B. MAUREY

Probabilités cylindriques stables sur les espaces L^p, $p \geq 2$ et applications du théorème de dualité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 5, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17 RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11 77
(633)

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

PROBABILITES CYLINDRIQUES STABLES SUR LES ESPACES L^p, $p \geq 2$ ET APPLICATIONS DU THEOREME DE DUALITE

par B. MAUREY

Exposé N° V   29 Novembre 1972

§ 1. FONCTIONS DE TYPE NEGATIF

Soient E un espace vectoriel et f une fonction sur E, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est de type négatif (ou que (-f) est conditionnellement de type positif) si pour toute suite finie $(c_1, \dots c_n)$ de nombres complexes et toute suite $(x_1, \dots x_n)$ dans E, on a :

$$\Sigma c_i = 0 \Rightarrow \Sigma c_i \bar{c}_j f(x_i - x_j) \leq 0$$

On vérifie par un calcul élémentaire que $t \to t^2$ est de type négatif sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, on démontre que $t \to |t|^p$ est de type négatif lorsque $0 < p \leq 2$.

Soient E un espace vectoriel, et f une fonction sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$. On démontre, et nous l'admettons (voir par exemple [3]) que f est de type négatif sur E si et seulement si $e^{-\alpha f}$ est de type positif pour tout $\alpha > 0$. Ainsi $t \to e^{-|t|^p}$ est de type positif pour $0 < p \leq 2$. Il existe donc une probabilité sur $\mathbb{R}$, que nous noterons γ_p, telle $\mathfrak{F}\gamma_p = e^{-|t|^p}$. On démontre que $d\gamma_p(t)$ équivaut à l'infini à $Ct^{-p-1}dt$, dans le cas $0 < p < 2$. On en déduit dans ce cas que γ_p a des moments d'ordre $q < p$. D'autre part lorsque $p = 2$, γ_2 est une probabilité gaussienne, donc admet des moments de tout ordre $q < +\infty$. En posant $p^* = p$ si $p < 2$, et $2^* = +\infty$, nous retiendrons en résumé :

$$\|\gamma_p\|_q < \infty \quad \text{si } q < p^*$$

§ 2. PROBABILITES CYLINDRIQUES STABLES

Soit (X,ν) un espace mesuré. D'après le paragraphe 1, la fonction F définie sur $L^p(X,\nu)$, $0 < p \leq 2$, par :

$$F(f) = \int |f(t)|^p d\nu(t) = \|f\|^p$$

est de type négatif comme intégrale des fonctions de type négatif $f \to |f(t)|^p$ (ces fonctions ne sont pas définies en fait, car f est une classe de fonctions. Mais pour montrer que F est de type négatif, il suffit de le montrer sur tout sous-espace de dimension finie E_o de $L^p(X,\nu)$, et on peut remplacer les éléments de E_o par de vraies fonctions sans modifier le resultat.)

Soient S un sous-espace fermé de $L^p(X,\nu)$, et F_S la restriction de F à S. D'après le paragraphe 1, e^{-F} est de type positif sur S, et continue puisque F est continue sur $L^p(X,\nu)$. Si nous connaissons un elcs E dont le dual soit S, il correspondra à e^{-F} d'après le théorème 1, exposé 3, une probabilité cylindrique λ_p sur E telle que $\mathfrak{F}\lambda_p = e^{-F}$.

Il est naturel de prendre en fait pour E le dual topologique de S, muni de la topologie $\sigma(S',S)$. Mais en général, dans le cas $0 < p < 1$, le dual topologique de S est réduit à $\{0\}$. Nous poserons la définition suivante, dont le seul intérêt sera de nous éviter des répétitions par la suite :

Soient G un espace quasi-normé, et $0 < p < +\infty$. Nous dirons que G est un espace $\mathcal{S}_p$ si :

a) Il existe un espace mesuré (X,ν) tel que G soit isométrique à un sous-espace de $L^p(X,\nu)$.

b) L'espace G est séparé par son dual.

c) Si $p \leq 1$, on suppose que G vérifie l'hypothèse d'approximation métrique.

Nous dirons qu'un elcs à dual quasi-normé E est un elcs à dual $\mathcal{S}_p$ si son dual E', muni de sa quasi-norme, est un espace $\mathcal{S}_p$.

Par exemple, l'espace l^p, $0 < p \leq 1$, est un espace $\mathcal{S}_p$ et l'espace l^∞ muni de la topologie $\sigma(l^\infty,l^p)$ est un elcs à dual $\mathcal{S}_p$.

<u>Théorème 1</u>. Soit E un elcs à dual $\mathcal{S}_p$, $0 < p \leq 2$. Il existe une probabilité cylindrique λ_p sur E, telle que :

$$\forall\, \xi \in E', \qquad \xi(\lambda_p) = \|\xi\|.\gamma_p$$ (où $\tau\mu$ désigne l'image d'une probabilité μ sur $\mathbb{R}$ par l'homothétie $t \to \tau t$).

En conséquence, λ_p est de type et cotype r pour $-1 < r < p^*$ et :

$$[illegible]$$

<u>Démonstration</u> : Identifions E' à un sous-espace d'un espace $L^p(X,\nu)$. Posons si $\xi \in E'$:

$$F(\xi) = \int |\xi(t)|^p d\nu(t) = \|\xi\|^p.$$

D'après ce que nous avons dit précédemment, e^{-F} est continue et de type positif sur E', donc il existe une probabilité cylindrique λ_p sur E, telle que $\mathfrak{F}\lambda_p = e^{-F}$ (théorème 1, exposé I). Soit $\xi \in E'$. On a :

$$\mathfrak{F}(\xi(\lambda_p))(t) = \mathfrak{F}(t\xi(\lambda_p))(1) = \mathfrak{F}\lambda_p(t\xi) = e^{-\|\xi\|^p |t|^p}$$

Mais puisque $\mathfrak{F}\gamma_p(t) = e^{-|t|^p}$, $\mathfrak{F}(\|\xi\|\gamma_p)(t) = e^{-\|\xi\|^p|t|^p}$, ce qui prouve que $\xi(\lambda_p) = \|\xi\|.\gamma_p$.

Soit r un nombre réel non nul. On a :

$$\left(\int |t|^r d(\xi(\lambda_p))(t)\right)^{1/r} = \left(\int (\|\xi\|\ |t|\ )^r\, d\gamma_p\,(t)\right)^{1/r} = \|\xi\|\ \|\gamma_p\|_r.$$

On en déduit immédiatement $({}^*\|\lambda_p\|_r)^{-1} = \|\lambda_p\|_r^* = \|\gamma_p\|_r$. Nous avons admis que $\|\gamma_p\|_r$ est fini pour $r < p^*$, donc λ_p est de type r pour $r < p^*$. D'autre part $e^{-|t|^p}$ décroit rapidement à l'infini, donc $\bar{\mathfrak{F}}\, e^{-|t|^p}$ (qui est la densité de γ_p) est continue, et en particulier bornée à l'origine. On en déduit lorsque $-1 < r < 0$:

$$\int |t|^r\ d\gamma_p(t) < +\infty, \quad \text{soit } \|\gamma_p\|_r > 0, \text{ donc } {}^*\|\lambda_p\|_r = (\|\gamma_p\|_r)^{-1}$$

est fini pour $r > -1$ ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 1</u> : Lorsque p = 2, E' est un espace de Hilbert et λ_2 n'est pas autre chose (à une normalisation près) que la probabilité cylindrique de Gauss définie dans l'exposé I.

<u>Remarque 2</u> : Soient E un elcs à dual $\mathcal{S}_p$, $0 < p \leq 2$, et $u : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ une fonction aléatoire linéaire représentant la probabilité cylindrique λ_p du théorème 1. Soit $q \in]0,p[$. Posons $u_q = \|\gamma_p\|_q^{-1}.u$. On a alors :

$$\forall\ \xi \in E' \quad \|u_q(\xi)\|_{L^q} = \|\gamma_p\|_q^{-1} \cdot \left(\int |t|^q \, d\,\xi\lambda_p(t)\right)^{1/q} = \|\xi\|$$

Par conséquent, u_q est une isométrie de E' dans $L^q(\Omega,\mu)$. Par conséquent, on obtient que $L^p(X,\nu)$ peut se plonger isométriquement dans un espace $L^q(\Omega,\mu)$ si $0 < q < p \leq 2$, et $p \geq 1$ (Sinon L^p n'a pas de dual topologique). En fait, cette restriction $p \geq 1$ est inutile, car on peut toujours construire λ_p sur $\sigma((L^p)^*, L^p)$, ce qui permet de construire $u : L^p(X,\nu) \to L^0(\Omega,\mu)$ même pour $p < 1$. Ces problèmes de plongement se trouvent traités dans un cas plus général dans [2].

§ 3. APPLICATIONS DU THEOREME DE DUALITE

Théorème 2 : Soient E un elcs à dual $\mathcal{S}_q$, F un espace $\mathcal{S}_p$, $0 < p,q \leq 2$ et u un opérateur linéaire continu de E dans F, λ_q et λ_p respectivement les probabilités cylindriques sur E et $\sigma(F',F)$ données par le théorème 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $u(\lambda_q)$ est de Radon sur $\sigma(F'',F')$
b) ${}^t u$ est t-sommante pour tout $t > -1$.
c) ${}^t u$ est s-sommante pour un $s < p^*$
d) ${}^t u(\lambda_p)$ est de Radon sur $\sigma(E^*,E)$ (exposé II, (1,9).)
e) u est t-sommante pour tout $t > -1$.
f) u est r-sommante pour un $r < q^*$

Démonstration : Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Il suffit de montrer que ${}^t u$ est t-sommante lorsque $-1 < t < 0$. Or si $u(\lambda_q)$ est de Radon, elle est alors automatiquement d'ordre t. Puisque λ_q est de cotype t d'après le théorème 1, ${}^t u$ est t-sommante d'après le théorème de dualité (exposé IV, théorème 4). Cela prouve a) $\Rightarrow$ b), et b) $\Rightarrow$ c) est trivial. Montrons que c) $\Rightarrow$ d). Si p est inférieur ou égal à 1, le couple (F',F) est supposé vérifier la propriété d'approximation métrique d'après notre définition des espaces $\mathcal{S}_p$, donc ${}^t u$ est s-radonifiante de $\sigma(F',F)$ dans $\sigma(E^*,E)$, d'où le résultat puisque λ_p est de type s.

Si $p > 1$, ${}^t u$ est a fortiori $\sup(1,s)$-sommante, λ_p est encore de type $\sup(1,s)$, et l'hypothèse d'approximation est inutile dans ce cas (proposition (III,3,1), exposé III).

Finalement d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ f) $\Rightarrow$ a) se démontre de la même façon, et la démonstration est achevée.

Corollaire 1 [6] : Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $u \in L(H_1, H_2)$ et γ la probabilité cylindrique de Gauss sur H_1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $u(\gamma)$ est de Radon

b) u est p-sommante pour un $p < \infty$

c) u est p-sommante pour tout $p > -1$

d) u est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Démonstration : L'équivalence de a), b) et c) résulte du théorème 2. Pour conclure il suffit de montrer que u Hilbert-Schmidt équivaut à u 2-sommante. Si u est 2-sommante, et si (e_i) est une base orthonormée (non nécessairement dénombrable) de H_1, toutes les sous-familles dénombrables (e_{i_n}) de (e_i) vérifient $\|(e_{i_n})\|_2^* \leq 1$, donc $(\sum_n \|u(e_{i_n})\|^2)^{1/2} \leq \pi_2(u)$, donc aussi $(\sum_i \|u(e_i)\|^2)^{1/2} \leq \pi_2(u)$ et u est Hilbert-Schmidt. Inversement, on sait qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt u admet la factorisation :

$$H_1 \longrightarrow l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^2 \longrightarrow H_2$$

où α est un opérateur diagonal défini par une suite $\alpha \in l^2$, donc u est 2-sommant (exposé II, proposition (5.1)). Ceci achève la démonstration.

Corollaire 2 [4] : Soient $1 \leq p \leq q \leq 2$, $p < q^*$, et soit E un quotient d'un espace $L^{q'}(X,\nu)$. On a pour tout espace quasi-normé F :

$$-1 < t \leq p \Rightarrow \prod_p(E,F) = \prod_t(E,F)$$

Démonstration : Nous supposons $1 \leq p < q^*$, donc $q > 1$. Il est alors clair que E est un elcs à dual $\mathcal{S}_q$. Nous pouvons aussi supposer $p > 1$. Soit $u \in \prod_p(E,F)$. D'après l'exposé II, théorème (4.7), l'opérateur u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{\bar{u}} S \longrightarrow F$$

où S est un sous-espace fermé d'un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $p > 1$, donc un espace $\mathcal{S}_p$, et où $\bar{u} \in \prod_p(E,S)$. D'après l'implication f) ⇒ e) du théorème 2, $\bar{u} \in \prod_t(E,S)$, donc $u \in \prod_t(E,F)$, ce qui achève la démonstration.

Si nous supposons $q \leq 1$ dans le corollaire 2, la même démonstration n'est plus possible, car le sous-espace S de $L^p(\Omega,\mu)$, $p < q$, n'est pas en général séparé par son dual. Néanmoins le résultat reste vrai. Pour le voir, nous appliquerons la même méthode, mais en dimension finie. Nous devrons alors travailler de façon plus précise, en donnant des majorations incluant des constantes indépendantes de la dimension.

Soit n un entier. Nous désignerons par $C(n)$ l'espace $C(K)$ lorsque K est un ensemble fini de n points. Le dual de $C(n)$ est l'espace des mesures sur un ensemble à n points : c'est un espace $\mathcal{S}_1$ puisque si $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i$, $\|\mu\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

<u>Proposition 1</u> : Soient t, p deux nombres réels tels que $-1 < t < p < 1$. Il existe une constante $C(t,p)$ telle que pour tout entier n, tout espace quasi-normé F et tout opérateur linéaire u de $C(n)$ dans F, on ait :

$$\pi_t(u) \leq C(t,p)\ \pi_p(u)$$

<u>Démonstration</u> : Comme précédemment nous écrirons la factorisation de Pietsch pour u :

$$C(n) \xrightarrow{\bar{u}} S \xrightarrow{v} F$$

où $u = v \circ \bar{u}$, S est un sous-espace fermé d'un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $\|v\| \leq 1$ et $\pi_p(\bar{u}) = \pi_p(u)$. On peut supposer $\bar{u}$ surjective, donc on peut prendre S de dimension finie. Il est alors bien clair que les problèmes d'approximation et de séparation par le dual ne se posent plus pour étudier $\bar{u}$ et ${}^t\bar{u}$! L'espace $C(n)$ a un dual $\mathcal{S}_1$, et S est un espace $\mathcal{S}_p$, donc il existe sur $C(n)$ et S' respectivement les probabilités cylindriques λ_1 et λ_p du théorème 1.

Pour faire la démonstration, nous appliquerons deux fois chacune des inégalités suivantes :

le théorème de dualité : $\pi_r(w) \leq {}^*\|\lambda\|_r \; \|{}^t w(\lambda)\|_r$

L'inégalité des applications r-radonifiantes : $\|w(\mu)\|_r \leq \pi_r(w)\|\mu\|_r^*$ (pour $r > 0$!) et la croissance de l'ordre : $r_1 \leq r_2 \Rightarrow \|\mu\|_{r_1} \leq \|\mu\|_{r_2}$.

Nous aurons alors en introduisant un réel $s > 0$ tel que $-1 < t < s < p$:

$$\pi_t(u) \leq \pi_t(\bar{u}) \leq {}^*\|\lambda_p\|_t \; \|{}^t\bar{u}(\lambda_p)\|_t \leq {}^*\|\lambda_p\|_t \; \|{}^t\bar{u}(\lambda_p)\|_s$$

$$\leq {}^*\|\lambda_p\|_t \; \|\lambda_p\|_s^* \; \pi_s({}^t\bar{u}) \leq {}^*\|\lambda_p\|_t \; \|\lambda_p\|_s^* \; {}^*\|\lambda_1\|_s \; \|\bar{u}(\lambda_1)\|_s$$

$$\leq {}^*\|\lambda_p\|_t \; \|\lambda_p\|_s^* \; {}^*\|\lambda_1\|_s \; \|\bar{u}(\lambda_1)\|_p \leq {}^*\|\lambda_p\|_t \; \|\lambda_p\|_s^* \; {}^*\|\lambda_1\|_s \; \|\lambda_1\|_p^* \pi_p(\bar{u})$$

$$= \|\gamma_p\|_t^{-1} \cdot \|\gamma_p\|_s \; \|\gamma_1\|_s^{-1} \; \|\gamma_1\|_p \; \pi_p(u)$$

ce qui démontre la proposition avec $C(t,p) = \|\gamma_p\|_t^{-1} \; \|\gamma_p\|_s \; \|\gamma_1\|_s^{-1}\|\gamma_1\|_p$.

<u>Remarque</u> : Ce qui nécessite l'introduction de $s > 0$ dans la démonstration précédente, c'est le fait qu'il n'y a pas de théorie des applications t-radonifiantes, pour $t < 0$. Si t est > 0, on prend simplement $s = t$, et $C(t,p) = \|\gamma_1\|_t^{-1} \; \|\gamma_1\|_p$. En fait, on peut prouver que cela reste vrai aussi pour $-1 < t \leq 0$ (cf [5]).

<u>Lemme 1</u> : Soient E un elcs à dual quasi-normé, F un espace quasi-normé, (u_i) un filtre sur $L(E,F)$ convergeant simplement vers $u \in L(E,F)$, et tel que pour tout i, $\pi_p(u_i) \leq C$, $-1 < p \leq \infty$. On a alors $\pi_p(u) \leq C$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de remarquer que si $(x_1,\ldots,x_n) \in E$:

$$\left(\sum_k \|u(x_k)\|^p\right)^{1/p} = \lim_i \left(\sum_k \|u_i(x_k)\|^p\right)^{1/p}$$

(même pour $p < 0$!)

<u>Théorème 3</u> ("Conjecture de Pietsch", [1], [5]) : Soient t et p deux nombres réels tels que $-1 < t < p < 1$. Pour tout espace de Banach E, tout espace quasi-normé F et tout opérateur $u \in \prod_p(E,F)$, on a :

$\pi_t(u) \leq C(t,p) \; \pi_p(u)$ ($C(t,p)$ étant la même que dans la proposition 1)

En particulier : $\prod_p(E,F) = \prod_t(E,F)$

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'après le théorème de Pietsch de démontrer le résultat pour l'opérateur p-sommant " de base" :

$j : C(K) \to L^p(K,\mu)$, où K est un espace compact et μ une probabilité sur K.

Soit $\rho = (\mathcal{U}_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement ouvert de K. Nous dirons que ρ est strict si :

$$\forall\, i,\quad \mathcal{U}_i - \bigcup_{j\neq i} \mathcal{U}_j \quad \text{est non vide.}$$

Si ρ est strict on peut choisir pour chaque i un point $x_i \in \mathcal{U}_i - \bigcup_{j\neq i} \mathcal{U}_j$. Soit alors (φ_i) une partition de l'unité subordonnée à ρ, et définissons un opérateur π_ρ de $C(K)$ dans lui-même par :

$$\pi_\rho(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \varphi_i$$

Soit $E_\rho = \pi_\rho(C(K))$. C'est l'espace des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i$. On voit que E_ρ est isométrique à $C(n)$. En effet, puisque $\Sigma\varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \varphi_i\right\| \leq \sup|\alpha_i|$$

Mais $(\Sigma\alpha_i\varphi_i)\,(x_j) = \alpha_j$, donc $\|\Sigma\alpha_i\varphi_i\| = \sup\,|\alpha_i|$

L'opérateur $j\circ\pi_\rho$ de $C(K)$ dans $L^p(K,\mu)$ admet la factorisation :

$$C(K) \xrightarrow{\pi_\rho} E_\rho \simeq C(n) \xrightarrow{i_\rho} C(K) \xrightarrow{j} L^p(K,\mu)$$

D'après la proposition 1 :

$$\pi_t(j\circ\pi_\rho) \leq \pi_t(j\circ i_\rho) \leq C(t,p)\ \pi_p(j\circ i_\rho) \leq C(t,p)\ \pi_p(j)$$

Mais il est classique qu'il existe un filtre d'opérateurs de la forme π_ρ, avec ρ strict, qui tend simplement vers l'identité de $C(K)$. Alors j est limite simple des $j\circ\pi_\rho$, qui vérifient $\pi_t(j\circ\pi_\rho) \le C(t,p)\,\pi_p(j)$: on conclut par le lemme 1.

Nous allons maintenant indiquer comment on peut généraliser le résultat précédent lorsque E' n'est plus normé, mais r-normé, $0 < r \le 1$. Nous désignerons par $C_r(K)$ l'elcs à dual quasi-normé défini de la façon suivante :

On considère l'ensemble B_r des éléments de $M(K)$ de la forme $\mu = \Sigma\,\alpha_i\,\delta x_i$, avec $x_i \in K$ et $\Sigma\,|\alpha_i|^r \le 1$. On désigne par $M_r(K)$ le sous-espace de $M(K)$ engendré par $\overline{B}_r$ (adhérence pour la topologie vague). C'est un espace r-normé par la jauge de $\overline{B}_r$. L'espace $C_r(K)$ est alors l'espace $C(K)$ muni de la topologie $\sigma(C(K),\, M_r(K))$.

Nous noterons $C_r(n)$ l'espace $C_r(K)$ lorsque K est un ensemble à n points. Son dual est alors r-normé par : $\|\Sigma\lambda_i\delta_i\| = (\Sigma|\lambda_i|^r)^{1/r}$, c'est donc un espace ℓ_r.

<u>Proposition 1bis</u> : Soient t, p deux nombres réels tels que $-1 < t < p < r$. Il existe une constante $C_r(t,p)$ telle que pour tout entier n, tout espace quasi-normé F et tout opérateur linéaire u de $C_r(n)$ dans F, on ait :

$$\pi_t(u) \le C_r(t,p)\;\pi_p(u)$$

<u>Démonstration</u> : absolument identique à celle de la proposition 1.

<u>Théorème 3bis</u> : Soient t et p deux réels tels que $-1 < t < p < r \le 1$. Pour tout elcs E à dual r-normé, tout espace quasi-normé F et tout opérateur $u \in \prod_p(E,F)$, on a :

$$\pi_t(u) \le C_r(t,p)\;\pi_p(u)$$

<u>Démonstration</u> : Soit E un elcs à dual r-normé. On peut, sans modifier les applications sommantes, remplacer la quasi-boule unité de E' par son adhérence dans $\sigma(E^*,E)$, ce qui revient à supposer la quasi-boule unité de E' fermée pour $\sigma(E',E)$.

Soient F un espace quasi-normé et $u \in \prod_p(E,F)$. D'après l'exposé II, théorème (4.1) u admet la factorisation :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr] & C(K) \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{U}"] & L^p(K,\mu) \\ & S \arrow[r, "v"'] & F \end{tikzcd}$$

avec $\|v\| \le 1$, et où ${}^t u_1$ envoie les mesures de Dirac de K dans $\pi_p(u).B$ (B : quasi-boule unité de E'). Comme B est r-convexe, on a aussi ${}^t u_1(B_r) \subset \pi_p(u).B$, et aussi ${}^t u_1(\bar{B}_r) \subset \pi_p(u)B$ puisque B est fermée pour $\sigma(E',E)$. Finalement u_1 est un morphisme de E dans $C_r(K)$ avec $\|{}^t u_1\| \le \pi_p(u)$. Il suffit donc de démontrer le résultat pour l'opérateur :

$$j_r : C_r(K) \to L^p(K,\mu)$$

Mais en fait, d'après la démonstration du théorème (4.1) de l'exposé II, on peut supposer que K est un compact stonien (car on peut prendre le spectre d'une algèbre $L^\infty(X,\nu)$.)

Soit π_ρ l'opérateur introduit dans la démonstration du théorème 3. Puisque K est stonien, on peut supposer que les (φ_i) ne prennent que les valeurs 0 ou 1. (Car étant donné un recouvrement ouvert fini $(\mathcal{U}_i)$, il existe un recouvrement ouvert fini plus fin $(\mathcal{V}_j)$ tel que chaque $\mathcal{V}_j$ soit ouvert et fermé, et les $\mathcal{V}_j$ deux à deux disjoints.) Considérons l'opérateur ${}^t\pi_\rho$. On a :

$$<{}^t\pi_\rho(\nu), f> = <\nu, \pi_\rho(f)> = \Sigma\, \nu(\varphi_i) f(x_i), \text{ donc : } {}^t\pi_\rho(\nu) = \Sigma\, \nu(\varphi_i)\, \delta_{x_i}$$

Montrons que π_ρ est un morphisme de $C_r(K)$ dans lui-même, avec $\|{}^t\pi_\rho\| \le 1$. Soit $\nu = \sum_j \lambda_j\, \delta_{y_j}$, $\sum_j |\lambda_j|^r \le 1$.

$${}^t\pi_\rho(\nu) = \sum_i \{ \sum_j \lambda_j\, \varphi_i(y_j) \}\, \delta_{x_i} \text{ , donc :}$$

$$\|{}^t\pi_\rho(\nu)\|^r \le \sum_i \Big| \sum_j \lambda_j\, \varphi_i(y_j) \Big|^r \le \sum_{i,j} |\lambda_j|^r\, |\varphi_i(y_j)|^r$$

$$= \sum_j |\lambda_j|^r \sum_i \varphi_i(y_j) \le 1 \qquad (\text{car } \varphi_i = 0 \text{ ou } 1.)$$

L'opérateur $j_r \circ \pi_\rho$ admet alors la factorisation :

$$C_r(K) \xrightarrow{\pi_\rho} E_\rho \simeq C_r(n) \xrightarrow{i_\rho} C_r(K) \xrightarrow{j_r} L^p(K,\mu)$$

où π_ρ et i_ρ sont des morphismes, $\|{}^t\pi_\rho\| \leq 1$, $\|{}^t i_\rho\| \leq 1$.

On achève comme dans le théorème 3 en appliquant la proposition 1bis et le lemme 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Chevet : 2 journées p-radonifiantes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972.

[2] D. Dacunha-Castelle et J. Bretagnolle : Applications de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série t.2 (1969) p. 437-480.

[3] C. S. Herz : Analyse harmonique à plusieurs variables, Publications du Séminaire de Math. d'Orsay 1964-1965.

[4] S. Kwapien : On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators. Stud. Math. 38 (1970) p. 193-201.

[5] B. Maurey : Démonstration d'une conjecture de Pietsch et applications (Preprint, Ecole Polytechnique, Juin 1972).

[6] A. Pelczynski : A characterisation of Hilbert-Schmidt operators Stud. Math. 28 (1967) p. 355-360.

[7] Séminaire L. Schwartz : Applications radonifiantes, 1969-1970.
