Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

A. Brunel

Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 15, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A17_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

ESPACES ASSOCIES A UNE SUITE BORNEE DANS UN ESPACE DE BANACH

par A. BRUNEL

Exposé N° XV

27 Février 1974

I. INTRODUCTION

Au cours de ces 3 séances seront exposés quatre articles d'Antoine Brunel et Louis Sucheston, H. Fong ayant collaboré à l'un d'eux, et qui sont :

[1] - On B-convex Banach spaces. Math. Syst. Th. Vol.7, n°4, 1973, pp 294-299.

[2] - On J-convexity and some ergodic super-properties of Banach spaces. Trans A. M. S.

[3] - (avec H. Fong) - An ergodic super-property of Banach spaces, defined by a class of matrices - Proceedings.

[4] - Equal signs additive sequences.

Pourquoi des ergodiciens ont-ils été amenés à s'intéresser aux suites bornées dans un Banach ? On sait qu'une condition suffisante de réflexivité d'un Banach X peut s'énoncer ainsi : de toute suite bornée (x_n) on peut extraire une sous-suite qui converge fortement au sens de Cesaro. (Nous dirons d'un tel X qu'il possède la propriété de Banach-Saks).
Si $(y_i) = (x_{k_i})$ est cette sous-suite, on aimerait pouvoir écrire :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i y_1 ,$$

T étant une isométrie de X dans lui-même, et voir s'il est possible d'appliquer le théorème ergodique en moyenne à T.

En général, il n'y a aucune raison pour l'existence d'un tel T, associé à une quelconque sous-suite de (x_n), même si $\|x_n\| = C^t$, mais, et c'est là le résultat essentiel de [1], il est possible de construire une sous-suite (en excluant quelques cas triviaux) engendrant un autre espace de Banach F, pour lequel T existe, et ceci de telle sorte que F soit voisin de X, plus précisément de telle sorte que F soit finiment représentable dans X, ce que nous écrirons F f. r. X et dont nous donnons la définition précise.

<u>Définition 1</u> : On dira que le Banach X_1 est finiment représentable dans le Banach X_2 si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace de dimension finie

X_1' de X_1, il existe un isomorphisme $V : X_1' \to X_2$ tel que

$$\forall\, x \in X_1' \qquad \left|\, \|Vx\|_2 - \|x\|_1 \right| \le \varepsilon\ \|x\|_1 .$$

A propos de cette définition, rappelons le résultat célèbre de Dvoretzki, si $\dim(X) = \infty$, alors l^2 f. r. X. Il faut aussi mentionner là un résultat de R. C. James relatif aux espaces B-convexes. Ces espaces ont été introduits par A. Beck (1962) qui a donné la

Définition 2 : Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et k entier > 0. L'espace X est appelé (k,ε)-convexe si, pour toute famille $(x_1,\dots,x_k)$ d'éléments de X, de norme 1, on a

$$\inf_{\varepsilon = \pm 1} \left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\, x_i \right\| < 1 - \varepsilon .$$

Un Banach X qui vérifie les conditions précédentes pour au moins un couple (k,ε) est dit B-convexe.

Le théorème de James est alors

Théorème 1 : X n'est pas B-convexe si, et seulement si, l^1 f. r. X.

James a aussi démontré que

Théorème 2 : Si X est $(2\text{-}\varepsilon)$-convexe pour un $\varepsilon \in]0,1[$, alors X est réflexif et même super-réflexif.

Le préfixe "super" dans le dernier énoncé a la signification suivante. Soit $\mathcal{P}$ une propriété qu'un Banach peut posséder ou non. On dira que X a la propriété "super - $\mathcal{P}$" si Y f. r. X $\Rightarrow$ Y a la propriété $\mathcal{P}$.

En fait, récemment Enflo a caractérisé les espaces super-réflexifs de la façon suivante :

Théorème 3 : Un Banach est super-réflexif si, et seulement si, il est uniformément convexifiable.

Observons maintenant que la $(2-\varepsilon)$-convexité est une super-propriété en ce sens que : (X est $(2-\varepsilon)$-convexe et (Y f. r. X) $\Rightarrow$ Y est $2-\varepsilon$ convexe. De ceci découle immédiatement le dernier point du théorème 2. Notons aussi que la B-convexité est une super-propriété. Soit X, B-convexe et Y f. r. X. Si l'on avait l^1 f. r. Y, par transitivité on en déduirait l^1 f. r. X, ce qui est une contradiction.

II. Procédé d'extraction de "bonnes sous-suites".

Le résultat essentiel de [1] est la proposition suivante où S désigne l'espace vectoriel des suites réelles à support fini.

Proposition 1 : Etant donné un Banach X et une suite bornée (x_n) dans X, il existe une suite (e_n) extraite de (x_n) et une application $L : S \to \mathbb{R}_+$, telles que,

$$\forall\, a \in S \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \quad (\nu < n_1 < n_2 < \dots) \Rightarrow \left|\, \left\|\sum_i a_i e_{n_i}\right\| - L(a) \right| \leq \varepsilon .$$

La démonstration repose sur le théorème combinatoire de Ramsey,

Théorème 4 : Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des k- uples $\overline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, d'entiers distincts. Si $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ est une partition de $\mathcal{K}$, il existe une partie infinie I de $\mathbb{N}$ telle que tous les $\overline{n}$ dont les composantes sont dans I appartiennent au même sous-ensemble $\mathcal{K}'$, ou $\mathcal{K}''$.

Soit $\psi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$, définie par $\psi(\overline{n}) = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{n_i} \right\|$, a étant fixé dans S. ψ est bornée, $0 \leq \psi(n) \leq \alpha$. Supposons que $a_j = 0$ si $j > k$ et posons

$$\mathcal{K}' = \{\overline{n} \mid 0 \leq \psi(\overline{n}) \leq \tfrac{\alpha}{2}\} \quad , \quad \mathcal{K}'' = \{\overline{n} \mid \tfrac{\alpha}{2} < \psi(\overline{n}) \leq \alpha\}.$$

Il existe alors une suite croissante d'entiers (i_n^1), telle que, par exemple $0 \leq \psi(\overline{n}) \leq \frac{\alpha}{2}$ si les composantes de $\overline{n}$ sont prises dans (i_n^1).

Puis on itère l'argument en partageant en deux l'intervalle $[0,\frac{\alpha}{2}]$. Il est clair que la suite extraite de (x_n) donnée par la suite diagonale (i_n^n) vérifie l'énoncé de la Proposition 1 pour un certain nombre L(a).

On considère alors les $a \in S$, à coordonnées rationnelles. On les ordonne d'une façon quelconque. Une application supplémentaire de la méthode diagonale donne le résultat cherché pour ces a, à coordonnées rationnelles. Un argument de continuité évident achève la démonstration.

■

Nous supposerons maintenant qu'une telle sous-suite a été choisie et nous la noterons (e_n). On pourra aussi supposer que (e_n) est une famille libre, quitte éventuellement à extraire une autre sous-suite. Sinon, on possède déjà une sous-suite convergente dans X. Soit φ l'application linéaire injective de S dans X, donnée par $\varphi(a) = \sum_i a_i e_i$. Il est clair que l'application

$$\varphi(a) \to |\varphi(a)| = L(a),$$

est une semi-norme sur $\varphi(S)$.

<u>Lemme 1</u> : Si pour un $a \in S$, $a \neq 0$, on a $L(a) = 0$, la suite (e_n) est une suite de Cauchy.

Supposons par exemple $a = (a_1, a_2, a_3, 0, 0\ldots)$ et $a_1 \neq 0$. Pour $\varepsilon > 0$ et un certain entier ν, les inégalités $\nu < n < p < n_1 < n_2$, entraînent que

$$\| a_1 e_n + a_2 e_{n_1} + a_3 e_{n_2} \| \le \frac{\varepsilon}{2|a_1|}$$

$$\| a_1 e_p + a_2 e_{n_1} + a_3 e_{n_2} \| \le \frac{\varepsilon}{2|a_1|} \quad ,$$

qui impliquent à leur tour $\| e_n - e_p \| \le \varepsilon$.

■

En résumé, deux cas se présentent :

- ou bien, il existe une sous-suite convergente extraite de (x_n),
- ou alors, il existe une sous-suite (e_n), telle que l'application

$$a \in S \qquad \sum_i a_i e_i \longmapsto \left|\sum_i a_i e_i\right| = L(a),$$

soit une norme sur $\varphi(S)$. On pourra aussi supposer que $|e_i| = 1$.

<u>Lemme 2</u> : La norme précédente est invariante par translation et par "étalement", c'est-à-dire que, pour tout $a \in S$, et toute suite croissante d'entiers (k_i), on a

$$\left|\sum_i a_i e_i\right| = \left|\sum_i a_i e_{k_i}\right| .$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.

<u>Proposition 2</u> : Si $\varphi(S)$ est un espace normé et F le complété de $\varphi(S)$, alors F f. r. X.

Soit F' un sous-espace de dimension finie de F et $(f'_1,\dots,f'_p)$ une base de F'. Si ε est donné, on peut approcher les f'_i par des combinaisons linéaires des e_n et choisir m, tel qu'il existe $f''_1,\dots,f''_p$ dans $E = [e_1,e_2,\dots,e_m]$ de sorte que l'application linéaire U définie par $Uf'_i = f''_i$ soit un isomorphisme de F' dans l'espace F", engendré par les f''_i, qui vérifie la condition

$$\forall\, x' \in F' \qquad \big|\,|Ux'| - |x'|\,\big| \le \frac{\varepsilon}{4}\,|x'| .$$

D'autre part, l'application linéaire $T : \varphi(S) \to \varphi(S)$ définie par $T(\sum_i a_i e_i) = \sum_i a_i e_{i+1}$; $a \in S$, se prolonge en une isométrie de F dans F.

Puisque $\lim_{n\to\infty} \left\|T^n\left(\sum_{i=1}^m a_i e_i\right)\right\| = \left|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right|$, on peut aussi considérer la famille $T^n|_E$ comme une famille équicontinue d'applications linéaires de E dans X, en munissant E de la norme induite par celle de X. Si K est une partie compacte de E, $\|T^n x\|$ converge uniformément sur K, ce qui montre l'existence d'un entier q, tel que l'opérateur $W = T^q$ satisfasse à la condition

$$\forall\, y \in E \qquad \big|\, \|Wy\| - |y| \,\big| \leq \frac{\varepsilon}{4}\, |y| .$$

Alors, l'application linéaire $V = WU$ vérifie les conditions cherchées.

∎

III. Propriétés de l'isométrie $T : F \to F$ et de l'espace de Banach F.

Résumons les propriétés déjà vues de F. Le sous-espace $\varphi(S)$ est dense dans F et la norme $|.|$ de F est invariante sous l'étalement, en restriction à $\varphi(S)$. L'opérateur T est une isométrie de F dans lui-même. Pour chaque n, désignons par F_n le sous-espace fermé de F engendré par les $(e_i : i \geq n)$. La suite F_n est décroissante. Soit $F_\infty = \bigcap_n F_n$. On a

__Lemme 3 :__ Un élément y de F est dans F_∞, si et seulement si $y = Ty$.

Supposons d'abord $y \in F_\infty$. Pour tout ε et tout entier n, il existe $\varphi(a) \in F_n$, tel que $|y - \varphi(a)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Soit p un entier à partir duquel $a_j = 0$ si $j \geq p$. Il existe aussi $\varphi(b) \in F_p$, vérifiant $|y - \varphi(b)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Par invariance sous l'étalement, on a donc $|\varphi(a) - T\varphi(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Puis, par isométrie $|Ty - T\varphi(b)| < \frac{\varepsilon}{4}$. On en déduit $|y - Ty| < \varepsilon$, et enfin $y = Ty$.

Inversement si $y = Ty$, $y \in TF = F_1$. Par récurrence, on démontre que $y \in F_n$, pour tout entier n, ce qui donne $y \in F_\infty$.

∎

__Remarque__ : Une conséquence de ce qui précède est $e_1 \notin F_2$. Sinon, on aurait $F_1 = F_2 = \ldots$, puis $e_1 \in F_\infty$, qui entraînerait $e_1 = Te_1 = e_2$, ce qui est absurde. Les sous-espaces F_n forment donc une suite strictement décroissante.

__Proposition 3__ : Si $F_\infty \neq \{0\}$, on a alors

$$\dim F_\infty = 1 \quad \text{et} \quad F = F_\infty \oplus \overline{(1 - T)F} .$$

Soit $\sigma : \varphi(S) \to \mathbb{R}$, la forme linéaire définie par

$$\sigma(\varphi(a)) = \sum_i a_i .$$

Il est aisé de vérifier que $\sum_i a_i = 0$, si et seulement si $\varphi(a) \in (1-T)F$.

Si σ n'est pas continue, $(1-T)F$ est dense dans F et dans ce cas $F_\infty = \{0\}$. Donc l'hypothèse $F_\infty \neq \{0\}$ entraîne que σ soit continue et se prolonge à F tout entier. Tout élement y de F peut s'écrire $y = \alpha e_1 + z$ avec $z \in \overline{(1-T)F}$, et alors $\sigma(y) = \alpha$. Si $y \in F_\infty$, $\sigma(y) \neq 0$ lorsque $y \neq 0$, d'où l'on déduit que $\dim F_\infty = 1$. La somme directe topologique $F = F_\infty \oplus \overline{(1-T)F}$ en découle aussitôt.

∎

La proposition 3 montre que T vérifie le théorème ergodique dans le cas où $F = \overline{(1-T)F}$, ou bien $F = F_\infty \oplus \overline{(1-T)F}$ et dans chacun de ces cas, on a

$$\forall\, y \in F \qquad \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n} \sum_{k=1+r}^{n+r} T^k y - \tilde{y}\Big| = 0,$$

uniformément en $r \in \mathbb{N}$, pour un élément $\tilde{y} \in F_\infty$.

Pour énoncer la proposition suivante, il nous faut donner une définition.

<u>Définition 3</u> : Une suite bornée (u_n),d'un espace de Banach F, sera dite stable s'il existe $\tilde{u} \in F$, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_{i_k} - \tilde{u}\Big| = 0,$$

et ceci, uniformément sur l'ensemble des suites croissantes d'entiers (i_n).

Remarquons qu'une suite stable possède la propriété de Banach-Saks.

<u>Proposition 4</u> : Si le shift T vérifie le théorème ergo ique dans F, il existe une sous-suite de la suite (e_n), stable dans X.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$, tel que

$$\forall\ p,q \geq N(\varepsilon) \qquad \left|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} e_i - \frac{1}{q}\sum_{i=p+1}^{p+q} e_i\right| < \varepsilon.$$

Il existe aussi un entier $M(\varepsilon,p,q)$, défini si $p,q \geq N(\varepsilon)$, tel que, pour tout système d'entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_p < n_{p+1} < \dots < n_{p+q}$, si $n_1 \geq M(\varepsilon,p,q)$, on ait

$$(1) \qquad \left\|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} e_{n_i} - \frac{1}{q}\sum_{i=p+1}^{p+q} e_{n_i}\right\| < \varepsilon.$$

Choisissons alors une suite d'entiers P_n, vérifiant les conditions : $P_n \geq N(2^{-n})$, $P_n > nP_{n-1}$. Posons enfin $\nu_n = M(2^{-n},P_n,P_{n+1})$ et $r_n = \sum_{j=1}^{n} (\nu(j)+P_j)$. On a $r_{n+1} > r_n + P_n$ et $r_n \geq \nu_n$.

Considérons, dans X, la suite $\xi_n = \frac{1}{P_n}\sum_{j \leq P_n} e_{r_n+j}$. L'inégalité (1) entraîne que $\|\xi_n - \xi_{n+1}\| < 2^{-n}$, donc que (ξ_n) converge dans X vers un élément $\overline{\xi}$. Considérons les termes $e_i - \overline{\xi}$ d'indices i, pris dans la suite

$$r_1+1,\ r_1+2,\dots,\ r_1+P_1,\ r_2+1,\dots,\ r_2+P_2,\dots,\ r_n+1,\dots,\ r_n+P_n,\dots,$$

et appelons ces éléments $e_i - \xi$, $y_1, y_2, \dots$ en les prenant dans cet ordre. L'inégalité (1) entraîne aussi que

$$(2) \qquad \forall\ n \qquad \left\|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{P_n} e_{m_i} - \overline{\xi}\right\| \leq 2^{-n+3},$$

si l'on a $r_n < m_1 < m_2 < \dots < m_{P_n}$.

Soit maintenant (i_n) une suite strictement croissante d'entiers et considérons la séquence $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}$. Posons pour simplifier $z_l = y_{i_l}$ pour $l = 1,2,\dots,n$. Soit k, l'entier défini par $P_1+\dots+P_k \leq n < P_1+\dots+P_{k+1}$ et $m = n - \sum_{i=1}^{k} P_i$.

Les divisions euclidiennes $\quad m = d_k P_k + Q_k \qquad Q_k < P_k$,

$$Q_k = d'_k P_{k-1} + Q'_k \qquad Q'_k < P_{k-1} ,$$

définissant les entiers d_k, d'_k, Q_k, Q'_k.

Il résulte alors de l'inégalité (2), que

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = (z_1 + \dots + z_{P_1}) + (z_{P_1+1} + \dots + z_{P_1+P_2}) + \dots + (z_{P_1+\cdot+P_{k-1}+1} + \dots + z_{P_1+\dots+P_k})$$

$$+ (z_{P_1+\cdot+P_k} + \dots + z_n),$$

est majorée en norme $\|.\|$, par

$$(P_1 \, 2^{3-1} + \dots + P_k \, 2^{3-k}) + d_k P_k \, 2^{3-k} + d'_k \, P_{k-1} \, 2^{3-(k-1)} + Q'_k \; .$$

En divisant par n, on obtient

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_{i_j} \right\| \leq 8 \, \frac{\sum_{j=1}^{k} P_j \, 2^{-j}}{\sum_{j=1}^{k} P_j} + 2^{3-k} + 2^{3-(k-1)} + \frac{P_{k-1}}{P_k} ,$$

et ceci achève la preuve de la stabilité dans X de la suite (y_n).

∎

<u>Définition 4</u> : On dira qu'un espace de Banach X est stable si toute suite bornée dans X, contient une suite extraite stable.

Paul Erdős et Magidor ont démontré l'identité des espaces de Banach stables et de ceux qui possèdent la propriété Banach-Saks. Il est clair que l'on a les implications suivantes

$$\text{Stabilité} \Rightarrow \text{Réflexivité} \Rightarrow \text{Ergodicité},$$

en convenant de dire qu'un Banach est ergodique si chaque isométrie linéaire vérifie le théorème ergodique. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

Théorème 5 : Les propriétés de super-stabilité, super-réflexivité, super-ergodicité sont équivalentes.

Il est clair que super-stabilité $\Rightarrow$ super-réflexivité $\Rightarrow$ super-ergodicité. Supposons que X soit super-ergodique et soit Y unespace de Banach, finiment représentable dans X. Si (y_n) est une suite bornée dans Y, qui ne soit pas une suite de Cauchy, il existe une bonne sous-suite (e_n) de (y_n) qui définisse un espace de Banach F, tel que F f. r. Y. Puisque F f. r. X, le shift T sur F vérifie le théorème ergodique et, par la proposition 4, (e_n) contient une sous-suite stable dans Y. Donc Y est un Banach stable et ceci prouve que X est super-stable, ce qui achève la démonstration.

IV. L'espace G de type E.S.A. Application aux Banach uniformément non carrés.

Compte tenu du résultat, déjà mentionné, d'Enflo, un espace de Banach est super-stable ou super-ergodique si, et seulement si, il est uniformément convexifiable.

Nous avons vu comment, à toute suite bornée dans X, on peut associer une bonne sous-suite et un espace de Banach F, finiment représentable dans X, et admettant des propriétés assez simple relativement à un shift défini sur F. Nous allons maintenant simplifier la situation en construisant, dans le cas où le shift ne satisfait pas au théorème ergodique, un autre espace de Banach G, finiment représentable dans F, muni d'un shift ayant des propriétés encore plus simples que celles du shift sur F.

Soit $a \in S$ et, pour fixer les idées, supposons que $a = (a_1, a_2, 0, 0, .)$. Pour tout couple d'entiers > 0, n_1 et n_2, posons

$$M(n_1, n_2 ; a) = \left| \frac{a_1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} e_i + \frac{a_2}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} e_i \right| .$$

Par raison de convexité, on voit aisément que

$$L(a) \geq M(n_1,n_2 ; a) \quad \geq \quad M(n_1n_1',n_2n_2' ; a),$$

quels que soient les entiers > 0, n_1,n_2,n_1',n_2'. On déduit de là que $\lim\limits_{n_1,n_2\to\infty} M(n_1,n_2 ; a)$ existe et l'on pose

$$\vdots\, \varphi(a) \,\vdots = \lim_{n_1,n_2\to\infty} M(n_1,n_2 ; a),$$

et, il est immédiat que $\vdots\, . \,\vdots$ est une semi-norme sur $\varphi(S)$, majorée par $|\ .\ |$. Il est aussi clair que $\vdots\, . \,\vdots$ est invariante sous l'étalement.

Si le shift T sur F est ergodique, alors $\vdots\, e_1 - e_2 \,\vdots = 0$. Sinon, nous affirmons que $\vdots\, . \,\vdots$ est une norme, ce qui se voit à partir de l'importante propriété suivante.

<u>Proposition 5</u> : Soit $a \in S$ et supposons que pour un indice k, $a_ka_{k+1} \geq 0$. Alors, on a l'égalité

$$\vdots\, \varphi(a) \,\vdots = \vdots\, \varphi(a) + a_{k+1}(e_k - e_{k+1}) \,\vdots\ .$$

On peut se limiter au cas où $a_ka_{k+1} > 0$. Supposons d'abord que $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ soit rationnel. On peut alors écrire $a_k = p\alpha$, $a_{k+1} = q\alpha$, p et q étant deux entiers > 0. Parmi les termes $M(n_1,n_2 ; a)$, on a ceux de la forme

$$|\ldots + \frac{p\alpha}{pn}(e_{j+1}+\ldots+e_{j+pn}) + \frac{q\alpha}{qn}(e_{j+pn+1}+\ldots+e_{j+(p+q)n})+\ldots| =$$

$$= |\ldots+\frac{(p+q)\alpha}{(p+q)n}\ (e_{j+1}+\ldots+e_{j+(p+q)n})+\ldots|,$$

et le second membre de cette égalité est un terme $M(n_1,n_2 ; a')$, associé à l'élément $\varphi(a') = \varphi(a) + a_{k+1}(e_k - e_{k+1})$. Puis, on applique un argument évident de continuité pour achever la démonstration.

∎

<u>Corollaire</u> : Soit $a \in S$. Si $a_k, a_{k+1}, \dots a_l$ sont des coordonnées consécutives de a, on a l'inégalité

$$\left| \sum_{i<k} a_i e_i + \left(\sum_{i=k}^{l} a_i\right) e_k + \sum_{i>l} a_i e_i \right| \leq \left| \sum_i a_i e_i \right| .$$

Il suffit bien entendu de considérer deux termes consécutifs $a_k e_k + a_{k+1} e_{k+1}$. Commençons par examiner le cas particulier $a_k = \alpha$, $a_{k+1} = -\alpha$, et écrivons pour simplifier $u = \sum_{i<k} a_i e_i$, $v = \sum_{i>l} a_i e_i$. Soit n un entier positif et m un autre entier suffisamment grand pour que l'on puisse écrire, par invariance sous l'étalement, les égalités

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &= |u + \alpha(e_k - e_{k+1}) + T^m v| \\ &= |u + \alpha(e_{k+1} - e_{k+2}) + T^m v| \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= |u + \alpha(e_{k+n-1} - e_{k+n}) + T^m v| . \end{aligned}$$

On en tire

$$|\varphi(a)| \geq \left| u + \frac{\alpha}{n}(e_k - e_{k+n}) + T^m v \right| ,$$

et encore

$$|\varphi(a)| \geq |u + v| - \frac{2|\alpha|}{n} .$$

Faisant tendre n vers ∞, on en déduit le résultat cherché. Si maintenant $a_k + a_{k+1} = \beta$ n'est pas nul, l'un des nombres a_k ou a_{k+1} a le même signe que $-\beta$; supposons que ce soit a_k. En appliquant la proposition 5, on a

$$|\varphi(a)| = |u + a_k e_k + (-a_k+\beta)e_{k+1} + v| = |u + a_k e_k - a_k e_k + \beta e_{k+2} + Tv| \geq$$

$$\geq |u + \beta e_{k+2} + Tv| = |u + \beta e_k + v| .$$

∎

Nous pouvons maintenant prouver que $|\,.\,|$ est une norme si $|e_1 - e_2| \neq 0$.
Soit $a = (a_1, a_2, \ldots) \in S$ et supposons $a_1 \neq 0$. Si $|\varphi(a)| = 0$, on a aussi $|a_1 e_1 + b e_2| = 0$, en appliquant le corollaire avec $b = \sum_{i>1} a_i$. On ne peut pas avoir $b = -a_1$ d'après l'hypothèse $|e_1 - e_2| \neq 0$.
En outre, $|a_1 e_1 + b e_2| \geq |a_1 + b| . |e_1|$ et $|e_1| = |e_2| \neq 0$ entraîne que $a_1 + b = 0$, ce qui entraîne une contradiction.

En résumé, si T ne vérifie pas le théorème ergodique dans F, $|\,.\,|$ est une norme sur $\varphi(S)$ et l'on notera G le complété de $\varphi(S)$ pour cette norme. La norme $|\,.\,|$ a la propriété énoncée dans la proposition 5 et nous dirons que la suite (e_n), engendrant G, est E. S. A. pour G (equal signs additive sequence).

<u>Proposition 6</u> : Lorsque l'espace de Banach G existe, on a aussi G f. r. X.

La démonstration est la même que pour la proposition 2 et nous laissons la vérification au lecteur.

Donnons tout de suite une application de ces espaces G.

<u>Théorème 5</u> : Les espaces $(2-\varepsilon)$-convexes sont super-réflexifs.

Commençons par prouver que G est uniformément carré, c'est-à-dire que G n'est pas $(2-\varepsilon)$-convexe pour tout ε, si G ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_o. En effet, cette dernière hypothèse implique que

$$\lim_n \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k e_k \right| = +\infty .$$

Pour démontrer cela, posons $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = e_3 - e_4, \dots$, et considérons le sous-espace U de G, engendré par les u_i.
Soit $x \in S$, $x' \in S$ et supposons que supp(x') $\subset$ supp (x). En utilisant le corollaire, on voit que

$$\left\| \sum_i x_i u_i \right\| \geq \left\| \sum_i x'_i u_i \right\| ,$$

qui donne aussitôt,

$$\left\| \sum_i \varepsilon_i x_i u_i \right\| \leq 2 \left\| \sum_i x_i u_i \right\| ,$$

pour tout choix des $\varepsilon_i = \pm 1$. On déduit de là que, si $\left\| \sum_1^n u_i \right\|$ est une suite bornée, $U \sim C_o$.

Soit alors n un entier positif et u et v les vecteurs de $\varphi(S)$ donnés par

$$u = K_n(e_1 \;\; -e_3 \;\; +e_5 \dots \;\; +e_{4n-3} \;\; -e_{4n-1})$$

$$v = K_n(\;\; e_2 \;\; -e_4 \;\; +e_6 \dots +e_{4n-2} \;\; -e_{4n}),$$

où K_n est choisi de telle sorte que $\| u \| = \| v \| = 1$. En appliquant la propriété E. S. A., on obtient

$$\| u + v \| = 2 , \quad \left| \| u - v \| - 2 \right| \leq 2K_n .$$

Ainsi pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, en choisissant n suffisamment grand, on peut trouver deux vecteurs unitaires u et v, tels que

$$\inf_{\varepsilon = \pm 1} \left\| \frac{1}{2} (u + \varepsilon v) \right\| > 1 - \varepsilon,$$

ce qui démontre que G est uniformément carré.

Soit alors X un Banach $(2-\varepsilon)$-convexe. Toute suite bornée dans X contient une sous-suite stable, sinon il existerait un G f : X, ne contenant pas C_o, et cela conduirait à une contradiction puisque la (2-ε)-convexité est une super-propriété. Donc X a la propriété de stabilité et même de super-stabilité.

∎

Voici une autre propriété importante de G.

<u>Théorème 6</u> : La suite (e_n) est une base conditionnelle de G. Si G ne contient pas C_o, alors (e_n) est "boundedly complete".

Introduisons de nouvelles notations. Soient $x,y,z \in \varphi(S)$. Nous écrirons $y\,L\,x$ (resp. $z\,R\,x$) pour exprimer que le support de y (resp. de z) est à gauche (resp. à droite) de celui de x.

$$\text{Etant donné } x \in \varphi(S), \text{ posons } \curlyvee x \curlyvee = \inf_{\left\{ n,\ \substack{y\,L\,T^n x \\ z\,R\,T^n x} \right.} | y + T^n x + z | .$$

<u>Lemme</u> : L'application $x \longmapsto \curlyvee x \curlyvee$ est une norme E.S.A. et monotone, équivalente à $|\ .\ |$ sur $\varphi(S)$.

Le corollaire montre que $\curlyvee x \curlyvee = \inf_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} | \alpha e_1 + Tx + \beta e_k |$, en choisissant $e_k\,R(Tx)$, et par continuité, on voit que cet infimum est atteint pour un couple (α,β). D'autre part, $\curlyvee . \curlyvee$ est une semi-norme monotone, en ce sens que

$$\forall\, y,z \in \varphi(S) \qquad y\,L\,x \quad z\,R\,x \Rightarrow \curlyvee y+x+z \curlyvee \geq \curlyvee x \curlyvee,$$

et c'est évidemment une semi-norme E. S. A..
Soit $c = \curlyvee e_1 \curlyvee > 0$. Si $\curlyvee x \curlyvee = | \alpha e_1 + Tx + \beta e_k |$,
on a $\curlyvee x \curlyvee = \curlyvee \alpha e_1 + Tx + \beta e_k \curlyvee$, et donc $|\alpha|, |\beta| \leq \frac{1}{c} \curlyvee x \curlyvee$. On en déduit $\curlyvee x \curlyvee \geq | Tx | - |\alpha| - |\beta| \geq | x | - \frac{2}{c} \curlyvee x \curlyvee$, d'où

$$\frac{c}{3} | x | \leq \curlyvee x \curlyvee \leq | x | .$$

D'après un résultat connu sur les bases, (e_n) est une base conditionnelle de Banach, engendré par les e_n relativement à la norme $|\cdot|$, qui est justement G.
Supposons de plus que C_o ne soit pas contenu dans G. Soit (a_n) une suite réelle telle que

$$\sup_n \left| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right| = C < +\infty,$$

et montrons que $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ converge dans G.

<u>Lemme 4</u> : Sous les hypothèses qui viennent d'être faites sur a, la suite $(a_1+\ldots+a_n)$ converge.

Posons $S_n = a_1+\ldots+a_n$. La suite S_n est bornée car $|S_n| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right| \leq C$.
Soient $\alpha = \liminf_n (S_n)$ et $\beta = \alpha + \gamma = \limsup_n (S_n)$. Montrons que $\gamma = 0$.
Notons qu'il existe une suite croissante d'entiers (k_j), tels que

$$|S_{k_{2j-1}} - \alpha| \leq 2^{-j-1}, \quad |S_{k_{2j}} - \beta| \leq 2^{-j-2}.$$

Posons $S_{k_o} = 0$ et $t_j = S_{k_j} - S_{k_{j-1}}$ pour $j=1,2,\ldots$, de telle sorte que
$S_{k_j} = t_1 + t_2 + \ldots + t_j$, $|t_{2j-1} + \gamma| \leq 2^{-j}$, $|t_{2j} - \gamma| \leq 2^{-j}$.

En appliquant le corollaire, on a pour chaque j,

$$C \geq \left|\sum_{i=1}^{k_j} a_i e_i\right| \geq \left|\sum_{i=1}^{j} t_i e_i\right| \geq \gamma \left|\sum_{i=1}^{j} (-1)^i e_i\right| - \sum_{i=1}^{j} 2^{-i},$$

qui prouve que γ est bien nul.

Maintenant supposons que la suite $n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ ne soit pas de Cauchy. Alors il existe une suite croissante d'entiers n_j, et un nombre $D > 0$, tels que pour tout j,

$$\left| \sum_{i=n_{j-1}}^{n_j-1} a_i e_i \right| \geq D.$$

Appliquant le lemme 4, on peut aussi exiger que

$$\left| \sum_{i=n_{j-1}}^{n_j-1} a_i \right| \leq 2^{-j} .$$

Posons $u_j = \sum_{i=n_{j-1}}^{n_j-1} a_i e_i$; alors pour chaque j, on a

$$D \leq \| u_j \| \leq 2C,$$

et aussi, par le corollaire

$$C \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\| \geq \| u_1 + \dots + u_{j-1} + u_{j+1} + \dots + u_n \| - 2^{-j}.$$

cela donne, pour des entiers positifs $k_1 < k_2 < \dots < k_r$,

$$\| u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_r} \| \leq C + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n} \leq C + 1,$$

et ceci implique que pour tout choix de signes $\varepsilon_i = \pm 1$, on ait

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\| \leq 2C + 2 .$$

Il en résulte que C_o est dans G, ce qui est incompatible avec l'hypothèse, donc la suite $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ est bien convergente.

■