SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. BEAUZAMY

Espaces de Banach uniformément convexifiables

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 14, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A16_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

ESPACES DE BANACH UNIFORMEMENT CONVEXIFIABLES

par B. BEAUZAMY

Exposé N° XIV   20 Février 1974

Nous allons maintenant donner une traduction topologique des propriétés géométriques introduites au cours du précédent exposé. Il nous faut d'abord donner quelques définitions

Définition 1 : Soient Y et E deux espaces de Banach. On dira que Y est finiment représentable dans E si, pour tout sous espace de dimension finie X de Y, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous espace F de E (de dimension finie) dont la distance à X est inférieure à $1+\varepsilon$. On notera alors Y f.r. E.

Définition 2 : Un espace de Banach E est dit super-réflexif si les seuls espaces de Banach qui y soient finiment représentables sont réflexifs.

Donnons quelques conséquences simples de ces définitions :

- Un espace super-réflexif est réflexif.
- La propriété Y f.r. E est transitive: si Y f.r. E_1 et E_1 f.r. E_2, alors Y f.r. E_2. Il en résulte que les seuls espaces qui soient finiment représentables dans un espace réflexif sont eux-mêmes super-réflexifs.
- Certains espaces sont réflexifs sans être super-réflexifs. Nous en donnerons un exemple par la suite.

Le résultat annoncé est le suivant :

Théorème 2 : (James [5]) - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit super-réflexif est qu'il ne possède pas la propriété d'arbre fini.

Avant d'aborder la démonstration du théorème, nous donnons une nouvelle définition ; elle va permettre d'interpréter la propriété d'arbre fini.

Définition 3 : Posons $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4,5,6\}$. A_{n-1} étant défini, A_n comprend 2^n entiers consécutifs et vient après A_{n-1}.

On dira qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points d'un espace de Banach forme un ε-arbre infini si, pour tout n, les points $(x_k)_{k \in A_n}$ forment une (n,ε) branche dont les milieux sont les points $(x_n)_{n \in A_{n-1}}$.

On dira enfin qu'un espace de Banach possède la propriété d'arbre infini si, pour un certain $\varepsilon > 0$, il existe un ε-arbre infini dans sa boule unité.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème.

a) Condition nécessaire

Lemme 1 : Si un espace de Banach E a la propriété d'arbre fini, il existe un espace de Banach Y, finiment représentable dans E, qui possède la propriété d'arbre infini.

Démonstration : Par hypothèse, pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut trouver des points $x_1^n, \ldots, x_{2^n}^n$ formant une (n,ε) branche dans la boule unité de E.

Soit $\xi_1 \ldots \xi_n \ldots$ une suite de symboles (on peut par exemple les regarder comme la base canonique de l^1).
Considérons l'ensemble Y_o des combinaisons linéaires finies, à coefficients rationnels, des symboles ξ_i. L'ensemble de ces combinaisons est dénombrable ; on les range en une suite. Soit $a_1\xi_1 + \ldots + a_k\xi_k$ la première de ces combinaisons. Les quantités $\|a_1x_1^{(n)} + \ldots + a_kx_k^{(n)}\|$ sont inférieures à $\Sigma\, |a_i|$, et donc il existe une sous suite des entiers pour laquelle $\lim \|a_1x_1^{(n)}+\ldots+a_kx_k^{(n)}\|$ existe lorsque n tend vers l'infini sur la sous suite. On regarde ensuite la seconde combinaison linéaire, on extrait une sous-suite de la première, et ainsi de suite. On prend enfin la diagonale : on a donc obtenu une sous-suite des entiers (k_n) pour laquelle $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Sigma\, a_i\, x_i^{(k_n)}\|$ existe pour toute combinaison linéaire finie à coefficients rationnels, et on pose

$$\|\Sigma\, a_i\, \xi_i\| = \lim_{n\to\infty} \|\Sigma\, a_i\, x_i^{k_n}\| .$$

Cette définition est positivement homogène, sous additive.
Mais il n'y a pas de raison en général pour que $\|\Sigma\, a_i\, \xi_i\| = 0$ implique $a_i = 0 \ \forall\, i$. [par exemple, dans l^1, on peut considérer pour tout n, la $(n,1)$ branche dans la boule unité formée des points

$$x_1^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \end{vmatrix}, \quad x_2^{(n)} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \end{vmatrix}, \quad x_3^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \end{vmatrix}, \quad x_4^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \vdots \end{vmatrix}, \ldots, \quad x_{2^n}^{(n)} \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \end{vmatrix}$$

et on a $x_1^{(n)} + x_2^{(n)} = 0$, donc, si on a utilisé l'arbre ainsi défini, $\|\xi_1 + \xi_2\| = 0$]. Il est donc nécessaire de passer au quotient : soit N l'ensemble des combinaisons linéaires finies (a_i), rationnelles, pour lesquelles $\lim\limits_{n\to\infty} \Sigma\, a_i\, x_i^{(k_n)} = 0$ et soit Y_o/N l'espace quotient. Y_o/N est normé.

On pose $Y = Y_o/N$.

Soit X un sousespace de dimension finie de Y ; on relève X, algébriquement, en un sous espace de dimension finie de Y_o, engendré par k vecteurs $\xi_1 \dots \xi_k$. Puisqu'il s'agit du quotient par le noyau d'une semi-norme, on a, pour toute suite $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ de coefficients,

$$\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{\xi_i} \|_Y = \| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \xi_i \|_{Y_o} .$$

Pour η fixé, par définition, il existe un entier N tel que n > N implique

$$(1 - \eta) \| \sum_1^k \alpha_i x_i^{(k_n)} \| \leq \| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \xi_i \| \leq (1 + \eta) \| \sum_1^k \alpha_i x_i^{(k_n)} \| .$$

A priori, l'entier N dépend des coeeficients α_i, rationnels, que l'on a choisis. Mais il ne change pas si on les mulitplie tous par un même nombre. Donc il ne change pas si l'on remplace les (α_i) par une autre suite (a_i) de rationnels, de même longueur, car il existe toujours une combinaison $(\lambda \alpha_i)$ après la combinaison (a_i) dans l'ordre que nous avons choisi sur les suites finies de rationnels.

On a donc trouvé des points $x_i^{(k_n)}$, $i = 1,\dots,k$, tels que pour toute suite (a_i) de rationnels :

$$(1 + \eta) \| \sum_1^k a_i x_i^{(k_n)} \| \leq \| \sum_1^k \alpha_i \xi_i \| \leq (1 + \eta) \| \sum_1^k a_i x_i^{(k_n)} \| .$$

On étend ensuite la définitionaux combinaisons linéaires réelles ; les inégalités ci-dessus demeurent. Ceci prouve que Y est finiment représentable dans E.

Il est ensuite facile de montrer que Y possède la propriété d'arbre infini : la propriété d'arbre infini s'exprime au moyen de combinaisons linéaires finies des ymboles $\overline{\xi_i}$; on a, désignant par ξ_i un représentant quelconque

de $\overline{\xi_i}$,
$$\| \Sigma\, a_i\, \overline{\xi_i} \| = \| \Sigma\, a_i\, \xi_i \| = \lim_{n \to \infty} \| \Sigma\, a_i\, x_i^{(k_n)} \| ,$$

et
$$\| \Sigma\, a_i\, \overline{\xi_i} \| \geq (1 - \eta)\, \| \Sigma\, a_i\, x_i^{(k_n)} \|$$

pour n assez grand et, par conséquent, les propriétés définissant une branche, que possèdent les points $x_i^{(k_n)}$, se traduisent par des propriétés analogues sur les $\overline{\xi_i}$, avec ε remplacé par $(1 - \eta)\, \varepsilon$.

<u>Lemme 2</u> : Si un espace de Banach Y possède la propriété d'arbre infini, il ne peut être réflexif.

<u>Démonstration</u> : Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de points de Y qui forme un ε-arbre infini dans la boule unité. Soit K l'enveloppe convexe fermée des points $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Bien entendu, K est séparable, et si Y est réflexif, K est faiblement compact. D'après un lemme d'Asplund et Namioka (voir [6]), il existe un sous-ensemble fermé convexe C de K, distinct de K, inclus dans K, tel que le diamètre de $K - C$ soit inférieur à $\varepsilon/2$. Puisque C est fermé et convexe, il ne peut contenir tous les points de l'arbre, sinon il contiendrait K qui est leur enveloppe convexe fermée. Soit i_o l'indice tel que $\xi_{i_o} \notin C$.
Soient ξ'_{i_o}, ξ''_{i_o} les points de l'arbre dont ξ_{i_o} est le milieu : on a
$$\| \xi'_{i_o} - \xi_{i_o} \| \geq \varepsilon \quad , \quad \xi_{i_o} = \frac{\xi'_{i_o} + \xi''_{i_o}}{2} \quad .$$

Donc
$$\| \xi'_{i_o} - \xi_{i_o} \| \geq \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad \| \xi''_{i_o} - \xi_{i_o} \| \geq \varepsilon/2.$$

Donc les points ξ'_{i_o} et ξ''_{i_o} ne peuvent pas appartenir à $K - C$, puisque le diamètre de celui-ci est inférieur à $\varepsilon/2$. Donc ξ'_{i_o} et ξ''_{i_o} doivent appartenir tous deux à C. Mais alors ξ'_{i_o} , milieu de ξ'_{i_o} et ξ''_{i_o} doit aussi appartenir à C, puisque celui-ci est convexe. On aboutit donc à une contradiction qui achève la démonstration du lemme.

On a donc prouvé que si E possédait la propriété d'arbre fini, on pouvait trouver un espace de Banach Y, finiment représentable dans E, qui n'était pas réflexif. Ceci établit donc la première partie du théorème.

b) Condition suffisante.

Supposons maintenant que E ne soit pas super-réflexif. Alors, par définition, il existe un espace de Banach Y, finiment représentable dans E, qui n'est pas réflexif. Nous allons donner des caractérisations équivalentes à cette dernière propriété.

Proposition 2 : Soit Y un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) E n'est pas réflexif.

2) On peut trouver un nombre $\sigma \in]0,1[$ et une suite bornée $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Y tels que pour tout n on ait

$$\mathrm{dist}\ (\mathrm{conv}\ (z_1,\dots,z_n),\ \mathrm{conv}\ (z_{n+1},\dots)) > \sigma .$$

2') Pour n'importe quel $\sigma \in]0,1[$, il existe une suite vérifiant la condition ci-dessus.

3) Pour tout $\theta < 1$, on peut trouver une famille de points (z_n), de norme inférieure ou égale à 1, et une famille de formes linéaires continues (g_n), de norme inférieure ou égale à 1, telles que :

$$\begin{aligned} g_n(z_k) &= \theta \quad \text{si } n \leq k \\ &= 0 \quad \text{si } n > k . \end{aligned}$$

Démonstration : 2) ⇒ 1). Supposons qu'il existe une suite bornée (z_n) et un nombre σ tels que $\mathrm{dist}\ (\mathrm{conv}(z_1,\dots,z_n),\mathrm{conv}(z_{n+1},\dots)) > \sigma$ pour tout n. Alors, pour tout $x \in E$, on peut trouver un indice p pour lequel

$$\mathrm{dist}\ (x,\mathrm{conv}(z_{p+1},\dots)) > 0 .$$

En effet, sinon $x \in \overline{\mathrm{conv}}(z_{n+1},\dots)\ \ \forall n$.

Soit n_o ; il existe x_o, $x_o \in \mathrm{conv}(z_{n_o+1},\dots)$, et $\|x - x_o\| < \frac{\sigma}{2}$, x_o s'écrit

$x_o = \sum_{n_o+1}^{K} \alpha_i z_i$. Il existe x_1, $x_1 \in \operatorname{conv}(z_{K+1},\dots)$ et $\| x - x_1 \| < \frac{\sigma}{2}$.

Mais alors $\| x_o - x_1 \| \leq \sigma$, et dist $(\operatorname{conv}(z_{n_o+1},\dots,z_k),\operatorname{conv}(z_{K+1},\dots)) \leq \sigma$, ce qui contredit l'hypothèse 2).

Soit donc p l'indice pour lequel $\operatorname{dist}(x,\operatorname{conv}(z_{p+1},\dots)) > 0$. D'après Hahn -Banach, il existe une forme linéaire continue f telle que

$$\sup \{f(z_n), n > p\} < f(x) .$$

Nous allons utiliser un lemme.

<u>Lemme 3</u> : Pour toute suite bornée (z_n) d'un espace de Banach E, il existe $F \in E''$ telle que, $\forall f \in E'$, on ait

$$\liminf f(z_n) \leq F(f) \leq \limsup f(z_n).$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit l^∞ l'ensemble des suites bornées, et soit μ une forme linéaire continue de norme 1 sur l^∞, telle que

$$\liminf t_n \leq \mu(t) \leq \limsup t_n$$

pour toute suite $t = (t_n)$ de l^∞. (Il suffit de définir $\mu(t)$ comme la limite de t_n selon un ultra filtre).

Et, on pose $F(f) = \mu[f(z_n)]$, pour $f \in E'$.
Revenons à la démonstration de la proposition ; d'après le lemme, on peut trouver $F \in E''$ telle que $\forall f \in E'$

$$\liminf f(z_n) \leq F(f) \leq \limsup f(z_n).$$

Si E était réflexif, il existerait un point x de E tel que $F(f) = f(x)$, et on aurait

$$\liminf f(z_n) \leq f(n) \leq \limsup f(z_n),$$

mais ceci contredit le fait que $\sup \{f(z_n), n > p\} < f(x)$.

3) $\Rightarrow$ 2'). Supposons que, pour tout $\theta < 1$, on puisse trouver une suite (g_n) de formes linéaires continues, de norme 1, et une suite (z_n) de points de E, de norme 1, telles que :

$$g_n(z_k) = \theta \qquad n \leq k$$
$$\text{et } g_n(z_k) = 0 \qquad n > k\,.$$

Fixons $\theta < 1$. On a, si $\Sigma\, \beta_i = 1$

$$| \, g_{n+1} \, (\sum_1^n \alpha_i \, z_i - \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \, z_i)| = \theta$$

et donc

$$\| \sum_1^n \alpha_i \, z_i - \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \, z_i \| \geq \theta$$

et ceci prouve 2').

1) $\Rightarrow$ 3). On suppose maintenant que E n'est pas réflexif ; notons $\tilde{x}$ l'image de x dans l'injection canonique $j : E \to E''$. Soit $\theta \in]0,1[$. On peut trouver $F \in E''$, avec $\| F \| < 1$, et dist $(F, j(E)) > \theta$. On va montrer par récurrence que l'on peut choisir une suite $(z_n, g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in E$, $g_n \in E'$, possédant les propriétés suivantes :

- $\| z_n \| \leq 1$, $\| g_n \| \leq 1$
- $F(g_n) = \theta \qquad \forall\, n$
- $g_n(z_k) = 0$ si $n > k$,
  $= \theta$ si $n \leq k$.

Pour cela, on va utiliser le lemme suivant, appelé condition de Kelly (voir par exemple [1]).

<u>Lemme 4</u> : Soient E un espace normé, $f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires continues sur E, $c_1, \ldots, c_n$ et $\varepsilon > 0$ des nombres donnés. Il existe un point x de E avec $\| x \| < M + \varepsilon$ et $f_k(x) = c_k$, $k = 1, \ldots, n$, si et seulement si, pour toute suite $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ de nombres réels :

$$| \sum_{i=1}^n a_i \, c_i | < M \, \| \sum_{i=1}^n a_i \, f_i \| \,.$$

Revenons à la démonstration de 1) ⇒ 3). Remarquons d'abord que puisque dist $(F,j(E)) > \theta$, on a $\|F\| > \theta$. On peut donc trouver $g_1 \in E'$, $\|g_1\| \leq 1$, et $F(g_1) = \theta$. On a donc $\|g_1\| > |F(g_1)| = \theta$; soit $\|g_1\| > \theta$. On choisit ensuite z_1 pour que $g_1(z_1) = \theta$, $\|z_1\| \leq 1$. Supposons que z_k et g_k aient été choisis selon les conditions indiquées jusqu'à $k = p-1$. Choisissons g_p, avec $\|g_p\| \leq 1$, $F(g_p) = \theta$, et $\tilde{z}_k(g_p) = g_p(z_k) = 0$ pour $k < p$.

Ceci est possible, car la condition de Helly suivante est satisfaite :

$$\theta \leq \frac{\theta}{\operatorname{dist}(F,j(E))} \left\| \sum_1^{p-1} a_i \tilde{z}_i + F \right\| \qquad \forall (a_i)_{i=1,\dots,p-1} .$$

Il faut maintenant choisir z_p pour que $\|z_p\| \leq 1$ et $g_n(z_p) = \theta$ si $n \leq p$. On a :

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_i\, \theta\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} a_i\, F(g_i)\right| = \left|F\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\, g_i\right)\right| \leq \|F\| \left\|\sum_{i=1}^{p} a_i\, g_i\right\|$$

et donc

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_i\, \theta\right| < \left\|\sum a_i\, g_i\right\|$$

et cette condition de Helly permet d'affirmer que le choix de z_p est possible. Ceci achève la démonstration de la proposition. Celle de la seconde partie du théorème s'en déduit aussitôt : si E n'est pas super-réflexif, on peut trouver un espace Y, finiment représentable dans E, qui n'est pas réflexif. La proposition permet de trouver dans la boule unité de Y une suite de points $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bornée, et vérifiant pour tout n :

$$\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(z_1,\dots z_n),\operatorname{conv}(z_{n+1},\dots)) > \sigma .$$

Considérons l'espace engendré par les N premiers points : il est de dimension finie, et il existe donc un sous espace de E, de même dimension, qui lui est isomorphe à ε près. Ce sous espace est engendré par des points $x_1,\dots,x_N$, dont la norme est au plus $(1+\varepsilon)$ fois celle de z_n, et qui vérifient

$$\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_n),\operatorname{conv}(x_{n+1},\dots x_N)) > (1-\varepsilon)\sigma .$$

Il n'est pas difficile de voir que si N est une puissance de 2 $(N = 2^m)$ les points $x_1,\dots x_{2^m}$ forment une $(m,(1-\varepsilon)\sigma)$ branche, que l'on ramène dans la boule unité par une homothétie.

Corollaire 1 : Si E possède la propriété d'arbre fini pour un $\varepsilon > 0$, il la possède pour n'importe quel $\varepsilon \in]0,1[$.

Démonstration : Si E possède la propriété d'arbre fini pour un $\varepsilon > 0$, il n'est pas super-réflexif, et, pour n'importe quel $\sigma \in]0,1[$, on peut trouver des points vérifiant la condition de la proposition.

Corollaire 2 : Si E est uniformément convexifiable et si Y est finiment représentable dans E, Y est uniformément convexifiable.

Remarque : Il résulte de [5] que dans l'assertion 2') de la proposition 2) on peut remplacer $\forall \sigma \in]0,1[$ par $\forall \sigma \in]0,2[$.

Nous allons donner une autre caractérisation des espaces qui ne possèdent pas la propriété d'arbre fini.

Définition : On dira qu'un espace de Banach est carré si, pour tout nombre η dans $]0,1[$, il existe deux points x et y de la boule unité de E vérifiant

$$\begin{cases} \|x+y\| \geq 2(1-\eta) \\ \|x-y\| \geq 2(1-\eta) \end{cases}$$

On dira que E est arrondi si E n'est pas carré, et que E est arrondissable s'il existe une norme équivalente pour laquelle E est arrondi.

Théorème 3 (James [4]) : Une condition nécessaire et suffisante pour que E soit arrondissable est qu'il ne possède pas la propriété d'arbre fini.

a) Condition suffisante : Nous allons montrer que si E est uniformément convexe, il est arrondi. Supposons donc que $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1-\delta$ impliquent $\left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq \varepsilon$. Soit $\Delta = \inf(\delta, 1-\varepsilon)$. On a $1-\Delta > \varepsilon$, et $\|x\| = \|y\| = 1$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\Delta$ impliquent $\left\|\frac{x-y}{2}\right\| < 1-\Delta$. Donc E est arrondi.

b) <u>Condition nécessaire</u> : Nous allons montrer que si E possède la propriété d'arbre fini, il n'est pas arrondissable, c'est-à-dire que pour n'importe quelle norme équivalente, il est carré. La propriété d'arbre étant stable par isomorphisme, il suffit de le montrer pour l'une quelconque des normes.

Supposons donc que E ne soit pas super-réflexif. Il existe donc un espace Y, non réflexif, finiment représentable dans E. Si nous montrons que Y est carré, nous aurons trouvé deux points de la boule unité de Y vérifiant

$$\|x+y\| \geq 2(1-\eta)$$

$$\|x-y\| \geq 2(1-\eta)$$

et, puisque Y est finiment représentable dans E, nous aurons deux points de E vérifiant les mêmes conditions, et E sera carré.

Il nous reste donc à montrer :

<u>Proposition 3</u> : Un espace de Banach non réflexif est carré.

<u>Démonstration</u> : Pour toute suite (f_j) de formes linéaires continues de norme 1 sur E et toute suite croissante d'entiers $(p_1,\dots,p_{2n})$, on définit $S(p_1\dots p_{2n}, f(j))$ comme l'ensemble des points de E pour lesquels

$$\frac{3}{4} \leq (-1)^{i-1} f_k(x) \leq 1$$

$$\text{pour} \quad p_{2i-1} \leq k \leq p_{2i}$$

$$1 \leq i \leq n$$

et on pose

$$K(n,(f_j)) = \liminf_{p_1\to\infty} (\dots(\liminf_{p_{2n}\to\infty} \inf\{\|z\|, z\in S(p_1\dots p_{2n}, (fj))\}))$$

et

$$K_n = \inf\{K(n,(f_j)), \|f_j\| = 1 \quad \forall j\}$$

Montrons d'abord que K_n est fini. Soit $p_1,\dots,p_{2n}$ une suite croissante d'entiers.
On sait, d'après la proposition 2, que, pour $\theta < 1$ fixé, on peut trouver une suite z_n, $\|z_n\| \leq 1$, et une suite f_n, $\|f_n\| \leq 1$, avec

$$f_n(z_j) > \theta \qquad n \leq j$$

$$f_n(z_j) = 0 \qquad n > j .$$

Posons $w = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (z_{p_{2j}} - z_{p_{2j-1}-1})$.

On a :

$$f_k(w) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} [-f_k(z_{p_{2j-1}-1}) + f_k(z_{p_{2j}})]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} A_{kj}$$

avec $A_{kj} = 0$ si $k > p_{2j}$

$= f_k(z_{p_{2j}})$ si $p_{2j-1} \leq k \leq p_{2j}$

et $|A_{kj}| < 1-\theta \qquad k < p_{2j-1}$.

Par conséquent, si $p_{2i-1} \leq k \leq p_{2i}$, on a

$$(-1)^{i-1} \quad f_k(w) = f_k(z_{p_{2i}}) + E_k , \quad \text{avec } |E_k| < n(1-\theta).$$

Pour que w appartienne à $S(p_1,\dots,p_{2n},(f_j))$, il suffit donc que l'on ait

$$f_k(z_{p_{2i}}) > 7/8 \quad \text{et} \quad n(1-\theta) < 1/8 .$$

On prend $\theta = \sup (7/8, 1-\frac{1}{8^n})$. On a $\|w\| \leq 2n$, et donc $K(n,(f_i)) \leq 2n$, et $K_n \leq 2n$.

Soit maintenant $\delta > 0$. On sait que K_n est monotone croissant ; par conséquent, pour tout r entre $1-\delta$ et 1, on peut trouver ε et N tels que

$$\frac{K_n - \varepsilon}{K_n + 2\varepsilon} > r > 1 - \delta, \text{ lorsque } n > N .$$

On en déduit qu'il existe $m > N$ tel que

$$\frac{K_{m-1} - \varepsilon}{K_m + 2\varepsilon} > 1 - \delta$$

(K_m ne peut pas tendre trop vite vers l'infini, car $K_m \leq 2m$).

D'après la définition de K_m, on peut trouver une suite de formes linéaires continues, de norme 1, telles que

$$K_m + \varepsilon \quad > \quad K(m, f_i).$$

On va maintenant choisir des entiers $p_1, \ldots, p_{2m}$, $q_1, \ldots, q_{2m}$, de telle façon que l'ordre $p_1, q_1, p_2, p_3, q_2, q_3, p_4, p_5, \ldots, q_{2m-2}, q_{2m-1}, p_{2m}, q_{2m}$ soit un ordre croissant, et on les choisit suffisamment grands pour que $S(p_1, \ldots, p_{2m}, (f_i)), S(q_1, \ldots, q_{2m}, (f_i))$ aient des éléments u et v respectivement, avec

$$\|u\| \leq K(m, (f_i)) + \varepsilon$$

$$\|v\| \leq K(m, (f_i)) + \varepsilon$$

et, pour n'importe quel z dans $S(q_1, p_2, q_3, p_4, q_5, p_6, \ldots, (f_i))$,

$$K(m, (f_i)) - \varepsilon < \|z\|$$

et, pour n'importe quel z dans $S(p_3, q_2, p_5, q_4, \ldots)$,

$$K(m-1, (f_i)) - \varepsilon < \|z\| .$$

L'intérêt de ces choix réside dans le fait que, u et v étant déterminés comme on l'a dit,

$$\frac{1}{2}(u+v) \in S(q_1, p_2, q_3, \ldots, p_{2m})$$

et donc

$$\left\| \frac{1}{2} (u+v) \right\| > K(m, (f_i)) - \varepsilon$$

et

$$\frac{1}{2}\,(v-u) \in S(p_3, q_2, p_5, q_4, \dots)$$

et donc :

$$\left\| \frac{1}{2}\,(u-v) \right\| \geq K(m-1, (f_i)) - \varepsilon \ .$$

On pose $x = \dfrac{u}{K_m + 2\varepsilon}$, $y = \dfrac{u}{K_m + 2\varepsilon}$ et on vérifie aisément que x et y ont les propriétés cherchées.

Ceci achève la démonstration du théorème.

Donnons un exemple d'espace de Banach qui est réflexif sans être super-réflexif. Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\Sigma\,|\alpha_i|$, noté l^1_n, et soit $X = \prod_{n=1}^{\infty} l^1_n$, muni de la norme $\|x\|_X = \Sigma_n\, \|x_n\|^2_{l^1_n})^{1/2}$.

On note $X = l^2(l^1_n)$. X est réflexif parce qu'on a mis la norme l^2 sur le produit, mais n'est pas super-réflexif, car les points de la base canonique de $l^1_{2^n}$ forment une (n,2) branche pour chaque n, dans la boule unité de X.

D'après le théorème 3, lorsqu'un espace possède la propriété d'arbre fini, pour chaque nombre $y \in \,]0,1[$, on peut trouver deux points de la boule unité, x et y, avec

$$\|x+y\| \geq 2(1-\eta)$$

$$\|x-y\| \geq 2(1-\eta)$$

On peut considérer plus généralement la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$:

($\mathcal{P}$) : pour tout $\eta \in \,]0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe n points $x_1, \dots, x_n$ de la boule unité avec

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, x_i \right\| \geq n(1-\eta)$$

pour n'importe quel choix de $\varepsilon_i = \pm 1$.

et se demander si un espace possédant la propriété d'arbre fini possède aussi $\mathcal{P}$. Un contre-exemple à cette conjecture ancienne a été donné par R.C. James. Mais il résulte de [5] qu'un espace possédant la propriété d'arbre fini possède la propriété suivante :

($\mathcal{P}'$) : pour tout $\eta \in]0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe n points $x_1,\dots,x_n$ de la boule unité avec

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i \| \geq n(1-\eta)$$

pour tout choix des $\varepsilon_i = \pm 1$ où les signes + précèdent les signes -.

On peut donc se demander si une propriété plus forte que la propriété d'arbre fini implique la propriété $\mathcal{P}$. Nous allons indiquer une telle propriété.

Remarquons d'abord que ($\mathcal{P}$) signifie que l'espace E contient l^1_n uniformément (voir [7] pour les définitions), ainsi que l'a démontré D.P. Giesy [2]. Une caractérisation équivalente à ($\mathcal{P}$) a été donnée dans [7] : c'est que l'espace E ne soit de type p-Rademacher pour aucun $p > 1$.

<u>Définition</u> : Soit E un espace de Banach. On dira qu'un couple de points (x_1,x_2) forme une $(1,\varepsilon)$ branche symétrique si

$$\| x_1 - x_2 \| \geq \varepsilon$$

$$\text{et} \qquad \| x_1 + x_2 \| \geq \varepsilon .$$

Supposons définie une $(n-1,\varepsilon)$ branche symétrique ; on dira que le 2^n-uple $(x_1,\dots,x_{2^n})$ forme une (n,ε) branche symétrique si, pour tout choix de $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1,\dots,2^{n-1}$, on a :

$$\| x_{2i-1} + \varepsilon_i \, x_{2i} \| \geq \varepsilon \qquad i = 1,\dots,2^{n-1}$$

et si le 2^{n-1}-uple $\left(\frac{x_{2i-1} + \varepsilon_i \, x_{2i}}{2}\right)_{i=1,\dots,2^{n-1}}$ forme une $(n-1,\varepsilon)$ branche symétrique.

On dira qu'un espace de Banach possède la propriété d'arbre symétrique fini s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n, on puisse trouver une (n,ε) branche symétrique dans la boule unité.

<u>Proposition 4</u> : Un espace de Banach E contient l^1_n uniformément si et seulement si E possède la propriété d'arbre symétrique.

<u>Démonstration</u> : a) <u>Condition nécessaire</u> : Si E contient l^1_n uniformément, E possède la propriété d'arbre symétrique, car la base canonique de $l^1_{2^n}$ constitue pour chaque n une (n,ε) branche symétrique.

b) <u>Condition suffisante</u> : Supposons maintenant que E possède la propriété d'arbre symétrique. Il nous suffit de démontrer que E ne peut être de type p-Rademacher pour $p > 1$. Nous allons démontrer un lemme.

<u>Lemme</u> : Pour toute (n,ε) branche symétrique $(x_1,\dots,x_{2^n})$ dans un espace de Banach, on a, en désignant par $(r_i(t))$ les fonctions de Rademacher :

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{2^n} r_i(t)\, x_i \right\| dt \;\geq\; 2^{n-1}\varepsilon .$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Elle se fait par récurrence. Pour $n = 1$, l'hypothèse faite sur une (n,ε) branche symétrique implique

$$\int_0^1 \| r_1(t)\, x_1 + r_2(t)\, x_2 \| \, dt = \frac{1}{2} \left(\|x_1 + x_2\| + \|x_1 - x_2\| \right) \geq \varepsilon .$$

Supposons le résultat vrai pour $n-1$, démontrons le pour n.

On pose

$$r_{ik} = r_i(t) \qquad \text{lorsque} \quad t \in \left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[.$$

On a :

$$\int_0^1 \left\| \sum_0^{2^n} r_i(t)\, x_i \right\| dt = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{k=1}^{2^{2^n}} \left\| \sum_{i=1}^{2^n} r_{ik}\, x_i \right\| .$$

On pose $I = \sum_{k=1}^{2^{2^n}} \| \sum_{i=1}^{2^n} r_{ik}\, x_i \|$. On décompose I en :

$$I = \sum_{\varepsilon_{2i}=\pm 1} \sum_{\varepsilon'_i=\pm 1} \| \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \varepsilon'_i \, (x_{2i-1} + \varepsilon_{2i}\, x_{2i}) \|$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a, en fixant les (ε_{2i}) :

$$\sum_{\varepsilon'_i=\pm 1} \| \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \varepsilon'_i \, (x_{2i-1} + \varepsilon_{2i}\, x_{2i}) \| \geq 2^{n-1} . 2^{2^{n-1}} \varepsilon$$

et donc

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{2^n} r_i(t)\, x_i \| \, dt = \frac{1}{2^{2^n}} I \geq 2^{n-1} \varepsilon \ .$$

Achevons la démonstration de la proposition : supposons que E possède d'arbre symétrique et qu'il soit de type p Rademacher pour un $p > 1$. Soit n fixé. Ecrivant la propriété de type p avec les points $(x_1, \ldots, x_{2^n})$, on obtient :

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{2^n} r_i(t)\, x_i \| \, dt \leq C \, (\sum_{i=1}^{2^n} \|x_i\|^p)^{1/p}$$

et, puisque $\|x_i\| \leq 1$, $i = 1, \ldots, 2^n$, on a d'après le lemme :

$$\varepsilon . \, 2^{n-1} \leq C \; 2^{n/p} ,$$

ce qui est impossible pour n' assez grand ; cette contradiction achève la démonstration.

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.M. DAY : Normed linear spaces - Academic Press - N.Y. 1962.

[2] D.P. GIESY : On a convexity condition in normed linear spaces. Trans. A.M.S., vol. 125 - 1 - 1966.

[3] R.C. JAMES : Weak compactness and reflexivity. Israël J. of Maths. 2- (1964) - 101-119.

[4] R.C. JAMES : Uniformly non square Banach spaces. Ann. of Maths. 80-(1964) - 542-550.

[5] R.C. JAMES : Some self-dual properties of normed linear spaces. Ann. Math. Studies. n° 69 - 159-175.

[6] I. NAMIOKA et E. ASPLUND : A geometric pool of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem. Bull A.M.S.,73-(1967) 443-445.

[7] G. PISIER : Exposé n° VII.

****