A. Brunel

Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 18, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A20_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

ESPACES ASSOCIES A UNE SUITE BORNEE DANS UN ESPACE DE BANACH

(suite et fin)

par A. BRUNEL

Exposé N° XVIII

20 Mars 1974

Nous allons donner d'autres propriétés des suites E.S.A. Observons d'abord que si G est un espace de Banach muni d'une norme, notée $\| \cdot \|$, et si (e_n) est une suite de vecteurs unitaires, engendrant G et ayant la propriété E.S.A. relativement à la norme $\| \cdot \|$, les formes linéaires $f_k : \varphi(a) \to \sum_{i \geq k} a_i$; $a \in S$, sont continues.

En effet, on a $|f_k (\sum_i a_i e_i)| \leq \| \sum_i a_i e_i \|$ si la norme $\| \cdot \|$ est monotone et l'on a vu qu'il existe toujours une norme monotone et E.S.A., équivalente à la norme initiale $\| \cdot \|$. Remarquons aussi que si l'on pose pour tout entier $k > 0$, $e_k^* = f_k - f_{k+1}$, on a

$$< e_k^* , e_j > = \delta_{kj}$$

pour tout couple d'entiers (k,j).
La suite (e_n^*), dans le dual G^* de G, est alors la suite "duale" de (e_n).

<u>Proposition 7</u> : La suite $(f_n)_{n \geq 2}$ est une base E.S.A. pour le sous-espace de G^* engendré par ces vecteurs. Si (e_n) est aussi monotone, alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est E.S.A..

Commençons par montrer que la suite $e'_n = e_n - e_{n-1}$, avec $e_o = 0$, est une base de G. Tout $x \in G$, appartenant à $\varphi(S)$, peut s'écrire

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\ e'_k ,$$

où la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.
Posons, pour tout entier $m \geq 1$, $U_m(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\ e'_k$, et prouvons que la suite des normes $\| U_m(x) \|$ est croissante en m.

On a

$$\| U_{m+1}(x) \| = \| a_1 e_1 + \dots + a_m e_m + f_{m+1}(x) e_{m+1} \| \geq \| a_1 e_1 + \dots + (a_m + f_{m+1}(x)) e_m \|$$

$$= \| U_m(x) \| ,$$

si $x = \sum_i a_i e_i \in \varphi(S)$.

En effet, $f_m(x) = a_m + f_{m+1}(x)$.

Selon un théorème de M. Day [7], cela suffit pour montrer que (e'_n) est une base de G.

Soit maintenant $\omega = \sum_{i=2}^{n} b_i f_i$ un élément de $[f_n \,;\, n \geq 2]$, en désignant par ce dernier symbole le sous-espace fermé de G^* engendré par les f_n, $n \geq 2$. Posons $\tau = \omega + b_{k+1}(f_k - f_{k+1})$, k étant un entier compris entre 2 et n-1. La norme de τ, dans G^*, est égale à

$$\| \tau \|_* = \sup < \tau , \sum_i a_i e'_i > = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i , \text{ avec } a \in S, \quad \| \sum_i a_i e'_i \| = 1 .$$

Les résultats précédents concernant la suite (e'_n) montrent que l'on peut supposer $a_k = 0$, pour $k > n$. Par compacité le supremum est atteint et il existe un vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e'_i$, $\| x \| = 1$, tel que $\| \tau \|_* = < \tau, x >$.

Posons $a_{k+1} = \gamma$. La relation $\| x \| = 1$ peut s'écrire

$$(1) \qquad 1 = \| \dots a_k(e_k - e_{k-1}) + \gamma\,(e_{k+1} - e_k) + a_{k+2}(e_{k+2} - e_{k+1}) + \dots \|$$

$$= \| \dots (a_{k-1} - a_k) e_{k-1} + (a_k - \gamma) e_k + (\gamma - a_{k+2}) e_{k+1} + \dots \|$$

d'où l'on déduit que

$$(2) \qquad \| \dots (a_{k-1} - a_k) e_{k-1} + 0 . e_k + (a_k - a_{k+2}) e_{k+1} + \dots \| \leq 1 .$$

Ainsi, en prenant $\gamma = a_k$ dans (1), on ne peut que diminuer $\|x\|$, tandis que $<\tau, x>$ n'est pas modifié. Donc l'inégalité dans (2) est une égalité et l'on peut prendre $\gamma = a_k$ dans l'expression de x.
Il en résulte que $\|\tau\|_* \leq \|\omega\|_*$. Cette dernière relation entraîne la propriété cherchée pour $(f_n)_{n \geq 2}$.

Pour achever la démonstration, observons que ce qui sert essentiellement dans l'argument précédent c'est la présence des termes consécutifs $(a_k - \gamma) e_k + (\gamma - a_{k+2}) e_{k+1}$.

Lorsque l'on considère la suite entière $(f_n)_{n \geq 1}$, il se peut que $(\gamma - a_2) e_1$ soit le seul terme qui intervienne dans l'expression à minorer et, si l'on suppose (e_n) monotone, le résultat reste vrai.

<u>Proposition 8</u> : Supposons que (e_n) soit une suite **E.S.A.** monotone engendrant G, et que c_o ne soit pas contenu dans G^*. Alors (f_n) est une base E.S.A. et "boundedly complete" de G^*.
En outre (e_n) est une base "1-shrinking" de G.

On sait que (f_n) est "boundedly complete" si G^* ne contient pas c_o.
Il en résulte que (e_n') a la propriété de "shrinking".
Ceci entraîne que $[f_n ; n \geq 1] = G^*$. On en déduit que

$$(f_1, f_1 - f_2, f_2 - f_3, \ldots) = (f_1, e_1^*, e_2^*, \ldots),$$

est une base de G^*. Ainsi $[e_n^*]$ est de codimension 1 dans G^*, c'est-à-dire que (e_n) est "1-shrinking".

<u>Théorème 7</u> : Supposons que G ne contienne ni c_o, ni un sous-espace complémenté isomorphe à l^1. Alors G est quasi-réflexif. En outre, il existe sur G une norme E.S.A., équivalente à la norme initiale, qui rend G isométriquement isomorphe à son bidual.

L'hypothèse faite entraîne que G^* ne contienne pas c_o. Les propositions précédentes montrent alors que (e_n) est une base de G ayant les propriétés "boundedly complete" et "1-shrinking". Ceci prouve que G est quasi-réflexif (voir [6]). Il reste à prouver la dernière assertion du théorème.

Introduisons les éléments g_n de G^{**}, reliés aux f_n comme les f_n l'étaient aux (e_n) ; c'est-à-dire que l'on a

$$< g_n , \sum_i b_i f_i > = \sum_{i \geq n} b_i , \quad \text{pour } b \in S .$$

On va supposer dans ce qui va suivre que la norme $| . |_*$ est monotone sur les (f_n), ce qui revient à remplacer éventuellement la norme initiale $| . |$ par une norme E.S.A., équivalente.

Observons aussi que

$$< f_j , e_n > = 1 \quad (\text{resp. } 0), \quad \text{si } j \leq n \quad (\text{resp. } j > n) ,$$

$$< g_1 - g_{n+1} , f_j > = 1 \ (\text{resp. } 0), \ \text{si } j \leq n \quad (\text{resp. } j > n).$$

Soit alors Q l'application canonique d'immersion de G dans G^{**}.
On a $Q(e_n) = g_1 - g_{n+1}$. Nous nous proposons d'établir que l'application linéaire $R : G \to G^{**}$, définie par $R(e_n) = g_n$, pour tout entier n, est l'isométrie cherchée.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i$, un élément de G^{**}, pour lequel $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

On a

$$(3) \qquad | x |_{**} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

pour un $y = \sum_{k=1}^{n} y_k (f_k - f_{k-1})$, avec $| y |_* = 1$.

On peut se limiter au cas où $y_k = 0$ pour $k > n$, parce que la suite $(f_n - f_{n-1})_{n \geq 1}$, $f_o = 0$, est monotone à droite par la propriété E.S.A..
On peut aussi écrire $y = (y_1 - y_2) f_1 + \ldots + (y_{n-1} - y_n) f_{n-1} + y_n f_n$, et l'on applique la propriété E.S.A. à (f_n)).

On a

$$y = y_1 f_1 - y_2 e_1^* \cdots - y_n e_{n-1}^* = (y_1-y_2)e_1^* + (y_1-y_3)e_2^* + \cdots + (y_1-y_n)e_{n-1}^* + y_1 f_n ,$$

et il est facile de vérifier l'égalité des normes

$$| y |_* = | (y_1-y_2)e_1^* + (y_1-y_3)e_2^* + \cdots + (y_1-y_n)e_{n-1}^* + y_1 e_n^* |_* .$$

Si l'on ajoute une même constante aux coordonnées y_i, la quantité $\sum_i x_i y_i$ ne change pas et, par monotonie, on peut supposer que $y_1 = 0$, lorsque (3) est réalisée. Finalement

$$| x |_{**} = x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n \quad \text{avec} \quad | y_2 e_1^* + \cdots + y_n e_{n-1}^* |_* = 1 .$$

Mais on a aussi

$$\sum_{i=2}^{n} x_i y_i = < \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{i=2}^{n} y_i e_i^* > \leq | \sum_{i=1}^{n} x_i e_i | .$$

On vient de prouver que si $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors on a

$$| \sum_{i=1}^{n} x_i g_i |_{**} \leq | \sum_{i=1}^{n} x_i e_i | .$$

Partons maintenant de $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

On a toujours pour les mêmes raisons :

$$| u | = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ pour un } y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^* , \text{ avec } | y |_* = 1 .$$

Mais $| y |_* = | y_1 e_1^* + \cdots + y_{n-1} e_{n-1}^* + y_n f_n | = | y_1 f_1 + (y_2 - y_1) f_2 + \cdots + (y_n - y_{n-1}) f_n |_*$,

et, si l'on ajoute un même nombre aux y_i la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ne change pas et, par monotonie de $| \, . \, |_*$, on peut supposer que $y_1 = 0$. Donc

$$| u | = \sum_{i=2}^{n} x_i y_i \leq | \sum_{i=1}^{n} x_i g_i |_{**} .$$

On a aussi montré que l'application linéaire $\tilde{R}$ du sous-espace de G, engendré par e_1-e_2, $e_2-e_3, \ldots$, dans le sous-espace de G^{**}, engendré par g_1-g_2, $g_2-g_3, \ldots$, définie par $\tilde{R}(e_n-e_{n+1}) = g_n-g_{n+1}$, est une isométrie.
Mais si l'on tient compte des égalités $g_1-g_2 = Q(e_1)$, $(g_2-g_3) = Q(e_2-e_1), \ldots$, on en déduit que, dans G^{**}, les sous-espaces

$$[Q(e_1),Q(e_2)-Q(e_1),Q(e_3)-Q(e_2),\ldots] \quad \text{et} \quad [Q(e_2)-Q(e_1),Q(e_2)-Q(e_3),\ldots]$$

sont isométriquement isomorphes pour l'application linéaire V, définie par $V(Q(e_1)) = Q(e_2) - Q(e_1)$, $V(Q(e_2) - Q(e_1)) = Q(e_3) - Q(e_2), \ldots$.

Cela prouve que

$$G^{**} = [g_1,g_2-g_1,g_3-g_2,\ldots] \quad \text{et} \quad [g_2-g_1,g_3-g_2,\ldots] \subset G^{**}$$

sont isométriquement isomorphes, comme le sont aussi

$$G = [e_1,e_2-e_1,e_3-e_2,\ldots] \quad \text{et} \quad [e_2-e_1,e_3-e_2,\ldots] \subset G .$$

* * *