B. Maurey

Une nouvelle caractérisation des applications (p,q)-sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 12, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A14_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES APPLICATIONS (p,q)-SOMMANTES

par B. MAUREY

Exposé N° XII

30 Janvier 1974

Dans cet exposé, nous allons étudier systématiquement la "propriété de remontée de L^p à Λ_q", qui est définie de la façon suivante :

Soient $0 \leq p < q < \infty$, v un opérateur linéaire continu entre E et F espaces de Banach. Nous dirons que v vérifie la propriété de remontée de L^p à Λ_q si pour tout opérateur linéaire continu u de F dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, l'opérateur $u \circ v$ est "presque borné" de E dans $\Lambda_q(\Omega,\mu)$ (cf. exposé IV).

En fait, nous modifierons un peu cette définition, en y incluant quelques hypothèses techniques.

Soit E un espace de Banach, et soit $p \in]0,+\infty[$. Comme dans l'exposé X, § 2, nous dirons qu'un opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, est p-approximable si la probabilité cylindrique λ sur E définie par u est limite cylindrique d'un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur E, tel que l'on ait pour tout j :

$$\|\lambda_j\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^* = \|u\| .$$

Nous dirons qu'un opérateur u de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, est 0-approximable si pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur E, convergeant cylindriquement vers λ, et tel que pour tout j :

$$J_\alpha^*(\lambda_j) \leq J_\alpha^*(\lambda) .$$

(λ étant la probabilité cylindrique représentée par u).

Soient maintenant E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F, et v^* son transposé de F' dans E'. Nous poserons les définitions suivantes :

Soient p,q tels que $0 < p \leq q < \infty$, et soit $\alpha \in]0,1[$. Nous dirons que v^* vérifie $R_{p,q}$ (resp: $R_{p,q,\alpha}$) s'il existe une constante C telle que l'on ait pour tout opérateur linéaire continu u p-approximable de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité : pour toute suite finie $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ d'éléments de F' :

$$\left(\int \sup_i |u\, v^*(\xi_i)(\omega)|^p\, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C\, \|u\|\, \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}$$

$$\left[\text{ resp: } J_\alpha\left(\sup |u\, v^*(\xi_i)(\omega)|, d\mu(\omega)\right) \leq C\, \|u\|\, \left(\sum_i \|\xi_i\|^q\right)^{1/q}\right].$$

On notera $R_{p,q}(v^*)$ (resp. $R_{p,q,\alpha}(v^*)$) la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

On dira que v^* vérifie $R_{0,q}$ si pour tout opérateur linéaire continu u 0-approximable de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, μ étant une probabilité, l'opérateur $u \circ v^*$ est presque borné de E' dans $\Lambda_q(\Omega,\mu)$.

Remarque 1 : Si E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, ou bien dans le cas $p \geq 1$, tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mathcal{C},\mu)$ est p-approximable.
Dans le premier cas, on raisonne comme dans l'exposé X, début du § 2.
Supposons maintenant $p \geq 1$, et soit u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega,\mathcal{C},\mu)$, définissant une probabilité cylindrique λ dans E.
Pour chaque sous-tribu finie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$, on considère l'opérateur $\pi_{\mathcal{S}}$ d'espérance conditionnelle sur la sous-tribu $\mathcal{S}$.
L'opérateur $\pi_{\mathcal{S}} \circ u$ définit une probabilité $\lambda_{\mathcal{S}}$ à support fini sur E", telle que $\|\lambda_{\mathcal{S}}\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^*$, et le filtre $(\lambda_{\mathcal{S}})$ converge cylindriquement vers λ, lorsque "$\mathcal{S}$ tend vers $\mathcal{C}$". Pour finir on peut ramener les probabilités $\lambda_{\mathcal{S}}$ dans E, sans augmenter $\|\lambda_{\mathcal{S}}\|_p^*$, en utilisant le principe de reflexivité locale [2] : si E est un espace de Banach, W un voisinage de zéro de $\sigma(E'',E')$, $(x_1,\ldots,x_n)$ une suite finie de points de E", il existe un opérateur w de E" dans E , $\|w\| \leq 1$, tel que $w(x_i) - x_i \in W$ pour chaque i.

Remarque 2 : Soit v un opérateur linéaire continu de E dans F, tel que v^* vérifie $R_{p,q}$, $p > 0$, et soit u un opérateur linéaire continu de E' dans l^p. Considérons une suite (α_n) de réels > 0, telle que $\Sigma\, \alpha_n = 1$, posons $\mu = \Sigma\, \alpha_n\, \delta_n$, et considérons l'isométrie j entre l^p et $L^p(\mathbb{N},\mu)$ définie par :

$$j((c_n)) = (\alpha_n^{-1/p}\, c_n)_n \ .$$

L'opérateur $j \circ u$ est p-approximable (car $L^p(\mathbb{N},\mu)$ vérifie l'hypothèse d'approximation métrique : on adapte le raisonnement de la remarque 1,) donc :

$$\forall\ (\xi_1,\dots,\xi_n) \in F' :$$

$$\left(\int \sup_i |j\circ u\circ v^*(\xi_i)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq R_{p,q}(v^*)\ \|j\circ u\|\ (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left(\sum_n \sup_i |u\circ v^*(\xi_i)\ (n)|^p\right)^{1/p} \leq R_{p,q}(v^*)\ \|u\|\ (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q} \ .$$

Proposition 1 : Soient p,q, $0 < p < q < \infty$, E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F, et C une constante. Considérons les assertions :

a) Pour tout espace quasi normé G et pour tout opérateur linéaire w λ_q-sommant de F dans G :

$$\pi_p(w \circ v) \leq C\ \pi\ \lambda_q(w) \ .$$

b) Pour toute suite finie $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ d'éléments de F' :

$$\pi_p(v_\xi \circ v) \leq C\ (\Sigma\, \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

(où $v_\xi \in L(F,l_n^\infty)$ est défini par $v_\xi(y) = (<y,\xi_i>)$.)

c) $$R_{p,q}(v^*) \leq C .$$

d) $$\forall \alpha \in]0,1[, \quad R_{p,q,\alpha}(v^*) \leq C \alpha^{-1/p} .$$

e) $$\exists \alpha_o \in]0,1[, \quad R_{p,q,\alpha_o}(v^*) \leq C \alpha_o^{-1/p}$$

a') Pour tout espace quasi normé G, et pour tout opérateur linéaire w λ_q-sommant de F dans G :

$$\pi_p(w \circ v) \leq C \alpha_o^{-1/p} \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} \pi \lambda_q(w).$$

On a les implications : a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a').

<u>Démonstration</u> : a) $\Rightarrow$ b) est évident, compte tenu de $\pi \lambda_q(v_\xi) \leq (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q}$ (cf. exposé X). Montrons que b) $\Rightarrow$ c). Soient u un opérateur linéaire p-approximable de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, λ la probabilité cylindrique sur E représentée par u, et (λ_j) un filtre de probabilités à support fini sur E, convergeant cylindriquement vers λ et tel que :

$$\forall j, \quad \|\lambda_j\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^* = \|u\| .$$

D'après b), on aura pour chaque j :

$$\|v_\xi \circ v(\lambda_j)\|_p \leq \pi_p(v_\xi \circ v) \|\lambda_j\|_p^* \leq C \|u\| (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

Puisque l_n^∞ est de dimension finie, les $(v_\xi \circ v(\lambda_j))$ convergent étroitement vers $v_\xi \circ v(\lambda)$, et on obtient à la limite :

$$\|v_\xi \circ v(\lambda)\|_p \leq C \|u\| (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

Par ailleurs, $v_\xi \circ v(\lambda)$ coïncide avec l'image de μ par $\omega \to (u\, v^*(\xi_1)(\omega), \ldots, u\, v^*(\xi_n)(\omega))$, donc :

$$\left(\int \sup_i |u \circ v^*(\xi_i)(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} = \|v_\xi \circ v(\lambda)\|_p \leq C \|u\| (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q},$$

ce qui démontre b) $\Rightarrow$ c). L'implication c) $\Rightarrow$ d) résulte simplement de l'inégalité :

$$J_\alpha(f,\mu) \leq \alpha^{-1/p} \|f\|_{L^p(\mu)} ,$$

et d) $\Rightarrow$ e) est trivial.

Montrons pour finir que e) $\Rightarrow$ a'). Soient G un espace quasi normé et w un opérateur linéaire λ_q-sommant de F dans G. Soit, d'autre part, λ une probabilité à support fini sur E, et soit u un opérateur linéaire de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ qui représente λ. L'opérateur u est évidemment p-approximable.

Considérons $\nu = v(\lambda)$, probabilité à support fini, représentée par $u \circ v^*$. D'après e), la définition de $R_{p,q,\alpha_o}(v^*)$ et d'après le théorème de Nikishin (exposé IV), il existe une partie $\Omega' \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega - \Omega') \leq \alpha_o$, et que :

$$\forall\ \xi \in F', \qquad \Lambda_q(u\ v^*(\xi)\chi_{\Omega'},\mu) \leq C\ \alpha_o^{-1/p}\ \|u\|\ \|\xi\| .$$

L'opérateur u' de F' dans $L^p(\Omega',\chi_{\Omega'}\mu)$ obtenu par restriction de $u \circ v^*$ définit une mesure à support fini ν' sur F, telle que :

$$\Lambda_q^*(\nu') \leq C\ \alpha_o^{-1/p}\ \|u\|,$$

donc :

$$\Lambda_q(w(\nu')) \leq C\ \alpha_o^{-1/p}\ \|u\|\ \pi\lambda_q(w) = C\ \alpha_o^{-1/p}\ \|\lambda\|_p^*\ \pi\lambda_q(w) .$$

Finalement, on a pour tout $R \geq 0$:

$$\lambda\ \{x \in E\ ;\ \|w \circ v(x)\| > R\} \leq \alpha_o + \nu'\ \{y \in F\ ;\ \|w(y)\| > R\}$$

$$\leq \alpha_o + \left(\frac{1}{R}\ C\ \alpha_o^{-1/p}\ \pi\lambda_q(w)\ \|\lambda\|_p^*\right)^q .$$

En posant $R_o = \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} C\, \alpha_o^{-1/p}\, \pi\lambda_q(w)\, \|\lambda\|_p^*$, on obtient :

$$\lambda\,\{x \in E\,;\ \|w \circ v(x)\| > R_o\} \leq \alpha_o + \frac{1-\alpha_o}{2} = \frac{1+\alpha_o}{2},$$

soit encore :

$$J_{(1+\alpha_o)/2}(w \circ v(\lambda)) \leq C\,\alpha_o^{-1/p} \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} \pi\lambda_q(w)\, \|\lambda\|_p^*,$$

pour toute λ à support fini sur E, ce qui implique d'après le lemme de l'exposé X :

$$\pi_p(w \circ v) \leq C\,\alpha_o^{-1/p} \left(\frac{1-\alpha_o}{2}\right)^{-1/q} \pi\lambda_q(w),$$

et e) $\Rightarrow$ a') est démontré.

Proposition 2 : Soient E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F et $q \geq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur v^* vérifie $R_{p,q}$ pour un $p < 1$.

b) Pour tout p tel que $0 \leq p < 1$, v^* vérifie $R_{p,q}$.

Démonstration : Soit $p \in]0,1[$. Il suffit de montrer que $R_{p,q}$ implique $R_{0,q}$. Soient u un opérateur linéaire 0-approximable de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, et $\alpha \in]0,1[$.

D'après le théorème 2, exposé IV (plus exactement, d'après la démonstration de ce théorème), on sait que :

il existe $\beta \in]0,1[$ (par exemple $\beta = \alpha/8$) tel que pour tout opérateur linéaire continu u_1 de E' dans $L^0(\Omega,\mu)$, il existe $\Omega' \subset \Omega$, avec $\mu(\Omega - \Omega') \leq \alpha/2$, et :

$$\forall\, \xi \in E', \qquad \Lambda_1(u_1(\xi)\,\chi_{\Omega'},\mu) \leq J_\beta(u_1)\,\|\xi\|,$$

où l'on a posé : $J_\beta(u_1) = \sup\,\{J_\beta(u(\xi),\mu)\,;\ \|\xi\| \leq 1\}$.

Puisque u est 0-approximable, on peut trouver un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur E, convergeant cylindriquement vers λ, et tel que :

$$\forall\, j\,, \qquad J_\beta^*(\lambda_j) \;\le\; J_\beta^*(\lambda)\;.$$

Soit u_j un opérateur de E' dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$ représentant λ_j. On peut trouver $\Omega' \subset \Omega$, $\mu(\Omega - \Omega') \le \alpha/2$, et :

$$\begin{aligned}\Lambda_1(u_j(\xi)\,\chi_{\Omega'},\mu) &\le J_\beta(u_j)\;\|\xi\| \\ &= J_\beta^*(\lambda_j)\;\|\xi\| \\ &\le J_\beta^*(\lambda)\;\|\xi\|\;.\end{aligned}$$

Désignons par λ_j' la mesure à support fini associée à l'opérateur u_j', restriction de u_j à Ω'. Puisque $p \in\,]0,1[$, il existe une constante C(p,1) telle que :

$$\|\lambda_j\|_p \;\le\; C(p,1)\;\Lambda_1^*(\lambda_j) \;\le\; C(p,1)\;J_\beta^*(\lambda)\;.$$

Soit $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ une suite finie d'éléments de F'. Puisque v^* vérifie $R_{p,q}$, on a :

$$\pi_p(v_\xi \circ v) \;\le\; C\;(\Sigma\,\|\xi_i\|^q)^{1/q}\;,$$

donc :

$$\begin{aligned}\|v_\xi \circ v(\lambda_j')\|_p &\le C\;(\Sigma\,\|\xi_i\|^q)^{1/q}\;\|\lambda_j'\|_p \\ &\le C.\;C(p,1)\;(\Sigma\,\|\xi_i\|^q)^{1/q}\;J_\beta^*(\lambda)\,.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\lambda_j\{x\in E\;;\;\|v_\xi\circ v(x)\| > R\} &\le \alpha/2 + \lambda_j'\;\{x \in E\;;\;\|v_\xi \circ v(x)\| > R\} \\ &\le \alpha/2 + \left(\tfrac{1}{R}\;C.\;C(p,1)\;J_\beta^*(\lambda)\;(\Sigma\|\xi_i\|^q)^{1/q}\right)^p\end{aligned}$$

En posant :

$$R_0 = \left(\tfrac{\alpha}{2}\right)^{-1/p} C.C(p,1)\;J_\beta^*(\lambda)\;(\Sigma\,\|\xi_i\|^q)^{1/q}\,,$$

on obtient :

$$J_\alpha\,(v_\xi \circ v(\lambda_j)) \leq R_o\ ,$$

d'où puisque $(v_\xi \circ v(\lambda_j))$ converge étroitement vers $v_\xi \circ v(\lambda)$:

$$J_\alpha\,(v_\xi \circ v(\lambda)) \leq R\ .$$

On en déduit, puisque $v_\xi \circ v(\lambda)$ coïncide avec l'image de μ par $\omega \to (u\ v^*(\xi_i)(\omega))_{i=1,\dots,n}$:

$$J_\alpha\,(\sup_i |u\ v^*(\xi_i)(\omega)|,\ d\mu(\omega) \leq C\ (\tfrac{\alpha}{2})^{-1/p} C(p,1)\ J_\beta(u)\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q},$$

ce qui achève la démonstration, d'après le théorème de Nikishin, exposé IV.

<u>Remarque 3</u> : D'après l'exposé IV, théorème 2, on sait que si E est un espace de Banach, l'identité de E' vérifie $R_{0,1}$. On en déduit facilement, par des arguments analogues aux précédents (cf. e) ⇒ a') dans la proposition 1) : pour tout $p \in [0,1[$, et pour tout espace quasi-normé G :

$$\Pi_p(E,G) = \Pi\Lambda_1(E,G).$$

Cela semble être une version définitive de la "conjecture (démontrée) de Pietsch", cf. ([4], exposé V, théorème 3).

Nous rappellerons maintenant la définition des opérateurs (p,r)-sommants : soient p,r tels que $0 < p \leq r < \infty$, E un espace de Banach, G un espace quasi-normé. Un opérateur linéaire continu v de E dans G est dit (p,r)-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E : ♦

$$(\,\Sigma\ \|v(x_i)\|^r)^{1/r} \leq C\ \|(x_i)\|_p^*\ .$$

♦ Un certain nombre d'auteurs adoptent la convention inverse pour l'ordre des indices.

(Lorsque $p = r$, on retrouve les opérateurs p-sommants.)
On note $\pi_{p,r}(v)$ la plus petite constante C telle que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite.

__Lemme 1__ : Soient F un espace quasi normé, $p \geq 1$ et v un opérateur linéaire de l_n^∞ dans F. Pour que l'on ait $\pi_p(v) \leq 1$, il faut et il suffit que v admette la factorisation :

$$l_n^\infty \xrightarrow{\alpha} l_n^p \xrightarrow{v_1} F ,$$

avec $\|v_1\| \leq 1$, et où α est un opérateur diagonal, tel que $\Sigma\, |\alpha_i|^p \leq 1$.
En particulier, si $p = 1$, on a $\pi_1(v) = N_1(v)$, où $N_1(v)$ désigne la norme nucléaire de v.

__Démonstration__ : Puisque l'on a $p \geq 1$, on peut trouver la mesure de Pietsch pour v sur les points extrêmaux de la boule unité de l_n^1, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ (exposé I, théorème 1).
On a donc $\pi_p(v) \leq 1$ si et seulement s'il existe $\mu = \Sigma\, \lambda_i\, \delta_{e_i}$, $\lambda_i \geq 0$, $\Sigma\, \lambda_i = 1$, telle que :

$$\forall\, x \in l_n^\infty , \qquad \|v(x)\| \leq \left(\int |<x,\xi>|^p\, d\mu(\xi)\right)^{1/p} = \left(\Sigma\, |\lambda_i^{1/p}\, x_i|^p\right)^{1/p} ,$$

d'où on déduit le résultat, avec $\alpha_i = \lambda_i^{1/p}$. La dernière affirmation de l'énoncé est évidente.

__Lemme 2__ : Soient $p,r \geq 1$, E et F deux espaces de Banach et v un opérateur linéaire continu de E dans F. On considère tous les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{v} & F \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ l_n^{p'} & \xleftarrow[\alpha]{} & l_n^\infty \end{array}$$

avec α diagonal, et n entier variable.

On a :

$$\pi_{p,r}(v) = \sup \{\mathrm{Tr}\ (\alpha \circ w \circ v \circ u)\ ;\ \|u\| \le 1\ ;\ \|w\| \le 1\ ;\ \Sigma\ |\alpha_i|^{r'} \le 1\}.$$

<u>Démonstration</u> : Soit (e_i) la base de $l_n^{p'}$, et posons $x_i = u(e_i)$.
L'opérateur w peut s'écrire : $w(y) = (<y, \xi_i>)_{i=1,\dots,n}$, avec $\xi_i \in F'$, et :

$$\|u\| = \|(x_i)\|_p^* \quad ; \quad \|w\| = \sup_i \|\xi_i\|$$

$$\mathrm{Tr}\ (\alpha \circ w \circ v \circ u) = \Sigma\ \alpha_i < v(x_i), \xi_i > .$$

On a alors :

$$\sup \{ \mathrm{Tr}(\alpha \circ w \circ v \circ u)\ ;\ \|w\| \le 1,\ \Sigma\ |\alpha_i|^{r'} \le 1\} = (\Sigma\ \|v(x_i)\|^r)^{1/r},$$

ce qui donne le résultat, puisque $\pi_{p,r}(v)$ est le sup de $(\Sigma\ \|v(x_i)\|^r)^{1/r}$ lorsque $\|(x_i)\|_p^* = \|u\| \le 1$.

<u>Théorème 1</u> : Soient $p,q,r \ge 1$, $1/p = 1/q + 1/r$, E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F.
On a :

$$\pi_{p,r}(v) = R_{p,q}(v^*) \quad . \ ^{\blacklozenge}$$

<u>Démonstration</u> : Nous allons d'abord voir que $R_{p,q}(v^*) \le \pi_{p,r}(v)$. Nous utiliserons l'implication b) $\Rightarrow$ c) de la proposition 1. Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ une suite finie d'éléments de F'. Pour montrer que $R_{p,q}(v^*) \le \pi_{p,r}(v)$, il suffit de montrer que

$$\pi_p(v_\xi \circ v) \le \pi_{p,r}(v)\ (\Sigma\ \|\xi_i\|^q)^{1/q} \quad .$$

$^{\blacklozenge}$ Dans l'exposé oral, j'avais montré que $\pi_{p,r}(v) \le 3^{1/p + 1/q}\ R_{p,q}(v^*)$. Je dois l'amélioration à G. Pisier.

Pour évaluer $\pi_p(v_\xi \circ v)$, nous devons d'après le lemme 2 considérer les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "v"] & F \arrow[r, "v_\xi"] & l^\infty_n \arrow[d, "w"] \\ l^{p'}_m \arrow[u, "u"] & & l^\infty_m \arrow[ll, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

$\|u\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$, α diagonal, $\sum |\alpha_i|^{p'} \leq 1$.

L'opérateur $\alpha \circ w$ est p'-sommant, $\pi_{p'}(\alpha \circ w) \leq 1$, donc admet d'après le lemme 1 la factorisation :

$$l^\infty_n \xrightarrow{\beta} l^{p'}_n \xrightarrow{w_1} l^{p'}_m ,$$

$\|w_1\| \leq 1$, β diagonal, $\sum |\beta_i|^{p'} \leq 1$.

L'opérateur v_ξ peut aussi se décomposer en : $F \xrightarrow[w_2]{} l^\infty_n \xrightarrow[\gamma]{} l^\infty_n$,

$\|w_2\| \leq 1$, $\gamma_i = \|\xi_i\|$, ce qui permet de transformer le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "v"] & F \arrow[d, "w_2"] \\ l^{p'}_n \arrow[u, "u_1"] & l^\infty_n \arrow[l, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

$\|u_1\| \leq 1$, $\|w_2\| \leq 1$, $\delta_i = \beta_i \gamma_i$, donc : $(1/r' = 1/q + 1/p')$:

$$\sum |\delta_i|^{r'} \leq (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

On en déduit :

$$Tr(\delta \circ w_2 \circ v \circ u_1) = Tr(\alpha \circ w \circ v_\xi \circ v \circ u) \leq \pi_{p,r}(v) \; (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

ce qui démontre la première inégalité.

Montrons maintenant que $\pi_{p,r}(v) \leq R_{p,q}(v^*)$.

Pour cela, nous devons majorer la trace des diagrammes de la forme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "v"] & F \arrow[d, "w"] \\ l_n^{p'} \arrow[u, "u"] & l_n^{\infty} \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

$\|u\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$, α diagonal, $\Sigma |\alpha_i|^{r'} \leq 1$.

La trace est égale à celle du diagramme transposé:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "v^*"] & E' \arrow[d, "u^*"] \\ l_n^{1} \arrow[u, "w^*"] & l_n^{p} \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Puisque $1/r' = 1/q + 1/p'$, on peut écrire :

$$\alpha_i = \beta_i \gamma_i, \quad \Sigma |\beta_i|^{p'} \leq 1, \quad \Sigma |\gamma_i|^q \leq 1,$$

d'où la décomposition :

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "v^*"] & & E' \arrow[d, "u^*"] \\ l_n^{1} \arrow[u, "w^*"] & l_n^{1} \arrow[l, "\gamma"] & l_n^{p} \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Soit (e_i) la base de l_n^1, et posons : $\xi_i = w^* \circ \gamma (e_i)$.

On aura :

$$\Sigma \|\xi_i\|^q \leq 1 .$$

Par ailleurs, la trace du diagramme est égale à :

$$\Sigma\, \beta_i \;<\; u^* v^* (\xi_i),\; e_i \;> .$$

D'après la remarque 2, on a :

$$\Big(\sum_j \sup_i \,|<u^* v^* (\xi_i), e_j>|^p\Big)^{1/p} \le R_{p,q}(v^*)\; \Big(\Sigma\, \|\xi_i\|^q\Big)^{1/q} .$$

Alors :

$$\Sigma\, \beta_j < u^* v^* (\xi_j), e_j > \;\le\; \Sigma\, |\beta_j| \sup_i \,|<u^* v^* (\xi_i), e_j>|$$

$$\le \Big(\Sigma\, |\beta_j|^{p'}\Big)^{1/p'} \Big(\sum_j \sup_i |<u^* v^* (\xi_i), e_j>|^p\Big)^{1/p}$$

$$\le R_{p,q}\,(v^*),$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 4 : J'ignore si le théorème 1 subsiste lorsque $p \in]0,1[$. Si oui, cela fournit une réponse affirmative à une question de A. Pietsch : si u est p-sommant, et v q-sommant, avec $1/p + 1/q > 1$, le composé $v \circ u$ est-il 0-sommant.

Remarque 5 : En employant la même méthode que dans l'exposé X, on peut obtenir une généralisation vectorielle du théorème 1 : si v est (p,r)-sommant de E dans F, et si u est un opérateur linéaire p-approximable de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu,G)$, G Banach quelconque, $u \circ v^*$ est presque borné de F' dans $\Lambda_q(\Omega,\mu,G)$.

Nous allons appliquer le théorème 1 dans le cas de l'identité d'un espace :

Corollaire : Soient E un espace de Banach, et $q > 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Id_E est $(1,q')$-sommante [ce qui équivaut à dire que pour toute suite (x_n) sommable dans E, on a $\Sigma \|x_n\|^{q'} < \infty$.]

b) $Id_{E'}$ vérifie $R_{1,q}$.

c) Pour tout espace quasi normé G, et tout $p \in [0,q[$:

$$\Pi_p(E,G) = \Pi\Lambda_q(E,G) .$$

d) $Id_{E'}$ vérifie $R_{p,q}$ pour tout $p \in [0,q[$.

Démonstration : a) $\Leftrightarrow$ b) résulte directement du théorème 1. D'après la proposition 1, (implication c) $\Rightarrow$ a')), b) implique que :

$$\forall\, G \quad , \quad \Pi_1(E,G) = \Pi\Lambda_q(E,G) .$$

Soit q_1 tel que $1 < q_1 < q$. On aura a fortiori :

$$\forall\, G, \qquad \Pi_1(E,G) = \Pi_{q_1}(E,G).$$

D'après le théorème d'extrapolation, exposé VI, théorème 3, on a alors :

$$\forall\, p \in [0,1] \ , \qquad \Pi_p(E,G) = \Pi_1(E,G),$$

et $\Pi_1(E,G) = \Pi\Lambda_q(E,G)$, ce qui démontre que b) $\Rightarrow$ c). Pour finir, il suffit de montrer que c) implique $R_{p,q}(Id_{E'}) < \infty$ pour $p > 0$, d'après la proposition 2. Cela résulte alors de la proposition 1 (implication a) $\Rightarrow$ b)). Enfin, d) $\Rightarrow$ b) est trivial.

On sait qu'il existe des opérateurs (p,r)-sommants, $p \neq r$, qui ne sont s-sommants pour aucune valeur finie de s. Il n'en est pas ainsi lorsque l'espace de départ est un espace du type $\mathcal{L}^\infty$.
(Rappelons que E est du type $\mathcal{L}^\infty$ s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout sous-espace de dimension finie E_o de E, il existe un sous-espace de dimension finie E_1 de E, contenant E_o, et tel que :

$$d(E_1, l^\infty_{\dim E_1}) \leq \lambda, \quad \text{cf. [1].)}$$

<u>Proposition 3</u> : Soient E un espace de Banach du type $\mathcal{L}^\infty$, et p,q,r tels que $1 \le p < q < r < \infty$.
On a pour tout espace de Banach G :

$$\Pi_{1,q}(E,G) = \Pi_{p,q}(E,G) \subset \Pi_r(E,G).$$

<u>Démonstration</u> : Par une technique standard (cf. les raisonnements [1]), on se ramène à montrer que :

$$\pi_{p,q}(v) \le c_1(p,q)\ \pi_{1,q}(v)$$

et
$$\pi_r(v) \le c_2(q,r)\ \pi_{1,q}(v),$$

pour tout opérateur linéaire v de l_n^∞ (n quelconque) dans un espace de Banach G.

Soit $v \in \mathcal{L}(l_n^\infty, G)$. Pour calculer $\pi_{p,q}(v)$, nous devons majorer la trace des diagrammes :

$$\begin{tikzcd} l_n^\infty \arrow[r, "v"] & G \arrow[d, "w"] \\ l_m^{p'} \arrow[u, "u"] & l_m^\infty \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

$\|u\| \le 1$, $\|w\| \le 1$; α diagonal, $\Sigma\, |\alpha_i|^{q'} \le 1$.

Il résulte de l'exposé XI qu'il existe une constante $C_1(p,q)$ (pour $p < q$!) telle que :

$$\pi\lambda_{q'}(\alpha) \le C_1(p,q)\ (\Sigma\, |\alpha_i|^{q'})^{1/q'} \le C_1(p,q).$$

D'après le théorème 1, on a $R_{1,q'}(v^*) = \pi_{1,q}(v)$, donc d'après la proposition 1 (c $\Rightarrow$ a'), avec $\alpha_o = 1/3$) :

$$\begin{aligned} \pi_1(\alpha \circ w \circ v) &\le 3^{1+1/q'}\pi\lambda_{q'}(\alpha \circ w).\ \pi_{1,q}(v) \\ &\le 3^{1+1/q'} C_1(p,q).\pi_{1,q}(v)\ . \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 1, on a $\pi_1(\alpha \circ w \circ v) = N_1(\alpha \circ w \circ v)$, donc :

$$\begin{aligned} Tr(\alpha \circ w \circ v \circ u) &\leq N_1(\alpha \circ w \circ v \circ u) \leq \|u\| \; N_1(\alpha \circ w \circ v) \\ &\leq 3^{1+1/q'} C_1(p,q) \; \pi_{1,q}(v), \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\pi_{p,q}(v) \leq 3^{1+1/q'} C_1(p,q) \; \pi_{1,q}(v)$.

La démonstration de la deuxième inégalité est identique : on considère un diagramme :

$$\begin{tikzcd} l_n^\infty \arrow[r, "v"] & G \arrow[d, "w"] \\ l_m^{r'} \arrow[u, "u"] & l_m^\infty \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

$\|u\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$, α diagonal, $\Sigma \, |\alpha_i|^{r'} \leq 1$,

et on raisonne comme précédemment, à partir de l'inégalité :

$$\pi\lambda_{q'}(\alpha) \leq C_2(q,r) \; (\Sigma \, |\alpha_i|^{r'})^{1/r'} .$$

On trouvera l'énoncé de quelques résultats complémentaires dans [3].

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. LINDENSTRAUSS et A. PELCZYNSKI : Studia Math t. 29 (1968) p.275 - 326.

[2] J. LINDENSTRAUSS et H. ROSENTHAL : Israel J. of Math 7 (1969) p. 325 - 349.

[3] B. MAUREY : C. R. A. S. t. 77, p. 1053 - 1055.

[4] Séminaire MAUREY-SCHWARTZ 1972 - 1973.

****