SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Applications O-radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 9, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

NTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1972-1973

APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES

par L. SCHWARTZ

Exposé N° IX

10 Janvier 1973

§ 1. LES POIDS J_α, ORDRE ET TYPE 0.

Définition (IX.1;1) : Soit $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ l'espace des probabilités sur $\overline{\mathbb{R}}^+$, muni de la topologie étroite. On le munira de la relation d'ordre : $\mu \leq \nu$ ♦, si, pour tout $a \geq 0$, $\mu(]a,+\infty]) \leq \nu(]a,+\infty])$. D'autre part, pour $0 < \tau < +\infty$, $\tau . \mu$ voudra dire l'image de μ par l'homothétie de centre origine et de rapport τ. On appelle poids une fonction $\Phi : \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^+) \to \overline{\mathbb{R}}^+$, croissante ($\mu \leq \nu$ implique $\Phi(\mu) \leq \Phi(\nu)$), et sci (semi-continue inférieurement) pour la topologie étroite ($\lim\limits_i \mu_i = \mu$ implique $\liminf\limits_i \Phi(\mu_i) \geq \Phi(\mu)$). On dira qu'un poids Φ est homogène si, pour $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ et $0 < \tau < +\infty$, $\Phi(\tau . \mu) = \tau\, \Phi(\mu)$.

Par exemple, pour $0 < p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$), $\| \; \|_p$ est le poids homogène $\mu \mapsto (\int t^p \, d\mu(t))^{1/p}$ (resp. $\mu \mapsto$ Max. Supp. μ).

Définition (IX.1; 2) : Si Φ est un poids homogène, si μ est une probabilité de Radon sur un espace topologique X, si f est une fonction $X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, on pose $\Phi(\mu,f) = \Phi(|f| . (\mu))$, où $|f| . \mu$ est l'image de μ par $|f| : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$; alors $\Phi(\mu,\tau f) = \tau\, \Phi(\mu,f)$.

Si G est un espace bitopologique, μ une mesure de Radon sur G ♦♦, on appelle $\Phi(\mu)$ la quantité $\Phi(\mu,f)$, où $f : G \to \overline{\mathbb{R}}^+$ est la fonction quasi-norme.

Si E est un espace vectoriel à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique sur E, on appelle $\Phi^*(\lambda)$ la quantité $\sup\limits_{\substack{\xi \in E' \\ \|\xi\| \leq 1}} \Phi(|\xi| . \lambda)$,

où $|\xi| . \lambda$ est l'image de λ par $|\xi| : x \mapsto |\langle x,\xi\rangle|$, ou encore l'image de $\xi(\lambda)$ par l'application $t \mapsto |t|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

Dans le cas $\Phi = \| \; \|_p$, on retrouve bien ce qu'on avait appelé $\|\mu\|_p$ ou $\|\lambda\|_p^*$, dans l'exposé I.

♦ Ce n'est pas la relation d'ordre usuelle pour des mesures, qui serait absurde dans le cas de probabilités !

♦♦ Rappelons que la topologie de G n'est pas définie par sa quasi-norme.

Rappelons que μ est dite d'ordre p si $\|\mu\|_p < +\infty$, que λ est dite de type p si $\|\lambda\|_p^* < +\infty$. Nous dirons donc que μ est d'ordre Φ si $\Phi(\mu) < +\infty$, que λ est de type Φ si $\Phi^*(\lambda) < +\infty$. Rappelons aussi que λ est de type p si et seulement si, pour tout fonction aléatoire linéaire $f : E' \to L^0(\Omega, \mu)$ attachée à λ (i.e. $\xi(\lambda) = (f(\xi))(\mu)$ pour $\xi \in E'$), est continue de E' ♦ dans $L^p(\Omega, \mu)$. On voit donc bien comment on pourra passer du type $p > 0$ au type 0.

<u>Définition (IX.1; 3)</u> : <u>Pour $0 < \alpha < 1$, on appelle J_α le poids homogène $J_\alpha(\mu) = \mathrm{Inf}\,\{a \in \overline{\mathbb{R}}^+ ,\ \mu(]a, +\infty]) \leq \alpha\}$</u>.

Il faut vérifier que c'est bien un poids. La croissance est évidente ainsi que l'homogénéité. Pour la semi-continuité inférieure, on remarquera que, si $J_\alpha(\mu) = a$, on a $\mu(]a, +\infty]) \leq \alpha$, mais, pour tout $a' < a$, $\mu(]a', +\infty]) > \alpha$; comme $]a', +\infty]$ est ouvert, si μ_i converge étroitement vers μ, $\liminf_i \mu_i(]a', +\infty]) \geq \mu(]a', +\infty]) > \alpha$, donc $J_\alpha(\mu_i) > a'$ pour i assez grand, et $\liminf_i J_\alpha(\mu_i) \geq a = J_\alpha(\mu)$.

<u>Remarque</u> : On notera d'abord que le Inf qui définit J_α est un Min. On utilisera constamment les équivalences :

$$J_\alpha(\mu) \leq a \Leftrightarrow \mu(]a, +\infty]) \leq \alpha$$

$$J_\alpha(\mu) > a \Leftrightarrow \mu(]a, +\infty]) > \alpha \quad .$$

<u>Proposition (IX.1;4)</u> : <u>Un système de jauges de la topologie de $L^0(\Omega, \mu)$ est formé par les fonctions $f \mapsto J_\alpha(\mu, f)$, $0 < \alpha < 1$. $L^0(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel topologique métrisable et complet</u>.

<u>Démonstration</u> : Un système fondamental de voisinages de 0 de la convergence en probabilité est défini par les

$$V_{\alpha, a} = \{f \in L^0(\Omega, \mu) \ ; \ \mu\{\omega \in \Omega \ ; \ |f(\omega)| > a\} \leq \alpha\}$$

$$= \{f \in L^0(\Omega, \mu) \ ; \ J_\alpha(\mu, f) \leq a\}, \quad 0 < \alpha < 1, \ a > 0.$$

♦ Rappelons que la topologie de E' est définie par sa quasi-norme.

Comme cela donne un système fondamental dénombrable de jauges, $L^0(\Omega,\mu)$ est métrisable, et il est trivialement complet.

Définition (IX.1;5) : On dit qu'une probabilité de Radon μ sur un espace bitopologique G est d'ordre 0 si, pour tout α, $0<\alpha<1$, $J_\alpha(\mu)$ est fini.

Comme $J_\alpha(\mu) \le R \Leftrightarrow \mu\{x\in G\,;\,\|x\|>R\}\le\alpha$, cela veut exactement dire que μ est portée par la réunion des quasi-boules de G, c.à.d. par le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ des éléments de quasi-norme finie ; elle est donc une probabilité de Radon sur $\mathcal{G}$ (mais non sur $\mathcal{G}_N$, voir (II.1;2)). Si $\mathcal{G}=G$, toute probabilité de Radon sur G est d'ordre 0.

Définition (IX.1;6) : On dit qu'une probabilité cyclindrique λ sur un espace à dual quasi-normé E est de type 0, si, pour tout α, $J^*_\alpha(\lambda)<+\infty$.

Remarque : Le type et l'ordre p, pour $p>0$, faisaient intervenir un seul poids, $\|\ \|_p$. Le type et l'ordre 0 font intervenir la famille des poids J_α . Remarquons aussi que, pour une suite finie $g=(g_n)_{n\le N}$ d'éléments de E, on avait posé $\|g\|_0=\left(\prod_{0\le n\le N}\|g_n\|\right)^{1/N+1}$. On serait tenté d'écrire, pour une probabilité de Radon μ et une probabilité cylindrique λ, $\|\mu\|_0=\Phi(\mu)$, $\|\lambda\|^*_0=\Phi^*(\lambda)$, où Φ serait le "poids" $\nu\mapsto\exp(\int\log t\,d\nu(t))$. Il n'en est rien, et d'ailleurs Φ n'est pas un poids.

Proposition (IX.1;7) : Soit λ une probabilité cyclindrique sur un espace à dual quasi-normé E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) λ est de type 0, i.e. $J^*_\alpha(\lambda)<+\infty$ pour tout α ;
2) toute fonction aléatoire linéaire associée, $f:E'\to L^0(\Omega,\mu)$, est continue ;
3) $\xi\mapsto\xi(\lambda)$ est continue de E' dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$;
3') quand ξ tend vers 0 dans E', $\xi(\lambda)$ tend étroitement vers δ ;
4) l'image de Fourier $\hat{\lambda}$ de λ est continue de E' (ou continue à l'origine, ou uniformément continue).

Démonstration : f est continue si et seulement si l'image de la boule unité de E' est bornée, c.à.d. si $\sup_{\|\xi\|\le1} J_\alpha(\mu,f(\xi))<+\infty$ pour tout α,

ou $\sup_{\|\xi\|\le1} J_\alpha(|\xi|\,.\,\lambda)<+\infty$ ou $J^*_\alpha(\lambda)<+\infty$; donc $1\Leftrightarrow2$.

Mais, si ξ tend vers ξ_o , 2 entraîne que $f(\xi)$ tende vers $f(\xi_o)$ dans $L^o(\Omega,\mu)$, donc $\xi \cdot \lambda = f(\xi) \cdot \mu$ tend étroitement vers $f(\xi_o) \cdot \mu = \xi_o \cdot \lambda$, donc $2 \Rightarrow 3$; $3 \Rightarrow 3'$ trivialement, puisque c'est la continuité à l'origine; si ξ tend vers 0, 3 entraîne que $\xi(\lambda)$ tende étroitement vers δ, donc $f(\xi)$ converge en probabilité vers 0, donc f est continue à l'origine donc partout, et $3' \Rightarrow 2$; donc $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 3'$.

D'après le théorème de Paul Lévy, des probabilités μ_j sur $\mathbb{R}$ convergent étroitement vers une probabilité μ, si et seulement si leurs images de Fourier $\hat{\mu}_j$ convergent vers $\hat{\mu}$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Par ailleurs $\hat{\lambda}$, fonction de type positif, est uniformément continue dès qu'elle est continue à l'origine ; et l'image de Fourier de $\xi(\lambda)$ est $\tau \mapsto \hat{\lambda}(\tau\, \xi)$. Alors la continuité de $\hat{\lambda}$ à l'origine veut dire que, si ξ converge vers 0 dans E', $\hat{\lambda}(\xi)$ converge vers 1 ; cela équivaut aussi à dire que $\hat{\lambda}(\tau\, \xi)$ converge vers 1 uniformément pour τ borné, donc que $\xi(\lambda)$ converge étroitement vers δ, donc $4 \Leftrightarrow 3'$, cqfd.

<u>Définition (IX.1;8)</u> : <u>Un ensemble $\mathfrak{M}$ de probabilités de Radon sur G est dit uniformément d'ordre 0 si , pour tout α, $\sup_{\mu \in \mathfrak{M}} J_\alpha(\mu) < +\infty$</u>.

<u>Proposition (IX.1;9)</u> : <u>Si les quasi-boules de G sont compactes, un ensemble de probabilités de Radon sur G, uniformément d'ordre 0, est relativement compact dans $\mathcal{P}(\mathcal{G})$, a fortiori cylindriquement relativement compact dans $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.</u>

<u>Démonstration</u> : C'est le théorème de Prokhorov sur la relative compacité d'un ensemble de probabilités de Radon : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de G contenu dans $\mathcal{G}$, à savoir la boule B(R), $R = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} J_\varepsilon(\mu)$, tel que, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu(\complement(B(R))) \leq \varepsilon$.

<u>Définition (IX.1;10)</u> : <u>Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de probabilités cyclindriques sur E. Il est dit uniformément d'ordre 0, si, pour tout α, $\sup_{\lambda \in \mathcal{L}} J^*_\alpha(\lambda) < +\infty$.</u>

<u>Proposition (IX.1;11) (évidente)</u> : <u>Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de probabilités cyclindriques sur E. Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>$\mathcal{L}$ est uniformément d'ordre 0</u> ;
2) <u>si les f_λ sont des fonctions aléatoires associées aux $\lambda \in \mathcal{L}$</u>,

correspondant toutes aux mêmes Ω, μ, alors l'ensemble des f_λ, $\lambda \in \mathfrak{L}$, est équicontinu de E' dans $L^0(\Omega,\mu)$;

3') quand ξ tend vers 0, $\xi(\lambda)$ tend étroitement vers δ, uniformément pour $\lambda \in \mathfrak{L}$[♦] ;

4) l'ensemble des $\hat{\lambda}$, $\lambda \in \mathfrak{L}$, est uniformément équicontinu.

Définition (IX.1;12) : Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type 0-approximable si elle est cylindriquement adhérente à un ensemble $\mathfrak{L}$ de probabilités de Radon à supports finis, uniformément de type 0.

§ 2. LES APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES.

Définition (IX.2;1) : Soit u une application linéaire faiblement continue de E, espace à dual quasi-normé, dans G, espace bitopologique. On dit qu'elle est 0-radonifiante (resp. approximativement 0-radonifiante) si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type 0 (resp. de type 0-approximable), $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre 0 sur G.

Théorème (IX.2;2) : Supposons les boules de G compactes. Pour que u soit approximativement 0-radonifiante, il faut et il suffit que, pour tout β, il existe $M \geq 0$ et α tels que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, à support fini, on ait :

(IX.2;2bis) $$J_\beta(u(\lambda)) \leq M J^*_\alpha(\lambda) .$$

Démonstration : La nécessité de la condition est assez pénible à démontrer ; nous renvoyons au Séminaire Schwartz, 1969-70, théorème (XVI.2;1). Montrons que la condition est suffisante. Soit donc λ de type 0-approximable. Soit λ_j un filtre de probabilités de Radon à supports finis, convergeant cylindriquement vers λ et uniformément de type 0. Alors le $u(\lambda_j)$ convergent cylindriquement vers $\mu(\lambda)$. $J_\beta(u(\lambda_j)) \leq M J^*_\alpha(\lambda_j)$ et $\operatorname{Sup}_j J^*_\alpha(\lambda_j) < +\infty$. Donc les λ_j sont de Radon uniformément d'ordre 0 ; d'après (IX.1;9), elles sont dans une partie cylindriquement compacte de probabilités de Radon sur G, donc $u(\lambda)$ est de Radon sur G, cqfd.

[♦] Nous n'introduisons pas l'équivalent de 3, pour ne pas nous lancer dans la structure uniforme de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corollaire (IX.2;3) : Si H est un Banach, et si u est linéaire continue de E dans $\sigma(H',H)$, et vérifie les conditions (IX.2;2bis), elle est approximativement 0-radonifiante.

Corollaire (IX.2;4) : Si G est un quasi-Banach séparé par son dual, à boules faiblement fermées, et si u, linéaire faiblement continue de E dans G, vérifie les conditions (IX.2;2bis), elle est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$.

Pour la définition de l'espace bitopologique $\sigma(G'',G')$, voir (II.1;8).

Remarque :

1) Si G est un Banach réflexif, ou un dual fort séparable d'un Banach, on peut remplacer $\sigma(G'',G')$ par G ; la démonstration est la même que pour (III.2;3) et (III.2;8) ; pour le dernier cas, on a besoin de savoir que u est q-sommante pour un q fini >1 ; cela résultera de (IX.3;26).

2) Si (E,E') vérifie la propriété d'approximation métrique, on peut supprimer "approximativement" dans l'énoncé. La démonstration est analogue à celle du cas $p>0$ mais plus compliquée ; nous renvoyons au Séminaire Schwartz 1969-70, (XVII.3;1).

§ 3. INEGALITES DE PIETSCH.

Soit E un espace vectoriel à dual quasi-normé. Pour $x \in E$, appelons $\tilde{x}$ la fonction $\xi \mapsto \langle x,\xi \rangle$ sur E'. Dans tout ce paragraphe, G sera un quasi-Banach, séparé par son dual, à boules faiblement fermées.

Théorème (IX.3;1) : Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Supposons qu'il existe une application linéaire v de E dans un espace $L^\infty(Z,\nu)$, où Z est un ensemble muni d'une tribu et ν une probabilité sur Z telle que ${}^t v$ envoie les caractères de l'algèbre de Banach de $L^\infty(Z,\nu)$ dans l'adhérence B^*, dans $\sigma(E^*,E)$, de la quasi-boule unité B' de E'. Supposons en outre que la convergence de v(x) vers 0 dans $L^0(Z,\nu)$ entraîne la convergence de u(x) vers 0 dans G. Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. Si en ordre on a une inégalité

(IX.3;1bis) $$\|u(x)\| \leq R\, J_{\gamma}(\nu, v(x)) \quad ,$$

<u>alors, pour toute λ de Radon à support fini sur E, on a</u>

(IX.3;1ter) $$J_{\beta}(u(\lambda)) \leq R\, J^{*}_{\beta\gamma}(\lambda) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : La condition : "$v(x) \to 0$ dans $L^{0}(Z,\nu) \Rightarrow u(x) \to 0$ dans G", implique l'existence de R et γ tels que (IX.3;1bis). Si alors de (IX.3;1bis) on déduit (IX.3;1ter), le corollaire (IX.2;4) entraînera que u soit approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. En outre, on aura ce résultat remarquable : pour β donné, les quantités M, α, de (IX.2;1bis) seront données par $M = R$ (indépendant de β), et $\alpha = \beta\gamma$ (proportionnel à β).

Comme dans le théorème (II.4;1), on peut remplacer $L^{\infty}(Z,\nu)$ par C(Z).
Cherchons à réaliser une inégalité $J_{\beta}(u(\lambda)) \leq C$. Comme λ est de Radon, cela veut dire

(IX.3;2) $$\lambda\{x \in E \,;\, \|u(x)\| > C\} \leq \beta \quad .$$

D'après (IX.3;1bis), $\|u(x)\| > C$ entraîne $J_{\gamma}(\nu, v(x)) > \frac{C}{R}$. Donc (IX.3;2) est entraînée par

(IX.3;3) $$\lambda\{x \in E \,;\, J_{\gamma}(\nu, v(x)) > \frac{C}{R}\} \leq \beta \quad ,$$

c.à.d.

(IX.3;4) $$\lambda\{x \in E \,;\, \nu\{z \in Z \,;\, |(v(x))(z)| > \frac{C}{R}\} > \gamma\} \leq \beta \quad .$$

Appelons A l'ensemble des (x,z) de $E \times Z$ tels que $|v(x)(z)| > \frac{C}{R}$.
Appelons ${}_{x}A$ l'ensemble des z tels que $(x,z) \in A$, A_{z} l'ensemble des x tels que $(x,z) \in A$.
Alors (IX.3;4) s'écrit

(IX.3;5) $$\lambda\{x \in E \,;\, \nu({}_{x}A) > \gamma\} \leq \beta \quad .$$

Ceci, par Fubini, est entraîné par :

(IX.3;6) $$(\lambda \otimes \nu)(A) \leq \beta\gamma \quad .$$

Ceci à son tour est entraîné par :

(IX.3;7) $$\forall\, z \in Z, \quad \lambda(A_z) \leq \beta\gamma \quad .$$

Mais $(v(x))(z) = \langle x, {}^t v(\delta_{(z)}) \rangle$. D'après l'hypothèse, puisque $\delta_{(z)}$ est un caractère de $C(Z)$, ${}^t v(\delta_{(z)})$ est dans B^*. Alors (IX.3;7) sera entraînée par

(IX.3;8) $$\forall\, \xi \in B^*, \quad \lambda\{x \in E \,;\, |\langle x,\xi \rangle| > \frac{C}{R}\} \leq \beta\gamma$$

ou

(IX.3;9) $$\forall\, \xi \in B^*, \quad (|\xi| \,.\, \lambda)(]\frac{C}{R}, +\infty]) \leq \beta\gamma \quad .$$

Comme λ est de Radon à support fini, $\xi \mapsto |\xi| \,.\, \lambda$ est continu de $\sigma(E^*,E)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$.

Alors (IX.3;9) est entraînée par

(IX.3;10) $$\forall\, \xi \in E', \quad \|\xi\| \leq 1 : (|\xi| \,.\, \lambda)(]\frac{C}{R}, +\infty]) \leq \beta\gamma$$

ou $J_{\beta\gamma}(|\xi| \,.\, \lambda) \leq \frac{C}{R}$, donc par

(IX.3;11) $$J^*_{\beta\gamma}(\lambda) \leq \frac{C}{R} \quad .$$

On voit donc que $J^*_{\beta\gamma}(\lambda) \leq \frac{C}{R} \Rightarrow J_\beta(u(\lambda)) \leq C$, on a donc bien (IX.3;1ter).

Voici une variante, où interviendra une probabilité ν sur $\sigma(E',E)$. Il n'y a pas alors d'espace $L^\infty(Z,\nu)$ qui puisse intervenir, car $\tilde{x} : \xi \mapsto \langle x,\xi \rangle$ n'est pas une fonction bornée sur E'.

<u>Théorème (IX.3;12)</u> : <u>Supposons qu'il existe une probabilité de Radon ν sur $\sigma(E',E)$, telle que la convergence de $\tilde{x}$ vers 0 dans $L^0(\sigma(E',E),\nu)$ entraîne la convergence de $u(x)$ vers 0. Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. En outre, s'il existe R et γ tels que, pour tout $x \in E$</u> :

(IX.3;12bis) $$\|u(x)\| \leq R\, J_\gamma(\nu,\tilde{x}) \quad ,$$

<u>alors, pour tout β et toute λ de Radon à support fini sur E</u> :

(IX.3;12ter) $$J_\beta(u(\lambda)) \leq R\, J_\delta(\nu)\; J^*_\alpha(\lambda) \quad ,$$

dès que $\alpha + \delta \leq \beta\gamma$ (en particulier pour $\alpha = \delta = \frac{\beta\gamma}{2}$).

Démonstration : N'essayons pas de ramener de force cette situation à celle qui précède, mais copions la démonstration. Si on appelle $v(x)$ la fonction $\tilde{x} : \xi \mapsto \langle x, \xi \rangle$ sur $Z = \sigma(E', E)$, (IX.2;12bis) est (IX.3;1bis), si ce n'est que $\tilde{x}$ n'est pas une fonction bornée sur Z, il n'y a pas d'espace L^∞. Les inégalités (IX.3;2 à 6) subsistent sans modification ; ici $A \subset E \times E'$, $A = \{(x,\xi) \,;\, |\langle x,\xi\rangle| > \frac{C}{R}\}$. Alors (IX.3;6) est entraîné, si $\alpha + \delta \leq \beta$, par

(IX.3;13) $$\nu\{\xi \in E' \,;\, \lambda(A_\xi) > \alpha\} \leq \delta$$

(car $A = \{\xi \,;\, \lambda(A_\xi) > \alpha\} \cup \{\xi \,;\, \lambda(A_\xi) \leq \alpha\}$, et alors $(\lambda \otimes \nu)(A) \leq \nu\{\xi \,;\, (A_\xi) > \alpha\} + \alpha\, \nu\{\xi \,;\, \lambda(A_\xi) \leq \alpha\} \leq \delta + \alpha \leq \beta\gamma)$.

(IX.3;13) s'écrit :

(IX.3;14) $$\nu\{\xi \in E' \,;\, (|\xi| \,.\, \lambda)(]\tfrac{C}{R}, +\infty]) > \alpha\} \leq \delta$$

ou

(IX.3;15) $$\nu\{\xi \in E' \,;\, J_\alpha(|\xi| \,.\, \lambda) > \tfrac{C}{R}\} \leq \delta \quad .$$

Ceci est entraîné par

(IX.3;16) $$\nu\{\xi \in E' \,;\, \|\xi\|\, J^*_\alpha(\lambda) > \tfrac{C}{R}\} \leq \delta$$

ou

(IX.3;17) $$\nu\{\xi \in E' \,;\, \|\xi\| > \frac{C}{R\, J^*_\alpha(\lambda)}\} \leq \delta$$

ou

(IX.3;18) $$J_\delta(\nu) \leq \frac{C}{R\, J^*_\alpha(\lambda)}$$

Ainsi $R\, J_\delta(\nu)\, J^*_\alpha(\lambda) \leq C$ entraîne $J_\beta(u(\lambda)) \leq C$, d'où (IX.3;12ter).

Définition (IX.3;19) : Soit ρ une probabilité cylindrique sur $\sigma(G',G)$. Elle est dite de cotype 0, si la convergence de $|\tilde{y}| \cdot (\rho)$ vers δ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ entraîne la convergence de y vers 0 dans G. Si ρ est représentée par une fonction aléatoire linéaire $f : G \mapsto L^0(\Omega,\mu)$, cela signifie que la convergence de $f(y)$ vers 0 dans $L^0(\Omega,\mu)$ entraîne celle de y vers 0 dans G. Cela entraîne l'existence d'un γ, $0<\gamma<1$, et d'un $M \geq 0$ tel que

(IX.3;19bis) $$\|y\| \leq M\, J_\gamma(|\tilde{y}| \cdot \rho) \quad ;$$

le plus petit nombre M possible se note ${}^*J_\gamma(\rho)$.

Théorème de dualité (IX.3;20) : Supposons qu'il existe sur $\sigma(G',G)$ une probabilité cyclindrique ρ de cotype 0, telle que ${}^t u\,\rho$ soit de Radon d'ordre 0 sur $\sigma(E',E)$ (espace bitopologique, pour la topologie $\sigma(E',E)$ et la quasi-norme donnée sur E'). Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. En outre, si l'on a (IX.3;19bis), on a, dès que $\alpha + \delta \leq \beta\gamma$, pour toute λ de Radon de support fini sur E :

(IX.3;20ter) $$J_\beta(u(\lambda)) \leq R\, J_\delta({}^t u\,\rho)\, J^*_\alpha(\lambda) \quad .$$

En particulier

(IX.3;20quarto) $$J_\beta(u(\lambda)) \leq R\, J_{\frac{\beta\gamma}{2}}({}^t u\,\rho)\, J^*_{\frac{\beta\gamma}{2}}(\lambda) \quad .$$

Démonstration : La probabilité ${}^t u\,\rho$ sur $\sigma(E',E)$ est une mesure de Pietsch, puisque

(IX.3;21) $$\|u(x)\| \leq R\, J_\gamma(u(x) \cdot \rho)$$

$$= R\, J_\gamma(\tilde{x}({}^t u\,\rho)) = R\, J_\gamma({}^t u\,\rho, \tilde{x}) \quad .$$

De (IX.3;12bis) avec $\nu = {}^t u\,\rho$, on déduit donc (IX.3;20ter) par (IX.3;12ter).

Théorème de Sunyach (IX.3;22) (réciproque du théorème de Pietsch) : Supposons que u soit approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$. Alors il existe Z, ν comme au théorème (IX.3;1), avec Z = boule unité B' de E', munie de la topologie $\sigma(B',E)$, et $v(x) = \tilde{x}$.

Ceci sera même conséquence du théorème plus fort :

Théorème (IX.3;23) : S'il existe α_o, β_o, M_o tels que, pour toute λ de Radon de support fini sur E, on ait

(IX.3;23bis) $$J_{\beta_o}(u(\lambda)) \leq M_o J^*_{\alpha_o}(\lambda)$$

alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$; il existe une probabilité de Pietsch ν avec $Z = \sigma(B',E)$, $v(x) = \tilde{x}$, $R = M_o$, γ arbitraire $< \alpha_o$; et, pour tout β, et tout $\gamma < \alpha_o$, on a

(IX.3;23ter) $$J_\beta(u(\lambda)) \leq M_o J^*_{\beta\gamma}(\lambda) \quad .$$

Cet énoncé est effectivement plus fort que le précédent. Si en effet u est approximativement 0-radonifiante, pour tout β, il existe M et α tels que (IX.2;2bis). Ici nous supposons seulement l'existence d'un β_o, d'un M_o, d'un α_o tels que (IX.3;23bis) ; et nous trouvons finalement que, pour tout β, il existe M et α tels que (IX.2;2bis), avec $M = M_o$, $\alpha = \beta\gamma$; remarquons que β_o n'intervient pas.

Démonstration : Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des probabilités de Radon λ à support fini sur E telles que $J_{\beta_o}(u(\lambda)) > M_o$, ou $u(\lambda)(\complement B(M_o)) > \beta_o$ ($B(M_o)$ est la boule de rayon M_o sur G). $\mathfrak{M}$ est convexe dans $\mathcal{P}(E)$. Pour toute $\lambda \in \mathfrak{M}$, considérons la fonction φ_λ sur $\sigma(B',E)$ définie par :

$$\varphi_\lambda(\xi) = \alpha_o - (|\xi| \, . \, \lambda)([1,+\infty]) \quad .$$

Comme $[1, +\infty]$ est fermé, et que $\xi \mapsto |\xi| \, . \, \lambda$ est continue de E' dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ (λ est de Radon à support fini !), $\xi \mapsto (|\xi| \, . \, \lambda)[1,+\infty]$ est scs, donc φ_λ est sci♦. En outre, $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(\xi)$ est convexe, car c'est

---

♦ C'est pour obtenir des fonctions sci que nous sommes obligés de prendre $[1,+\infty]$ au lieu de $]1,+\infty]$ comme antérieurement.

$\lambda \mapsto \lambda\{x \in E\ ;\ |<\xi, x>| \geq 1\}$. Donc l'ensemble des φ_λ, $\lambda \in \mathfrak{M}$, est un ensemble convexe de fonctions sci sur $\sigma(B', E)$, et chacune a un minimum ≤ 0, car, puisque $J_{\beta_0}(u(\lambda)) > M_0$, on a, à cause de (IX.3;23bis), $J^*_{\alpha_0}(\lambda) > 1$, donc il existe un ξ, $\|\xi\| \leq 1$, tel que $J_{\alpha_0}(|\xi| \,.\, \lambda) > 1$ ou $(|\xi| \,.\, \lambda)(]1, +\infty]) > \alpha_0$, a fortiori $(|\xi| \,.\, \lambda)[1, +\infty] > \alpha_0$ ou $\varphi_\lambda(\xi) < 0$ donc $\varphi_\lambda(\xi) \leq 0$. Donc le lemme (II.4;5) appliqué au cône Γ engendré par $\mathfrak{M}$, montre l'existence d'une probabilité de Radon ν sur $\sigma(B', E)$, telle que, pour toute $\lambda \in \mathfrak{M}$, $\nu(\varphi_\lambda) \leq 0$. Soit $x \in E$; prenons $\lambda = \delta_{(x)}$; $J_{\beta_0}(u(\lambda)) > M_0$ signifie $\delta_{(u(x))}(]M_0, +\infty]) > \beta_0$, c.à.d. $\|u(x)\| > M_0$. Ceci entraîne donc $\nu(\varphi_{\delta_{(x)}}) \leq 0$, ou $\int d\nu(\xi)(\alpha_0 - \delta_{|<x,\xi>|}([1, +\infty])) \leq 0$, ou $\alpha_0 \leq (\tilde{x}(\nu))[1, +\infty]$. Soient a arbitraire < 1 et γ arbitraire $< \alpha_0$; on aura alors $\tilde{x}(\nu)(]a, +\infty]) > \gamma$ ou $J_\gamma(\nu, \tilde{x}) > a$. Ainsi nous avons montré que $\|u(x)\| > M_0 \Rightarrow J_\gamma(\nu, \tilde{x}) > a$; donc $\|u(x)\| \leq J_\gamma(\nu, \tilde{x}) \dfrac{M_0}{a}$; a étant arbitraire, $\|u(x)\| \leq M_0 \, J_\gamma(\nu, \tilde{x})$, pour tout $\gamma < \alpha_0$. On a donc trouvé une probabilité de Pietsch ν vérifiant (IX.3;1bis) avec $R = M_0$, $\gamma < \alpha_0$ arbitraire. Donc u est bien approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. En outre, d'après (IX.3;1bis), on aura, pour β quelconque, pour γ arbitraire $< \alpha_0$:

$$J_\beta(u(\lambda)) \leq M_0 \, J^*_{\gamma\beta}(\lambda) .$$

Corollaire (IX.3;24) (factorisation de Pietsch) : Pour que u soit approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, il fait et il suffit qu'il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u_1"'] & L^\infty(Z, \nu) \arrow[r, "j"] & L^0(Z, \nu) & \\ & S \arrow[ur, "j'"] \arrow[rr, "u_2"] & & G \end{tikzcd}$$

où le diagramme écrit est commutatif, v ayant les propriétés indiquées à (IX.3;1), $u = u_2 u_1$, S étant un sous-espace vectoriel fermé de $L^0(Z, \nu)$ et j' son injection canonique.

Evident.

(IX.3;25) Rapport entre applications 0-radonifiantes et p-radonifiantes pour $p \neq 0$.

Appelons complètement sommante une application p-sommante pour tout $p > -1$.

Théorème (IX.3;26) : Une application linéaire continue de E dans G est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, si et seulement si elle est complètement sommante.

Démonstration : Supposons u approximativement 0-radonifiante. Alors il existe une probabilité de Pietsch ν vérifiant (IX.3;1bis). Soit alors $p > 0$. On a, pour toute probabilité μ sur $\overline{\mathbb{R}}^+$, $J_\gamma(\mu) \leq \dfrac{\|\mu\|_p}{\gamma^{1/p}}$.

En effet, posons $J_\gamma(\mu) = a$. Alors, pour tout $a' < a$, $\mu(]a',+\infty]) > \gamma$ donc $\geq \gamma$; or $\|\mu\|_p \geq a'(\mu(]a',+\infty]))^{1/p} \geq a' \gamma^{1/p}$; ceci est vrai pour tout $a' < a$, donc $\|\mu\|_p \geq a\gamma^{1/p} = \gamma^{1/p} J_\gamma(\mu)$. Donc on aura

$$\|u(x)\| \leq \frac{R}{\gamma^{1/p}} \|v(x)\|_{L^p(Z,\nu)} ,$$

ce qui est l'inégalité de Pietsch (II.4;2). Donc u est p-sommante pour $p > 0$, avec $\pi_p(u) = \dfrac{R}{\gamma^{1/p}}$. Mais, si E' est r-quasi-normé, et si on prend $p < r$, on en déduit que u est complètement sommante par le théorème 3bis de l'exposé V.

Inversement, supposons u complètement sommante, et soit $-1 < p < 0$. On a une inégalité de Pietsch (II.4;2) avec $Z = \sigma(B',E)$, $v(x) = \tilde{x}\, \pi_p(u)$:

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int |<x,\xi>|^p \, d\nu(\xi)\right)^{1/p} = \pi_p(u) \| \, |\tilde{x}| \, . \, \nu \|_p \qquad (p < 0 \,!) .$$

Mais, pour $p < 0$, et toute probabilité μ sur $\overline{\mathbb{R}}^+$, $\|\mu\|_p \leq J_\gamma(\mu)(1-\gamma)^{1/p}$.
En effet, posons $J_\gamma(\mu) = a$; alors $\mu(]a,+\infty]) \leq \gamma$.
Soit $p = -\bar{p}$.

$$\left(\int \frac{1}{t^{\bar{p}}} \, d\mu(t)\right)^{1/\bar{p}} \geq \frac{1}{a} (\mu([0,a]))^{1/\bar{p}} \geq \frac{1}{a} (1-\gamma)^{1/\bar{p}} .$$

En inversant :

$$\|\mu\|_p \leq a(1-\gamma)^{1/p} = J_\gamma(\mu)(1-\gamma)^{1/p} \quad .$$

On aura donc, pour tout $p<0$:

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u)(1-\gamma)^{1/p} \, J_\gamma(|\tilde{x}| \cdot \nu) \quad .$$

On a donc une inégalité de Pietsch (IX.3;12bis), avec γ arbitraire, et alors $R = \pi_p(u)(1-\gamma)^{1/p}$, donc u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$.