

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Applications p -sommantes et p -radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 3, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A3_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS. CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

APPLICATIONS p -SOMMANTES ET p -RADONIFIANTES

par L. SCHWARTZ

Exposé N° III

15 Novembre 1972

Dans tout cet exposé, on supposera $p > 0$.

§ 1. LE THEOREME FONDAMENTAL

Théorème (III.1.1) : Soient E un espace à dual quasi-normé, G un espace bitopologique à quasi-boules compactes, u une application linéaire de E dans G , faiblement continue (i.e. pour $\sigma(E, E')$ et $\sigma(G, G')$). Alors u est p -sommante si et seulement si elle est approximativement p -radonifiante, et, pour toute probabilité cylindrique λ de type p -approximable, $\|u(\lambda)\|_p \leq \pi_p(u) \|\lambda\|_p^{*a}$.

Démonstration :

1) Supposons u approximativement p -radonifiante. Soit $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie d'éléments de E , scalairement l^p . Soit $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arbitraire de nombres > 0 , de somme 1. Appelons λ la probabilité de Radon sur $\sigma(E, E')$: $\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \delta_{(c_n^{-1/p} e_n)}$.

On a $u(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \delta_{(c_n^{-1/p} u(e_n))}$, probabilité de Radon sur G . Alors

$$\|e\|_p^* = \left(\sup_{\|\xi\| \leq 1} \sum_n |\langle e_n, \xi \rangle|^p \right)^{1/p} = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum_n c_n |\langle c_n^{-1/p} e_n, \xi \rangle|^p \right)^{1/p} = \|\lambda\|_p^*.$$

Mais

$$\lambda_N = \sum_{0 \leq n \leq N} c_n \delta_{(c_n^{-1/p} e_n)} + \left(\sum_{n \geq N+1} c_n \right) \delta_{(0)}$$

converge étroitement vers λ

(pour la topologie étroite associée à $\sigma(E, E')$), donc a fortiori cylindriquement, et $\|\lambda_N\|_p^* \leq \|e\|_p^*$, donc λ est de type p -approximable, et $\|\lambda\|_p^{*a} = \|e\|_p^*$. Ensuite

$$\|u(\lambda)\|_p = \left(\int_G \|y\|^p d(u(\lambda))(y) \right)^{1/p} = \left(\int_E \|u(x)\|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \|c_n^{-1/p} u(e_n)\|^p \right)^{1/p} = \|u(e)\|_p.$$

Comme λ est supposé approximativement p -radonifiante, de $\|e\|_p^* < +\infty$ on déduit $\|\lambda\|_p^{*a} < +\infty$, donc $\|u(\lambda)\|_p < +\infty$ donc $\|u(e)\|_p < +\infty$, $u(e)$ est l^p . Donc u transforme toute suite scalairement l^p en une suite l^p ; on déduit de la proposition (II,3 ; 4) que u est p -sommante.

2) Supposons u p -sommante. Soit λ une probabilité cylindrique de type p -approximable. Soit (λ_j) un ordonné filtrant de probabilités de Radon à support fini, convergeant cylindriquement vers λ , avec $\|\lambda\|_p^* \leq \|\lambda_j\|_p^{*a} + \varepsilon$. Puisque u est faiblement continue (ce qui était d'ailleurs nécessaire pour définir l'image d'une probabilité cylindrique), $u(\lambda_j)$ converge

cylindriquement vers $u(\lambda)$. Mais, si $\lambda_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{j,n} \delta(e_{j,n})$, on peut aussi

l'écrire $\lambda_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{j,n} \delta_{\frac{1}{c_{j,n}^p}}(c_{j,n}^p e_{j,n})$, et alors on a comme dans la partie

1) de la démonstration, avec $e_j = (e_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$: $\|\lambda_j\|_p^* = \|e_j\|_p^*$, $\|u(\lambda_j)\|_p = \|u(e_j)\|_p$.

Puisque u est p -sommante, on aura donc :

$$\|u(\lambda_j)\|_p = \|u(e_j)\|_p \leq \pi_p(u) \|e_j\|_p^* \leq \pi_p(u) \|\lambda_j\|_p^* \leq \pi_p(u) (\|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon).$$

Or on a vu à la proposition (I.4) que l'ensemble des probabilités de Radon μ sur G , telles que $\|\mu\|_p \leq M$, est cylindriquement compact donc fermé, si les quasi-boules de G sont compactes. Donc $u(\lambda)$ est aussi de Radon, avec

$$\|u(\lambda)\|_p \leq \pi_p(u) (\|\lambda\|_p^{*a} + \varepsilon) \text{ donc } \leq \pi_p(u) \|\lambda\|_p^{*a}, \quad \text{cqfd.}$$

Corollaire (III.1.2) : Si u est faiblement continue, et si $G = \sigma(H', H)$, H Banach (voir exemple (II,1,5)), u est p -sommante si et seulement si elle est approximativement p -radonifiante.

Corollaire (III.1.3) : Si u est faiblement continue, et si G est un quasi-Banach séparé par son dual, u est p -sommante si et seulement si elle est approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$ (voir exemple (II,1,8)).

§ 2. PASSAGE DE G'' A G

Dans tout ce paragraphe, p étant toujours > 0 , on supposera que G est un quasi-Banach séparé par son dual (exemple (II,1,5)). On cherche dans quel cas, dans le corollaire (III,1,3), on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G lui-même.

Lemme (III,2,1) (Phillips) : Soit G un Banach. Toute probabilité de Radon sur $\sigma(G, G')$ provient, par l'injection $G \rightarrow \sigma(G, G')$, d'une probabilité de Radon (unique) sur G . Admis. ♦

♦ Voir Schwartz [2], proposition (XI,2,3).

Proposition (III.2,2) : Supposons réalisées les conditions du corollaire (III.1,3) et u p -sommante. Soit w une application linéaire de G dans un quasi-Banach G_1 (séparé par son dual) compacte, c.à.d. envoyant les quasi-boules de G dans des parties relativement compactes de G_1 , ou faiblement compacte si G_1 est un Banach. Alors wu est approximativement p -radonifiante de E dans G_1 lui-même.

Démonstration : Soit λ une probabilité cylindrique de type p -approximable sur E . Alors $u(\lambda)$ est une probabilité de Radon d'ordre p sur $\sigma(G'', G')$ donc portée par $\mathcal{C} = \bigcup_{R>0} RB''$, B'' boule unité de $\sigma(G'', G')$.

D'abord w est continue donc faiblement continue de G dans G_1 ; autrement dit elle est continue de $\sigma(G, G')$ dans $\sigma(G_1, G'_1)$; elle se prolonge, par continuité ou bitransposition, en une application linéaire continue ${}^{tt}w$ de $\sigma(G_1^*, G'_1)$, donc de $\sigma(G'', G')$, dans $\sigma(G_1^*, G'_1)$. Nous supposons ensuite w faiblement compacte. Alors ${}^{tt}w$ transforme les quasi-boules de l'espace bitopologique $\sigma(G'', G')$ en parties relativement compactes de $\sigma(G_1, G'_1)$, donc ${}^{tt}w(u(\lambda))$ est de Radon sur $\sigma(G_1, G'_1)$. Ou encore, $w(u(\lambda))$ est une probabilité cylindrique sur G_1 , dont l'image dans $\sigma(G_1, G'_1)$ est de Radon. D'après le lemme (III,2,1) de Phillips, si G_1 est un Banach, il existe une probabilité de Radon ν sur G_1 dont l'image dans $\sigma(G, G'_1)$ est la même que celle de $wu(\lambda)$. Mais les probabilités cylindriques d'un espace ne dépendent que de sa topologie affaiblie, donc $wu(\lambda)$ et ν , ayant même image dans $\sigma(G_1, G'_1)$, coïncident, et $wu(\lambda)$ est de Radon sur G_1 . Si maintenant G_1 n'est plus un Banach, mais si w est compacte, $u(\lambda)$ est portée par une réunion dénombrable de quasi-boules de $\sigma(G'', G')$ donc $wu(\lambda)$ par une réunion dénombrable de compacts de G_1 , donc ici encore il existe une probabilité de Radon ν sur G_1 telle que $wu(\lambda)$ et ν aient même image dans $\sigma(G_1, G'_1)$, donc $wu(\lambda) = \nu$ est de Radon sur G_1 . Dans tous les cas $wu(\lambda)$ est d'ordre p .

Corollaire (III,2,3) : Dans les conditions du corollaire (III,1,3), si G est un Banach réflexif, on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G ; il en est de même si G est un quasi-Banach, $p = +\infty$, E un Banach réflexif.

Démonstration : Le premier cas résulte de ce que l'identité $G \rightarrow G$ est faiblement compacte, le deuxième de ce que l'identité $E \rightarrow E$ est continue donc ∞ -sommante, et faiblement compacte, donc approximativement ∞ -radonifiante

Proposition (III,2,4) : Dans les conditions du corollaire (III,1,3), pour E Banach, si $1 < p < +\infty$, on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G.

Démonstration : Reprenons la factorisation de Pietsch :

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{v} & L^\infty(Z, \nu) & \xrightarrow{j} & L^p(Z, \nu) \\
 & \searrow u_1 & & \nearrow j' & \\
 & & S & \xrightarrow{u_2} & G
 \end{array}$$

Puisque E est un Banach, v est continue, donc aussi j v donc u_1 . Mais S, sous-espace vectoriel fermé de L^p , est réflexif; et j, donc j v donc u_1 est p-sommante.

Le corollaire (III,2,3) prouve que u_1 est approximativement p-radonifiante de E dans S ; u_2 étant linéaire continue de S dans G, $u = u_2 u_1$ est approximativement p-radonifiante de E dans G.

Définition (III,2,5) : Soient E, G, des espaces vectoriels topologiques. On appelle opérateur p-nucléaire (sous-entendu à gauche) de E dans G une application linéaire continue admettant une factorisation

$$E \xrightarrow{v} l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^p \xrightarrow{w} G,$$

où v et w sont continues, et où α est la multiplication

$$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n t_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

par une suite $\alpha \in l^p$ ($\alpha \in c^0$ si $p = +\infty$).

Si $p = 1$, on retrouve les opérateurs nucléaires de Grothendieck.

Proposition (III,2,6) : Tout opérateur p-nucléaire d'un Banach E dans un quasi-Banach G est p-radonifiant ♦.

♦ Si $p < 1$, nous verrons même ultérieurement un résultat beaucoup plus fort : α est 0-radonifiant, donc q-radonifiant pour tout $q \geq 0$.

Démonstration : Soit λ une probabilité cylindrique de type p sur E . Comme v est un morphisme d'espaces à duals quasi-normés, $v(\lambda)$ est cylindrique de type p sur l^∞ , donc de type p -approximable parce que le couple $(l^\infty, (l^\infty)')$ a la propriété d'approximation métrique de (I,4). Alors $\alpha \in l^p$ peut s'écrire comme produit $\alpha = \gamma\beta$, $\alpha_n = \gamma_n \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\beta \in l^p$ et où γ tend vers 0. Alors β est p -sommante de l^∞ dans l^p (voir (II,5,1)), donc approximativement p -radonifiante de l^∞ dans $\sigma((l^p)'' , (l^p)')$ par le corollaire (III,1,3); comme γ est compacte de l^p dans l^p , la proposition (III,2,2) montre que $\gamma\beta = \alpha$ est approximativement p -radonifiante de l^∞ dans l^p ; donc $\alpha(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur l^p ; et alors son image dans G est de Radon d'ordre p aussi.

Proposition (III,2,7) : Soit $p = 1$. Dans les conditions du corollaire (III,1,3) on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G , si E est un Banach réflexif ou de dual fort séparable ♦. Plus généralement, si E_1 et E sont des Banach, et si γ est une application linéaire faiblement compacte de E_1 dans E , γ est 1-radonifiante de E_1 dans G .

Démonstration : Partons de la factorisation de Pietsch. L'opérateur jv est intégral, au sens de Grothendieck, puisqu'il se factorise par l'injection canonique $L^\infty \rightarrow L^1$. Alors, d'après un théorème de Grothendieck ♦, si E est de dual fort séparable ou si γ est faiblement compacte, l'application $ijv\gamma$ de E_1 dans $(L^1(Z, \nu))''$, où i est l'injection de L^1 dans son dual fort $(L^1)''$, est nucléaire; donc, par (III,2.6) elle est 1-radonifiante. Si donc λ_1 est une probabilité cylindrique de type 1 sur E_1 , $ijv\gamma$ est de Radon d'ordre 1 sur $(L^1)''$. Mais $ijv\gamma = ij'u_1\gamma$, où j' est l'injection de S dans L^1 .

Introduisons la notion suivante. Soient U un espace vectoriel séparé par son dual, F un sous-ensemble de U . On dit qu'une probabilité cylindrique μ sur U est scalairement portée par F , si, pour tout $\xi \in U'$, $\xi(\mu)$ est portée par $\overline{\xi(F)}$. Si alors w est une application linéaire faiblement continue de W dans U , et si ν est une probabilité cylindrique sur W , $w(\nu)$ est toujours scalairement portée par $w(W)$. Si en effet $\xi \in U'$, ou bien $\xi w(W) = \mathbb{R}$, et c'est fini, ou bien $\xi w(W) = 0$, alors ξw transite

♦ Exemple : $E = c^0$, $E' = l^1$.

♦♦ Voir Grothendieck, Thèse (Memoirs of the Amer. Math. Soc., n°16, 1955) 1ère partie, §4, n°3, corollaire 2 et corollaire 3, page 134.

par $W \rightarrow 0$, donc $\xi_w(v)$ est une image de δ donc est δ , portée par $\overline{\xi_w(W)}$. Donc $ij' u_1 \gamma(\lambda_1)$ est une probabilité de Radon sur $(L^1)''$, scalairement portée par $ij' u_1(E)$ donc par $ij'(S)$. Mais $ij'(S)$ est fermé dans $(L^1)''$, parce que L^1 est fermé dans $(L^1)'$ et S fermé dans L^1 , et que i et j' sont des isométries. D'autre part, si v est une probabilité de Radon sur U localement convexe scalairement portée par un sous-ensemble fermé convexe F de U , elle est portée par F . En effet, soit $a \notin F$; il existe un voisinage ouvert convexe Q de a qui ne rencontre pas F , donc une forme linéaire continue ξ sur U qui sépare Q et F ; alors $\xi(v)$ doit être portée par $\overline{\xi(F)}$ qui ne rencontre pas $\xi(Q)$, donc $v(Q) \leq v(\xi^{-1}(\xi(Q))) = (\xi(v))(\xi(Q)) = 0$, donc le support de v ne contient pas a , et v est bien portée par F . Donc ici $ij' u_1 \gamma(\lambda_1)$ est de Radon sur $(L^1)''$, portée par S . Donc il existe une probabilité de Radon ρ sur S , dont l'image par ij' est $ij' u_1 \gamma(\lambda_1)$. Donc ρ et $u_1 \gamma(\lambda_1)$ sont des probabilités cylindriques sur S , ρ de Radon, dont les images par ij' dans $(L^1)''$ coïncident. Cela veut dire qu'elles ont même image par toute forme linéaire continue sur S qui transite par ij' ; c.à.d. par toute forme linéaire continue sur S , d'après Hahn-Banach, donc $u_1 \gamma(\lambda_1) = \rho$ est de Radon sur S , et d'ordre 1 trivialement puisque $L^\infty \rightarrow L^1$ était 1-sommante. Donc $u \gamma(\lambda_1) = u_2 u_1 \gamma(\lambda_1)$ est de Radon d'ordre 1 sur G , cgfd.

Proposition (III,2,8) : Si $p < +\infty$, et si $G = H'$ est un dual fort séparable d'un Banach H^\bullet , si les conditions du corollaire (III,1,3) sont réalisées, on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G lui-même.

Démonstration : On sait déjà que, si λ est une probabilité cylindrique de type p -approximable sur E , $u(\lambda)$ est une probabilité cylindrique sur H' dont l'image par $H' \xrightarrow{\sigma} (H', H)$ est de Radon d'ordre p (corollaire (III,1,2)). Mais H' est un Banach séparable, donc polonais; donc il existe une probabilité de Radon v sur H telle que σv soit $\sigma u(\lambda)$. Puisque v est de Radon sur $G = H$, son image de Fourier \hat{v} sur $G' = H''$ est continue, pour la topologie G'_c de la convergence uniforme sur les compacts de G [en effet, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de G qui porte v à ε près; alors \hat{v} diffère d'au plus ε de $\xi \mapsto \int_K e^{-2i\pi \langle x, \xi \rangle} dv(x)$, d'où le résultat]. D'autre part, λ étant de type p donc a fortiori de type 0, $\hat{\lambda}$ est continue sur E' muni de sa norme $\| \cdot \|$ (voir lemme de la proposition

♦ Exemple $G = L^1$ $H = L^\infty$.

2 de l'exposé 1); mais u , p -sommante pour $p < +\infty$, est a fortiori q -sommante pour un q fini > 1 , donc transite par un $S_q \subset L^q$ dont la boule unité est faiblement compacte, donc l'image par u de la quasi-boule unité de E est contenue dans un faiblement compact convexe de H' (i.e. dans un convexe compact de $\sigma(H', H'')$). Alors $(u(\lambda))^\wedge$, image réciproque de $\hat{\lambda}$ par ${}^t u$ ($(u(\lambda))^\wedge = \hat{\lambda} \circ {}^t u$) est continue sur H'' , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties $\sigma(H', H'')$ -compactes convexes, c.à.d. pour $\tau(H'', H')$, topologie de Mackey. Donc $(u(\lambda))^\wedge$ et \hat{v} sont toutes deux continues sur $\tau(H'', H')$. Or les images de $u(\lambda)$ et v dans $\sigma(H', H)$ coïncident, ce qui veut dire que $(u(\lambda))^\wedge$ et \hat{v} coïncident sur H . Mais H est dense dans $\sigma(H'', H')$ donc dans $\tau(H'', H')$, donc $(u(\lambda))^\wedge = \hat{v}$ et $u(\lambda) = v$, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre p sur $G = H'$.

§ 3. SUPPRESSION DE LA CONDITION D'APPROXIMATION

Si E est un Banach, et si (E, E') a la propriété d'approximation métrique, on a vu au paragraphe 4 de l'exposé I que toute probabilité cylindrique de type p est de type p -approximable, avec $\|\lambda\|_p^* = \|\lambda\|_p^{*a}$, donc, dans le corollaire (III,1,3), on peut supprimer "approximativement". Voici un autre cas :

Proposition (III,3,1) : Supposons E Banach. Si $p \geq 1$, dans les conditions du corollaire (III,1.3), on peut supprimer "approximativement".

Démonstration : Soit λ une probabilité cylindrique de type $p \geq 1$ sur E . Reprenons la factorisation de Pietsch. Alors $v(\lambda)$ est cylindrique de type p sur L^∞ (v est continue). Mais $(L^\infty, (L^\infty)')$ a la propriété d'approximation métrique, donc $v(\lambda)$ est de type p -approximable sur L^∞ . Ensuite L^p est localement convexe et est faiblement continue et p -sommante, donc $jv(\lambda)$ est de Radon d'ordre p dans $\sigma((L^p)'', (L^p)')$. Comme $jkv = j'u_1$, $jv(\lambda)$ est scalairement portée par S , donc, étant de Radon, est portée par l'adhérence de S dans $\sigma((L^p)'', (L^p)')$, donc par $\sigma(S'', S')$. Donc elle est l'image par j' d'une probabilité de Radon v de $\sigma(S'', S')$. Alors $u_1(\lambda)$ et v ont même image par j' ; alors, $\sigma(S'', S')$ étant la topologie induite par $\sigma((L^p)'', (L^p)')$, toute forme linéaire continue sur $\sigma(S'', S')$ se prolonge à $\sigma((L^p)'', (L^p)')$, donc $u_1(\lambda) = v$, $u_1(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(S'', S')$. et par suite $u(\lambda) = u_2 u_1(\lambda)$ de Radon sur $\sigma(G', G')$, d'ordre p . cqfd.

Remarque : On vérifie aisément que si à la fois une condition du paragraphe 2 et du paragraphe 3 sont vérifiées, u p -sommante est alors p -radonifiante de E dans G .

§ 4. RECAPITULATION

Soient E et G des Banach, pour simplifier, et soit u p -sommante de E dans G . Alors :

- 1) Si $p = +\infty$, u est ∞ -radonifiante dans $\sigma(G'', G')$; dans G si E ou G est réflexif.
- 2) Si $1 < p < +\infty$, u est p -radonifiante de E dans G .
- 3) Si $p = 1$, u est 1-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$; dans G si E ou G est réflexif, ou si E a un dual E' séparable, ou si G est un dual séparable H' d'un Banach H , ou si u est nucléaire;
- 4) Si $p < 1$, u est approximativement p -radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$; on peut supprimer "approximativement" si (E, E') a la propriété d'approximation métrique ou si u est p -nucléaire; on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G si G est réflexif ou dual séparable H' d'un Banach H , ou si u est p -nucléaire.

Remarque : Ces résultats ne peuvent pas être considérablement améliorés. Pour $p < 1$, on ne sait pas si, lorsque (E, E') n'a pas la propriété d'approximation métrique, u peut ne pas être p -radonifiante. Mais on sait que l'identité $E \rightarrow E$, pour E Banach non réflexif, n'est pas en général ∞ -radonifiante; et que l'injection $L^\infty(Z, \nu) \rightarrow L^1(Z, \nu)$, si ν est diffuse, n'est pas 1-radonifiante.

BIBLIOGRAPHIE DES EXPOSES II ET III

- [1] L. Schwartz : Probabilités cylindriques et applications radonifiantes.
- [2] L. Schwartz : Séminaire de l'Ecole Polytechnique 1969-1970, Applications radonifiantes.
- [3] B. Maurey : Applications p -sommantes, pour p réel quelconque. Note aux C. R. Acad. Sc., Paris, tome 272, p. 376-378. 1/2/1971.