effet, il résulte d'un théorème de Kadec-Pelczynski (voir [6], exposé XIX, § 3) qu'un sous-espace de L^1 est réflexif si et seulement si il est de type 1-stable. D'après les théorèmes de factorisation (voir [6], exposé XV), si un sous-espace de L^1 est de type $(1+\varepsilon)$-stable (avec $0 < \varepsilon \leq 1$), alors il se plonge dans $L^{1+\varepsilon}$. Le théorème 2 entraîne donc en particulier : tout sous-espace réflexif de L^1 se plonge dans $L^{1+\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$.

Nous allons énoncer d'autres conséquences du théorème 2 :

<u>Corollaire 1</u> : Tout espace normé uniformément convexe est de type p-Rademacher (resp. de type p-stable) pour un $p > 1$.

<u>Démonstration</u> : Soit E un espace normé, on pose

$$\forall\, \varepsilon \in]0,2], \quad \delta_E(\varepsilon) = \inf \{1 - \|\tfrac{x+y}{2}\| \;\mid\; x,y \in E,\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\}.$$

Par définition, E est uniformément convexe si $\forall\, \varepsilon \in]0,2]$, $\delta_E(\varepsilon) > 0$.

Il est facile de vérifier que si E est uniformément convexe, alors $\lambda_2(E) < 1$ (c'est-à-dire que E est uniformément non carré au sens de [3]) ; le corollaire découle donc de ce qui précède.

Corollaire 2 : Un espace normé est de type 1-stable si et seulement si son dual est de type 1-stable.

Démonstration : Soit E un espace normé. Supposons que E contienne des l^1_n uniformément ; alors (cf. théorème 1), $\forall \lambda > 1$, il existe une suite (E_n) de sous-espaces de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(E_n, l^1_n) < \lambda$; par dualité on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(E'_n, l^\infty_n) < \lambda ,$$

et on sait que $E'_n \simeq \frac{E'}{E^o_n}$ (où E^o_n désigne l'orthogonal de E_n dans E').

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(E'/E^o_{2^n}, l^\infty_{2^n}) < \lambda$; mais l^1_n se plonge isométriquement dans $l^\infty_{2^n}$ de manière évidente ; d'où, pour tout n $(\tilde{x}^n_i)_{1 \le i \le n}$ dans $(E_{2^n})'$ tel que :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n \qquad \Sigma |\alpha_i| \le \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{x}^n_i\| \quad \text{et} \quad \sup_{1 \le i \le n} \|\tilde{x}^n_i\| < \lambda .$$

Soit $(x^n_i)_{1 \le i \le n}$ dans E^n tel que x^n_i représente $\tilde{x}^n_i$ modulo $E^o_{2^n}$ avec $\|x^n_i\| < \lambda$, on a :

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n , \ \Sigma |\alpha_i| \le \|\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x^n_i\| \le \lambda \Sigma |\alpha_i| ;$$

ce qui signifie que E' contient λ-uniformément des l^1_n. (Le raisonnement ci-dessus ne fait qu'expliciter la propriété de relèvement de l^1_n !).

Réciproquement, soit E'_n une suite de sous-espaces de E' λ-isomorphes à l^1_n, ils sont nécessairement les duaux d'une suite (E_n) de quotients de E λ-isomorphes à l^∞_n. On conclut comme ci-dessus.

D'après le théorème 2, le corollaire est démontré.

Définition : Soit $p \in [2, \infty[$. Un espace quasi-normé E est dit de cotype p-Rademacher s'il existe une constante C telle que pour toute famille finie dans E, on ait :

$$(\Sigma \|x_n\|^p)^{1/p} \le C \left(\int \|\Sigma \varepsilon_n(t)\, x_n\|^2\, dt\right)^{1/2} .$$

La proposition suivante est due à J. Hoffmann-Jorgensen.

<u>Proposition 6</u> : Le dual d'un espace normé de type p-Rademacher est de cotype p'-Rademacher ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

<u>Démonstration</u> : Soit E un espace normé de type p-Rademacher, K une constante telle que :

$$\forall\ (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}, \quad \left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_i(t)\ x_i\|^2\ dt\right)^{1/2} \leq K\ \left(\Sigma\ \|x_n\|^p\right)^{1/p} .$$

Soit $(\xi_n) \in E'^{(\mathbb{N})}$, $\forall\ \varepsilon > 0$ il existe (x_n) dans $E^{(\mathbb{N})}$ vérifiant

$$\Sigma < x_n, \xi_n > \ \geq \ \left(\Sigma\ \|\xi_n\|^{p'}\right)^{1/p'} - \varepsilon$$

et

$$\left(\Sigma\ \|x_n\|^p\right)^{1/p} \leq 1 .$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\left(\Sigma\ \|\xi_n\|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \Sigma <x_n, \xi_n> + \varepsilon &= \int dt < \Sigma\ x_n\ \varepsilon_n(t), \Sigma\ \xi_n\ \varepsilon_n(t) > + \varepsilon \\ &\leq \left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_i(t)\ x_i\|^2\ dt\right)^{1/2} \left(\int \|\Sigma\ \xi_n\ \varepsilon_n(t)\|^2 dt\right)^{1/2} + \varepsilon \\ &\leq K\ \left(\int \|\Sigma\ \xi_n\ \varepsilon_n(t)\|^2\ dt\right)^{1/2} + \varepsilon ,\end{aligned}$$

d'où le résultat puisque ε est arbitraire.

Le corollaire 2 et la proposition précédente entraîne le

<u>Corollaire 3</u> : Si E est un espace normé de type 1-stable, alors il existe $p \in [2,\infty[$ tel que E et E' soient de cotype p-Rademacher.

<u>Remarque</u> : Il est faux en général que le dual d'un espace de cotype p'-Rademacher soit de type p-Rademacher. Par exemple, l^1 est de cotype 2 et l^∞ n'est de type p-Rademacher pour aucun $p > 1$.

<u>Problème</u> : La réciproque du corollaire 3 est-elle vraie ? on verra plus tard que la réponse à ce problème est oui si l'espace E est supposé posséder

une base inconditionnelle.

Corollaire 4 : Soit p tel que $0 < p < 1$. Un espace de Banach E est de type 1-stable si et seulement si il existe une constante C telle que, pour tout opérateur u d'un quotient G de E' dans un espace quasi-normé, on a :

$$\pi_p(u) \leq C \; \pi_1(u) \qquad (4) .$$

Démonstration : D'après [6] (XV, théorème 2 et XVII théorème) si E est de type 1-stable, la conclusion est vérifiée.
Réciproquement, si E n'est pas de type 1-stable, alors, d'après le théorème 2, il existe une suite (G_n) de quotients de E' uniformément isomorphes à l_n^∞ .

Soit alors $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ scalaires, soit $j_{(\alpha_i)}$ l'opérateur de l_n^∞ dans l_n^1 défini par $(x_1,\ldots,x_n) \to (\alpha_1 x_1,\ldots,\alpha_n x_n)$; on a

$$\pi_1(j_{(\alpha_i)}) = \sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i|$$

$$\pi_p(j_{(\alpha_i)}) = \frac{\left(\int \left(\sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i| \; |f_i(t)|\right)^p dt\right)^{1/p}}{\left(\int |f_1(t)|^p dt\right)^{1/p}}$$

où (f_n) est une suite stable d'ordre 1.

On conclut alors (cf. la démonstration de la proposition 5) que (4) est impossible.

Corollaire 5 :Soient p dans $]1,\infty[$ et (Ω,μ) un espace mesuré.
Un espace de Banach E est de type 1-stable si et seulement si $L^p(\Omega,\mu,E)$ est de type 1-stable.

Démonstration : On utilise l'équivalence iii) $\Leftrightarrow$ v) du théorème ainsi que les relations (K) de l'exposé 3.

Compte tenu de la proposition 5 de l'exposé 3, le théorème 2 permet de retrouver, en l'améliorant, le résultat de [1].
Les méthodes de [1] permettent de démontrer la

Proposition 7 : Un espace normé est de type 1-stable si et seulement si, pour toute suite bornée (x_n) d'éléments de E,

$$\frac{1}{n} \int \| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\, x_i \| \, dt$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Démonstration : Si E est de type 1-stable, alors (théorème 2), il existe ε dans $]0,2]$ tel que E soit de type $(1+\varepsilon)$-Rademacher.
D'où une constante C telle que

$$\frac{1}{n} \int \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\, x_i \| dt \quad \leq \quad C\, n^{-\varepsilon} \sup_n \|x_n\| \,.$$

La partie "seulement si" est donc démontrée.

Réciproquement, si E n'est pas de type 1-stable, alors (théorème 2), pour tout entier n, il existe un n^n-uple (x_i^n) dans E tel que :

$$\frac{1}{n^n} \int \| \sum_{i=1}^{i=n^n} \varepsilon_i(t)\, x_i^n \| \, dt \quad \geq \quad \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sup_{1 \leq i \leq n^n} \|x_i\| \leq 1.$$

On construit une suite (x_n) d'éléments de la boule unité de E en posant :

$$x_j = x_i^n \quad \text{quand } j = k_n + i \text{ avec } i \in \{1,2,\dots,(n+1)^{n+1}\}$$

$$\text{et } k_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n \,.$$

On a alors :

$$\int \| \sum_{i=1}^{i=k_n} \varepsilon_i(t)\, x_i \| \, dt \quad \geq \quad \frac{1}{2}\, n^n - k_{n-1} \geq \frac{1}{2}\, n^n - (n-1)^n \,,$$

d'où $$\frac{1}{k_n}\int \|\sum_{i=1}^{k_n} \varepsilon_i(t)\, x_i\|dt \geq \frac{1}{2n^n}\int \|\sum_{i=1}^{k_n} \varepsilon_i(t)\, x_i\|\, dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - (1-\frac{1}{n})^n\right] ;$$

comme $(1-\frac{1}{n})^n \to e^{-1}$ quand $n \to \infty$, on en déduit que $\frac{1}{n}\int \|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\, x_i\|\, dt$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

(c.q.f.d.)

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BECK : A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers. Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962), P. 329-334

[2] D.P. GIESY : On a convexity condition in normed linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 125 (1966), 114-146.

[3] R.C. JAMES : Uniformely non square Banach spaces. Ann. of Math. 80 (1964), p. 542-550.

[4] G. PISIER : Sur les espaces qui ne contiennent pas uniformément de l_n^1. C.R.A.S. à paraître.

[5] H.P. ROSENTHAL : On subspaces of L^p. Ann. of Math. Vol. 97, n°2, p.344-373 (1973).

[6] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.

[7] Séminaire Schwartz 1969/1970.

****