B. MAUREY

Rappels sur les opérateurs sommants et radonifiants (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A3_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

RAPPELS SUR LES OPERATEURS SOMMANTS ET RADONIFIANTS

(suite)

par B. MAUREY

Exposé N° II

7 Novembre 1973

1. EXTENSION DE LA PROPRIETE DES OPERATEURS (p,G)-SOMMANTS.

Dans cet exposé nous allons esquisser l'étude des applications (p,G)-radonifiantes. Pour commencer, nous allons étendre la propriété des opérateurs (p,G)-sommants :

Proposition 1 : Soient E, G, H trois espaces de Banach, u un opérateur linéaire (p,G)-sommant de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$ dans H $(0 < p < \infty)$, (Ω,μ) un espace de probabilité et $\varphi \in L^p(\Omega,\mu,E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G)$. On a :

$$\left(\int \|u(\varphi(\omega))\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq \pi_{p,G}(u) \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} \left(\int \|\langle\varphi(\omega),\xi\rangle\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} .$$

Démonstration : Supposons tout d'abord φ étagée, c'est-à-dire :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \, z_i \quad ,$$

où les (A_i) sont des parties mesurables deux à deux disjointes de Ω, et les (z_i) des éléments de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\left(\int \|u(\varphi(\omega))\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} &= \left(\Sigma \; \mu(A_i) \; \|u(z_i)\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\Sigma \; \|u((\mu(A_i))^{1/p} \; z_i)\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \pi_{p,G}(u) \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\Sigma \|\langle(\mu(A_i))^{1/p} \; z_i,\xi\rangle\|^p\right)^{1/p} \\
&= \pi_{p,G}(u) \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\int \|\langle\varphi(\omega),\xi\rangle\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} .
\end{aligned}$$

Supposons maintenant φ quelconque, et $p \geq 1$ pour simplifier. Soit $\alpha > 0$ quelconque, et soit φ_0 une fonction étagée telle que :

$$\|\varphi - \varphi_0\|_{L^p(\Omega,\mu,E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G)} \leq \alpha \quad .$$

On a alors :

$$\left(\int\|u(\varphi(\omega))\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq \left(\int\|u(\varphi_o(\omega))\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} + \left(\int\|u(\varphi-\varphi_o)(\omega)\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}$$

$$\leq \pi_{p,G} \sup_{\|\xi\|\leq 1} \left(\int\|<\varphi_o(\omega),\xi>\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} + \|u\| \, \|\varphi-\varphi_o\|_{L^p}$$

$$\leq \pi_{p,G} \sup_{\|\xi\|\leq 1} \left[\left(\int\|<\varphi(\omega),\xi>\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} + \left(\int\|<(\varphi-\varphi_o)(\omega),\xi>\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}\right] + \alpha\|u\|$$

$$\leq \pi_{p,G} \sup_{\|\xi\|\leq 1} \left(\int\|<\varphi(\omega),\xi>\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} + 2\alpha\,\|u\| \ ,$$

d'où le résultat puisque α est arbitraire. Dans le cas $p < 1$, on adapte facilement la démonstration ci-dessus, en utilisant le fait que $L^p(\Omega,\mu,E \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ est p-normé.

Introduisons quelques notations : soit E un espace vectoriel muni d'une norme et d'une topologie $\mathcal{C}$ pour laquelle la norme soit sci. Si μ est une probabilité sur E, de Radon pour $\mathcal{C}$, on pose si $p \in]0,+\infty[$:

$$\|\mu\|_p = \left(\int \|x\|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} ,$$

et on dit que μ est d'ordre p si cette quantité est finie.

Supposons maintenant que E et G soient deux espaces de Banach, et λ une probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$. Nous poserons :

$$\|\lambda\|^*_{p,G} = \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} \|\xi(\lambda)\|_p \ .$$

(Si λ est représentée par une fonction aléatoire linéaire $u : E' \to L^o(\Omega,\mu,G)$, $\xi(\lambda)$ est la probabilité de Radon sur G égale à $u(\xi)(\mu)$.) Nous dirons que λ est de type (p,G) si $\|\lambda\|^*_{p,G}$ est fini.

<u>Lemme 1</u> : Soient E et G deux espaces de Banach, et λ une probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$. Si λ est représentée par une fonction aléatoire linéaire u de E' dans $L^0(\Omega,\mu,G)$, λ est de type p si et seulement si u opère continûment de E' dans $L^p(\Omega,\mu,G)$, et :

$$\|\lambda\|^*_{p,G} = \|u\|_p = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|u(\xi)\|_{L^p(\Omega,\mu,G)} \quad ,$$

<u>Démonstration</u> : A peu près évidente, puisque $\xi(\lambda) = u(\xi)(\mu)$. On a en effet :

$$\|\xi(\lambda)\|_p = \left(\int \|x\|^p d(\xi(\lambda))(x)\right)^{1/p} = \left(\int \|x\|^p\, d(u(\xi)(\mu))\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int \|u(\xi)(\omega)\|^p\, d\mu(\omega)\right)^{1/p} ,$$

par définition d'une mesure image.

<u>Proposition 2</u> : Soient E, G, H trois espaces de Banach, u un opérateur linéaire (p,G)-sommant de $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$ dans H, $0 < p < \infty$, et μ une probabilité de Radon d'ordre p sur $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$. On a :

$$\|u(\mu)\|_p \leq \pi_{p,G}(u) \quad \|\mu\|^*_{p,G} \quad .$$

($\|\mu\|^*_{p,G}$ est le type de la probabilité G-cylindrique définie par μ, cf. exposé I §3).

<u>Démonstration</u> : Il suffit de poser $\Omega = E \hat{\otimes}_\varepsilon G$, de prendre pour φ l'application identique de Ω dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$, et d'appliquer la proposition 1.

2. <u>TOPOLOGIES ETROITES ET CYLINDRIQUES</u>.

Rappelons la notion de convergence étroite : soit E un evt. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ (ensemble des probabilités de Radon sur E) la topologie étroite comme la moins fine qui rend continues les applications $\mu \to \mu(f)$, pour toutes les fonctions continues bornées sur G. Nous admettrons le résultat suivant, ([1], exposé 1, Proposition 4).

Proposition 3 : Soient E un espace vectoriel, muni d'une norme et d'une topologie d'evt $\mathcal{C}$ pour laquelle les boules fermées soient compactes, et $p \in]0,+\infty[$. L'ensemble des probabilités μ sur E, de Radon pour $\mathcal{C}$, telles que $\|\mu\|_p \leq 1$, est compact pour la topologie étroite (relative à $\mathcal{C}$).

Lemme 2 : Soient E et G deux espaces de Banach, E de dimension finie, Ω un espace compact muni d'une probabilité de Radon μ, et (u_j) un filtre d'opérateurs linéaires de E' dans $L^o(\Omega,\mu,G)$ (ce dernier espace étant muni de la topologie de la convergence en probabilité), convergeant simplement vers un opérateur linéaire u. Si λ_j et λ représentent les probabilités de Radon sur $E \otimes G$ déterminées par u_j et u respectivement, le filtre (λ_j) converge étroitement vers λ.

Démonstration : Soient $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ une base de E', $(x_1,\ldots,x_n)$ la base duale dans E. Posons :

$$\varphi_j(\omega) = \sum_k x_k \otimes u_j(\xi_k)(\omega) \quad ; \quad \varphi(\omega) = \sum_k x_k \otimes u(\xi_k)(\omega) .$$

Quand j tend vers l'infini dans le filtre, chaque $u_j(\xi_k)$ tend vers $u(\xi_k)$ en probabilité, donc puisque les sommes sont finies, φ_j tend vers φ dans $L^o(\Omega,\mu,E \hat{\otimes}_\varepsilon G)$. On sait alors que $\varphi_j(\mu)$ tend étroitement vers $\varphi(\mu)$ d'après [2], proposition (VI,1,1). Mais $\varphi_j(\mu) = \lambda_j$, $\varphi(\mu) = \lambda$, ce qui achève la démonstration.

Soient E et G deux espaces de Banach. Désignons par $\check{\mathcal{P}}_G(E \otimes G)$ l'ensemble des probabilités G-cylindriques sur $E \otimes G$. Nous définirons la topologie G-cylindrique sur $\check{\mathcal{P}}_G(E \otimes G)$ comme la moins fine rendant continues les projections $\lambda \to \tilde{\pi}_N(\lambda)$ de $\check{\mathcal{P}}_G(E \otimes G)$ dans $\mathcal{P}(E/N \otimes G)$, pour tous les sous-espaces fermés de codimension finie N. (Chaque $\mathcal{P}(E/N \otimes G)$ étant muni de la topologie étroite).

Proposition 4 : Soient E et G deux espaces de Banach, Ω un espace compact muni d'une probabilité de Radon μ, et (u_j) un filtre d'opérateurs linéaires de E' dans $L^0(\Omega,\mu,G)$, convergeant simplement vers un opérateur linéaire u. Si λ_j et λ représentent les probabilités G-cylindriques sur $E \otimes G$ déterminées par u_j et u respectivement, le filtre (λ_j) converge G-cylindriquement vers λ.

Démonstration : Soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E. Les projections $\tilde{\pi}_N(\lambda_j)$ sur $E/N \otimes G$ sont représentées par les fonctions aléatoires linéaires :

$$N^0 \to E' \xrightarrow{u_j} L^0(\Omega,\mu,G),$$

où N^0 est de dimension finie. Il suffit donc d'appliquer le lemme 2.

3. RADONIFICATION.

Dans l'exposé 1, nous avons vu que si α est une norme (pas nécessairement une norme tensorielle) sur $E \otimes G$, une probabilité de Radon μ sur $E \hat{\otimes}_\alpha G$ définit une probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$ dès que α vérifie la condition :

$$(*) \qquad E \otimes_\alpha G \to \mathcal{L}(E',G) \quad \text{est continue,}$$

et que deux probabilités de Radon sur $E \hat{\otimes}_\alpha G$ qui définissent la même probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$ coïncident dès que α vérifie la condition :

$$(**) \qquad \text{Le prolongement } E \hat{\otimes}_\alpha G \to \mathcal{L}(E',G) \text{ est injectif .}$$

Si α est une norme sur $E \otimes G$, nous désignerons par $E/N \underset{q\alpha}{\otimes} G$ l'espace $E/N \otimes G$ muni de la norme quotient de $E \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G$. Nous envisagerons la condition suivante sur α :

$$(***) \qquad \forall\, x \in E \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G \;, \quad \|x\|_\alpha = \sup_N \|\tilde{\pi}_N(x)\|_{q\alpha} \quad .$$

Les exemples usuels tels que $C(K,G)$, $L^p(\Omega,\mu,G)$, $l^p(G)$, $c_o(G)$, vérifient les conditions (*), (**) et (***).

Rappelons l'hypothèse d'approximation métrique : on dit qu'un espace de Banach E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si l'identité de E est limite simple d'un filtre d'opérateurs de rang fini (π_j), tel que $\|\pi_j\| \leq 1$. Si un dual E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, on peut supposer les opérateurs π_j continus pour $\sigma(E',E)$ (Ce fait a été établi par S. Simmons).

Soit u un opérateur linéaire de E dans F, tel que $\tilde{u} = u \otimes \mathrm{Id}$ soit (p,G)-sommant de $E \otimes G$ dans $F \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G$, α vérifiant (*) et (**). Le premier problème qui se pose est de savoir si l'image $\tilde{u}(\lambda)$ d'une probabilité G-cylindrique λ de type (p,G) sur $E \otimes G$ "est de Radon" sur $F \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G$, au sens expliqué dans l'exposé 1, § 3. Le second problème est d'étendre l'inégalité de la proposition 2 aux probabilités G-cylindriques. Nous commencerons par ce second problème :

<u>Théorème 1</u> : Soient u un opérateur linéaire de E dans F, tel que $\tilde{u} = u \otimes \mathrm{Id}$ soit (p,G)-sommant de $E \otimes G$ dans $F \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G$, α vérifiant les conditions (*), (**) et (***).
On suppose que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. Si λ est une probabilité G-cylindrique de type (p,G) sur $E \otimes G$, dont l'image $\tilde{u}(\lambda)$ est de Radon sur $F \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G$, on a :

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p \leq \pi_{p,G}(\tilde{u}) \; \|\lambda\|^*_{p,G} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Représentons λ par une fonction aléatoire linéaire $v : E' \to L^p(\Omega,\mu,G)$. Soit (π_j) un filtre d'opérateurs de rang fini, continus pour $\sigma(E',E)$, $\|\pi_j\| \leq 1$, convergeant simplement vers l'identité de E'. Posons $v_j = v \circ \pi_j$. L'opérateur v_j représente une probabilité G-cylindrique λ_j sur $E \otimes G$, qui est en fait de Radon sur $E \otimes G$, d'après les conditions sur π_j. On a :

$$\|\lambda_j\|^*_{p,G} = \|v_j\| \leq \|v\| = \|\lambda\|^*_{p,G} \quad ,$$

et le filtre (λ_j) converge G-cylindriquement vers λ. Soit N un sous-espace fermé de codimension finies de F, $\tilde{\pi}_N$ la projection de $F \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G$ sur $F/N \underset{q\alpha}{\otimes} G$.

Le filtre $\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda_j))$ converge G-cylindriquement vers $\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda))$, donc étroitement puisque F/N est de dimension finie. On vérifie facilement que $\nu \to \|\nu\|_p$ est sci pour la topologie étroite, donc :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda))\|_p &\leq \liminf \|\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda_j))\|_p \\
&\leq \pi_{p,G}(\tilde{u}) \liminf \|\lambda_j\|^*_{p,G} \\
&\leq \pi_{p,G}(\tilde{u}) \|\lambda\|^*_{p,G}
\end{aligned}$$

d'après la proposition 2.

Maintenant, d'après (***), $\|x\|_\alpha$ est le sup filtrant des $\|\tilde{\pi}_N(x)\|_{q\alpha}$, donc puisque $\tilde{u}(\lambda)$ est supposée être une mesure de Radon sur $F \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} G$:

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p = \sup_N \|\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda))\|_p ,$$

ce qui achève la démonstration.

Le problème de savoir quand $\tilde{u}(\lambda)$ sera effectivement de Radon semble un peu délicat. Nous nous contenterons d'un cas très particulier.

<u>Théorème 2</u> : Supposons $1 < p < \infty$, et G réflexif. Soit u un opérateur linéaire

de E dans F, tel que $\tilde{u} = u \otimes Id$ soit (p,G)-sommant de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, α vérifiant (*) et (**). Pour toute probabilité G-cylindrique λ de type (p,G) sur $E \otimes G$, l'image $\tilde{u}(\lambda)$ est de Radon sur $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$,

et :

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p \leq \pi_{p,G}(u) \quad \|\lambda\|^*_{p,G} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Nous utiliserons la factorisation de Pietsch de l'opérateur $\tilde{u}$:

$$\begin{tikzcd}
 & C(K) \otimes G \arrow[r, "i_2"] & L^p(K,\mu,G) \\
E \otimes G \arrow[ur, "\tilde{i}_1 = i_1 \otimes Id"] \arrow[dr] & & \cup \\
 & \overline{S \otimes G} \arrow[r, "u_1"'] & F \hat{\otimes}_{\alpha} G
\end{tikzcd}$$

où $\|i_1\| \leq 1$, $\|u_1\| \leq \pi_{p,G}(\tilde{u})$, où μ est une probabilité de Radon sur un espace compact K, et où S désigne l'image de E dans $L^p(K,\mu)$ (par i_1 suivi de l'application canonique $C(K) \to L^p(K,\mu)$.).

Soit λ une probabilité G-cylindrique de type (p,G) sur $E \otimes G$, et $\tilde{\lambda} = \tilde{i}_1(\lambda)$. Puisque M(K) vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, $\tilde{\lambda}$ est limite G-cylindrique d'un filtre (λ_j) de probabilités de Radon sur $C(K) \otimes G$, tel que

$$\|\lambda_j\|^*_{p,G} \leq \|\tilde{\lambda}\|^*_{p,G} \leq \|\lambda\|^*_{p,G} \quad .$$

D'après la proposition 2, et compte tenu de ce que $\pi_{p,G}(i_2) \leq 1$:

$$\|i_2(\lambda_j)\|_p \leq \|\lambda_j\|^*_{p,G} \leq \|\lambda\|^*_{p,G} \quad .$$

Puisque $p > 1$ et G réflexif, l'espace $L^p(K,\mu,G)$ est réflexif, donc ses boules fermées sont faiblement compactes. D'après la proposition 3, le filtre $(i_2(\lambda_j))$ est contenu dans un compact de l'ensemble des probabilités de Radon pour la topologie faible, pour la convergence étroite faible. Le filtre $(i_2(\lambda_j))$ admet donc un point adhérent ν, mesure de Radon pour la topologie faible, et telle que :

$$\|\nu\|_p \leq \|\lambda\|^*_{p,G} .$$

Par ailleurs, $(i_2(\lambda_j))$ converge G-cylindriquement vers $i_2(\tilde{\lambda})$, et la topologie étroite faible et la topologie G-cylindrique ont une borne inférieure séparée sur $\mathcal{P}(L^p(K,\mu,G))$, à savoir la topologie la moins fine rendant continues les projections dans $\mathcal{P}(L^p/N \otimes G)$, muni de la topologie étroite faible. Par conséquent $i_2(\tilde{\lambda}) = \nu$. D'autre part, d'après un théorème de Phillips, [2], proposition (XI,2,3), ν est en fait une probabilité de Radon sur $L^p(K,\mu,G)$ muni de la topologie de la norme.

Nous allons montrer pour finir que ν est portée par $\overline{S \otimes G}$. Pour cela considérons sur $L^p(K,\mu,G)$ la topologie localement convexe dont un système fondamental de voisinages de zéro est fourni par les :

$$V = \{\varphi \in L^p(K,\mu,G) \ ; \ \|<f_i,\varphi>\|_G \leq \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \ f_1,\dots,f_n \in L^{p'}\}.$$

Cette topologie est comprise entre la topologie faible de $L^p(K,\mu,G)$ et la topologie de la norme, ce qui permet de prendre l'adhérence de $S \otimes G$ pour cette topologie.

Si ν n'est pas portée par $\overline{S \otimes G}$, soit φ_o un point du support de ν, tel que $\varphi_o \notin \overline{S_o \otimes G}$. On pourra trouver $\varepsilon > 0$, et $(f_1,\dots,f_n) \in L^{p'}$ tels que :

$$(1) \qquad \forall \ \varphi \in S \otimes G \qquad\qquad \sup_i \ \|<f_i,\varphi_o - \varphi>\|_G \geq \varepsilon .$$

Considérons le sous-espace fermé de codimension finie N de $L^p(K,\mu)$ défini par les équations $< f_i,g > = 0$, $i = 1,\dots,n$.

Considérons la projection $\tilde{\pi}_N$ de $L^p(K,\mu,G)$ sur $L^p/N \otimes G$. Puisque

$\nu = i_2(\tilde{\lambda}) = i_2 \circ \tilde{i}_1(\lambda)$, l'image $\tilde{\pi}_N(\nu)$ est portée par $\overline{\tilde{\pi}_N(S \otimes G)}$. D'autre part, $\tilde{\pi}_N(\varphi_o)$ appartient au support de $\tilde{\pi}_N(\nu)$, mais n'appartient pas à $\overline{\tilde{\pi}_N(S \otimes G)}$ en vertu de (1), d'où une contradiction qui prouve que $\nu = i_2(\tilde{\lambda})$ est portée par $\overline{S \otimes G}$.

Maintenant $\tilde{u}(\lambda) = u_1(\nu)$ est de Radon sur $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, et :

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p \leq \|u_1\| \ \|\nu\|_p \leq \pi_{p,G}(\tilde{u}) \ \|\lambda\|^*_{p,G} ,$$

ce qui achève la démonstration.

****

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973.

[2] Séminaire L. Schwartz 1969-1970.

****