A. Nahoum

Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes. II. Les résultats

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 25, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A24_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

APPLICATIONS RADONIFIANTES DANS L'ESPACE DES SERIES CONVERGENTES

II. LES RESULTATS

par A. NAHOUM

Exposé N° XXV

30 Mai 1973

§ 2. RECHERCHE DE CONDITIONS NECESSAIRES

Soit α un opérateur diagonal de l^p dans S, $1 \leq p \leq \infty$. Nous allons chercher des conditions nécessaires pour que α soit q-radonifiant, $0 \leq q < \infty$.

1) Il faut au moins que α opère continûment de l^p dans S. Soit $a \in l^p$, et soit $b_k = |a_k| \overline{\operatorname{sgn} \alpha_k}$: on a aussi $(b_k) \in l^p$, et donc on doit avoir

$$(1) \qquad \sup_n \Big| \sum_1^n \alpha_k b_k \Big| = \sup_n \sum_1^n |\alpha_k| |a_k| = \sum_1^{+\infty} |\alpha_k| |a_k| < +\infty ;$$

comme a est quelconque dans l^p, ceci impose $\alpha \in l^{p'}$

2) Considérons la transformation de Hilbert discrète H. Elle est continue de l^p dans l^p, pour $1 < p < +\infty$, définie par $Ha = b$ avec

$$b_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{+\infty} \frac{a_k}{k-n} .$$ Voir par exemple [4].

- Soit donc $1 < p < +\infty$ et $0 \leq q \leq p'$. Si α est q-sommante de l^p dans S, elle est p'-sommante et aussi $\alpha \circ H$. La base canonique $e = (e_{(N)})$ de l^p est scalairement $l^{p'}$, avec $\|e\|^*_{p'} = 1$; donc nécessairement

$$\Big[\sum_N \|\alpha \circ H\, e_{(N)}\|_S^{p'}\Big]^{1/p'} \leq \|e\|^*_{p'} \, \pi_{p'}(\alpha \circ H) \leq \|H\|_p \pi_{p'}(\alpha) < +\infty .$$

Or $\alpha \circ H e_{(N)}$ est la suite de terme général $\frac{\alpha_n}{N-n}$, sauf pour $n = N$ qui donne 0. Supposons de plus α positive décroissante ; on a alors :

$$[\|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha)]^{p'} \geq \sum_N \sup_m \Big| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^m \frac{\alpha_n}{N-n} \Big|^{p'} \geq \sum_{N=2}^{+\infty} \Big| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_n}{N-n} \Big|^{p'} \geq \sum_N \alpha_N^{p'} \cdot \Big[\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{N-n}\Big]^{p'}$$

$$\geq \sum_2^{+\infty} \alpha_N^{p'} \cdot [\operatorname{Log} N]^{p'} .$$

En résumé : si α positive décroissante, est q-sommante de l^p dans S, avec $1 < p < +\infty$ et $0 \leq q \leq p'$, alors on a :

$$(2) \qquad \Big[\sum_2^{+\infty} [\alpha_N \cdot \operatorname{Log} N]^{p'}\Big]^{1/p'} \leq \|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha)$$

3) Passons au cas $p = 1$. Supposons donc α positive décroissante, et $\alpha : l^1 \to S$ q-sommante pour un $q \in]1,+\infty[$. Soit $p = q'$; soit $\beta \in l^{p'}$, positive décroissante. Alors $\alpha\circ\beta : l^p \to l^1 \to S$ est encore p'-sommante, et donc d'après (2) :

$$[\sum_2^{+\infty}(\alpha_N\beta_N \operatorname{Log} N)^{p'}]^{1/p'} \leq \|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha\circ\beta) \leq \|H\|_p \cdot \|\beta\|_{p'} \cdot \pi_{p'}(\alpha).$$

Prenons en particulier $\beta_N = \frac{1}{K^{1/p'}}$ pour $N \leq K$, $\beta_N = 0$ sinon. On a $\|\beta\|_{p'} = 1$; et

$$[\|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha)]^{p'} \geq \sum_2^{\infty} (\alpha_N\beta_N \operatorname{Log} N)^{p'} = \frac{1}{K}\sum_2^K (\alpha_N \log N)^{p'} \geq \frac{\alpha_K^{p'}}{K} \sum_2^K (\operatorname{Log} N)^{p'}$$

$$\geq \frac{\alpha_K^{p'}}{K}\int_1^K (\operatorname{Log} t)^{p'}dt \geq \frac{\alpha_K^{p'}}{K}\int_{K/2}^K (\operatorname{Log} t)^{p'}dt \geq \frac{\alpha_K^{p'}}{2}(\operatorname{Log} K/2)^{p'}$$

par convexité de $x \mapsto \int_1^x (\operatorname{Log} t)^{p'}dt$.

Donc $(\alpha_K \operatorname{Log} K)$ est une suite bornée.

En résumé : si α est positive décroissante et q-sommante pour un $q \in]0,+\infty[$ de l^1 dans S, alors

(3) $$\alpha_n = O(\frac{1}{\operatorname{Log} n})$$

§ 3. CONDITIONS SUFFISANTES

1) Cas $p = 1$: Soit α une application diagonale de l^1 dans S ; supposons de plus $\alpha \in c_o$. Alors α opère en fait de $\sigma(l^1, c_o)$ dans $\sigma(S,S')$. [En effet, d'abord S' est un espace de suites ; ensuite soit $b \in S'$; on a pour toute $a \in S$, en posant

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n : \sum_1^{\infty} a_n b_n = \sum_1^{\infty}(A_n - A_{n+1})b_n = A_1 b_1 + \sum_2^{\infty} A_k(b_k - b_{k-1})$$

est convergente ; lorsque a décrit S, A décrit c_o, donc ceci impose

$$|b_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |b_k - b_{k-1}| < +\infty .$$

Maintenant, si $b \in S'$ on a $\alpha(b) \in c_o$, cqfd]

- Soit λ une probabilité cylindrique de 2-type sur $\sigma(l^1, l^\infty)$, λ_1 son image sur $\sigma(l^1, c_o)$; si $\alpha(\lambda_1)$ est d'ordre 2 sur S, il en sera de même de $\alpha(\lambda)$. Or on peut représenter λ_1 par une fonction aléatoire linéaire et continue $f_1 : c_o \to L^2(\Omega,\mu)$ (exposé IV) ; ${}^t f_1 : L^2(\Omega,\mu) \to l^1$ et, L^2 étant de type 2 (exposé X-XI), on a une propriété de factorisation :

$$\begin{tikzcd} L^2(\Omega,\mu) \arrow[r, "{}^t f_1"] \arrow[dr, "g"'] & l^1 \\ & l^2 \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

où β est une multiplication, $\beta \in l^2$ (exposé XV).

Mais ceci signifie que λ_1 est l'image par β de la probabilité cylindrique λ_2 sur l^2, représentée par la fonction aléatoire ${}^t g$ (exposé IV § 1 Remarque 3). On a $\alpha(\lambda_1) = \alpha\circ\beta(\lambda_2)$, qui est de Radon sur S de 2-ordre dès que $\Sigma(\alpha_n \beta_n \operatorname{Log}_n)^2 < +\infty$, d'après le théorème de Menchov (exposé XXIV) donc, puisque $\beta \in l^2$, dès que $(\alpha_n \operatorname{Log} n) \in l^\infty$. Cette condition entraîne $\alpha \in c_o$, donc aussi $\alpha(\lambda)$ de Radon de 2-ordre sur S.

A cette condition $\alpha_n = O(\frac{1}{\operatorname{Log} n})$, α est 2-sommante donc factorise par un Hilbert $\mathcal{H}$ (factorisation de Pietsch) :
$\alpha = l^1 \xrightarrow{u} \mathcal{H} \xrightarrow{v} S$, avec u 2-sommante. Mais $\Pi_o(l^1,\mathcal{H}) = \Pi_2(l^1,\mathcal{H})$ (exposé XXIII), l^∞ possède la propriété d'approximation métrique et $\mathcal{H}$ est réflexif. Donc (exposés V et IX) u est O-radonifiante de l^1 dans $\mathcal{H}$ lui-même ; et donc α de l^1 dans S lui-même.

<u>Théorème 1</u> [2] : Si α est une suite telle que (3)$\alpha_{n_1} = O(\frac{1}{\operatorname{Log} n})$, α définit une application diagonale O-radonifiante de l^1 dans S. La condition (3) est aussi nécessaire pour que α soit q-radonifiante pour un $q < +\infty$, dans le cas où α est positive décroissante. Ce dernier point résulte du paragraphe 2, 3).

<u>Remarque 1</u> : S. Kwapien et A. Pelczynski avaient déjà démontré dans [1] que la condition $\alpha_n = O(\frac{1}{(\operatorname{Log} n)^{1+\varepsilon}})$ pour un $\varepsilon > 0$ était suffisante pour que α soit 1-sommante. Ils utilisaient la formule $\pi_1(j_N) \leq$ Cste. $\operatorname{Log}(N+1)$ où $j_N : l^1_N \hookrightarrow S_N$ [du §1, 1)], sans passer par le théorème de Menchov.

<u>Remarque 2</u> : On a démontré au passage que toute probabilté cylindrique λ_1 de 2-type sur $\sigma(l^1, c_o)$ est l'image par une application diagonale d'une probabilité cylindrique λ_2 sur l^2 de 2-type. En fait si l'on suppose seulement λ_1 de 0-type, le résultat reste valable, à ceci près évidemment que λ_2 est maintenant de 0-type sur l^2. En effet λ_1 est alors représentée par $f_1' : c_o \to L^o(\Omega,\mu)$.

On a d'après l'exposé XXIII une factorisation

$$\begin{tikzcd} c_o \arrow[r, "f_1'"] \arrow[dr, "h_1"'] & L^o(\Omega,\mu) \\ & L^2(\Omega,\mu) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

D'après la démonstration du théorème, appliquée à h_1 au lieu de f_1, le diagramme se complète en :

$$\begin{tikzcd} c_o \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[d, dashed, "\beta"'] & L^o(\Omega,\mu) \\ l^2 \arrow[r, "t_g"'] & L^2(\Omega,\mu) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Si l'on pose $f_2' = \varphi \circ t_g$, l'image de la probabilité cylindrique de 0-type sur l^2 représentée par f_2' est bien λ_1, cqfd.

On a obtenu le résultat suivant : pour qu'un opérateur linéaire u de l^1 dans un espace de Banach F soit 2-sommant (ou 0-sommant) il faut et il suffit que $u \circ \beta$ soit 2-sommant pour tout opérateur diagonal β de l^2 dans l^1. Le lecteur transposera immédiatement dans le cas d'un espace L^1.

2) <u>Cas p quelconque, $p \geq 1$</u>

a) Soit $\alpha : l^p \to S$ diagonale. Si $\alpha = \beta\gamma$ avec $\beta \in l^{p'}$ et $\gamma_n = O(\frac{1}{\operatorname{Log} n})$ on peut factoriser α en $l^p \xrightarrow{\beta} l^1 \xrightarrow{\gamma} S$ avec β diagonale continue, et γ 0-radonifiante d'après le 1). La condition est donc $(\alpha_n \operatorname{Log} n) \in l^{p'}$:

Théorème 2 : Si α est une suite telle que (2) : $\sum |\alpha_n \operatorname{Log} n|^{p'} < +\infty$, elle définit une application diagonale 0-radonifiante de l^p dans S lui-même ($1 < p \leq \infty$). Cette condition (2) est aussi nécessaire pour que α soit q-radonifiante pour un $q \leq p'$ lorsque $1 < p < +\infty$, et que α est positive décroissante. Ce dernier point d'après § 2, 2).

b) Restent à régler les cas : $q > p'$ ou $p = +\infty$. On sait ([3], exposé XIV) que l'opération de primitive $f \mapsto Pf$, $Pf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $L^p_{loc}(\mathbb{R},dx) \to L^\infty_{loc}(\mathbb{R},dx)$ est q-radonifiante pour $q > p'$.

On va ramener $l^p \xrightarrow{\alpha} S$ ou ce qui revient au même $l^p \xrightarrow{\sigma\circ\alpha} l^\infty$ (avec toujours $(\sigma a)_n = \sum_1^n a_n$) à ceci. A $a \in l^p$, on associe $F_a \in L^p$ définie par

$$F_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n 1_{J_n}(x)$$ où les k_n sont des constantes à déterminer, les J_n des intervalles adjacents de $\mathbb{R}$ (l'extrémité gauche de J_1 étant 0) dont les longueurs $|J_n|$ sont également à déterminer.

On a $\|F_a\|_p^p = \Sigma|a_n|^p|k_n|^p|J_n|$. Si l'on impose $|k_n| = |J_n|^{-1/p}$ (=0 si $|J_n| = 0$), $a \mapsto F_a$ est une isométrie $l^p \to L^p$ (ceci si $p < +\infty$; si $p = +\infty$, la condition est $|k_n| = 1$) ; puis

$$\int_{J_1 \cup \ldots \cup J_m} F_a(t)\,dt = \sum_{n=1}^{m} k_n a_n |J_n|$$; si l'on prend $k_n|J_n| = \alpha_n$ soit $\operatorname{sgn}(k_n) = \operatorname{sgn}(\alpha_n)$ et $|J_n|^{1/p'} = |\alpha_n|$ (pour $p \leq +\infty$), on a $\|PF_a\|_\infty = \|\sigma a\|_\infty = \|\alpha a\|_S$; les conditions obtenues déterminent les k_n et les J_n, et en outre, si $\alpha \in l^{p'}$, les F_a, $a \in l^p$ ont toutes leur support dans $[0, \|\alpha\|_{p'}^{p'}]$ donc uniformément borné : la topologie induite par L^p_{loc} (resp L^∞_{loc}) sur l'espace engendré par les F_a (resp les PF_a) est celle de L^p (resp L^∞), et donc le résultat évoqué s'applique :

Théorème 3 : Si α est une suite de $l^{p'}$, elle définit une application diagonale α de l^p dans S, qui est q-radonifiante dès que $q > p'$. Cette condition est aussi nécessaire. Ce dernier point d'après § 2, 1).

Remarque 3 : Dans le cas $p = +\infty$, on peut raisonner directement : si α est continue de l^∞ dans S, on a $\alpha \in l^1$ d'après le paragraphe 2, 1). On peut alors décomposer α : $l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^1 \hookrightarrow S$, donc α est 1-sommante. La condition $\sum |\alpha_n| \operatorname{Log} n < \infty$ est suffisante pour que α soit q-sommante de l^∞ dans S, pour $q < 1$, mais on ne sait pas si cette condition est nécessaire, même pour une suite (α_n) positive décroissante.

Pour $p < +\infty$ les conditions suffisantes obtenues qui couvrent toutes les valeurs de p, et de q sont aussi nécessaires, au moins lorsque α est positive décroissante.

§ 4. INTERPRETATION EN TERMES DE SUITES DE VARIABLES ALEATOIRES

Nous ne la donnerons que dans le cas $p = 1$, $q = 0$, les autres cas étant analogues.

Soient Ω un espace topologique, μ une probabilté de Radon sur Ω et (X_n) une suite de variables aléatoires sur cet espace. Si (X_n) est telle que, pour tout a dans l^∞, $\Sigma a_n X_n$ converge dans $L^0(\Omega,\mu)$, alors $f:(a_n) \mapsto \Sigma a_n X_n$ définit une fonction aléatoire linéaire continue $l^\infty \to L^0(\Omega,\mu)$; à f est associée une probabilité cylindrique λ de type 0 sur l^1 (exposé IV). Si maintenant α est une suite de nombres complexes telle que (3) $\alpha_n = O(\frac{1}{\operatorname{Log} n})$ alors α définit un opérateur diagonal 0-radonifiant de l^1 dans S, d'après le théorème 1, et donc $\alpha(\lambda)$ est de Radon sur S. Il lui est associé la f.a.l. $f \circ {}^t\alpha : S' \xrightarrow{\alpha} l^\infty \longrightarrow L^0(\Omega,\mu)$; S étant un Banach séparable, d'après le théorème 5, § 1 de l'exposé IV, $f \circ {}^t\alpha$ est décomposée ; c'est dire qu'il existe $\Phi : \Omega \to S$, μ-mesurable, telle que pour $a \in S'$, $f \circ {}^t\alpha(a) = f(\alpha a) = \langle a, \Phi \rangle$ - égalité dans L^0. Pour $a = e_{(n)}$ on obtient $\alpha_n X_n = \langle e_{(n)}, \Phi\rangle$; donc $\Phi(\omega) = (\alpha_n X_n(\omega)) \in S$ p.s. ; inversement cette dernière propriété implique que $\alpha(\lambda)$ est de Radon sur S -d'après le même théorème de l'exposé IV ; si elle a lieu pour α donnée mais pour toute suite (X_n) de $L^0(\Omega,\mu)$, telle que, pour $a \in l^\infty$, $\Sigma a_n X_n$ converge dans L^0 [et ceci quels que soient Ω et μ, mais sur ce point, on peut améliorer le résultat], et si α est positive décroissante, alors, d'après le théorème 1, on a nécessairement $\alpha_n = O(\frac{1}{\operatorname{Log} n})$. [En effet toute f.a.l. continue $f : c_0 \to L^0$ est évidemment de la forme $a \mapsto \Sigma a_n X_n$, où $X_n = f(e_{(n)})$].

Enonçons seulement la première partie des résultats :

<u>Théorème 1'</u> : Si (X_n) est une suite de variables aléatoires sur Ω topologique avec μ probabilité de Radon, et si cette suite est telle que pour toute $a \in l^\infty$, la série $\Sigma a_n X_n$ converge en probabilité, alors la série $\Sigma \alpha_n X_n(\omega)$ converge p.s. dès que la suite (α_n) vérifie $\alpha_n = O(\frac{1}{\operatorname{Log} n})$.

<u>Remarque 4</u> : On peut facilement s'affranchir de l'hypothèse Ω topologique et μ probabilité de Radon sur Ω. Si les (X_n) sont définies sur un es-

pace mesuré abstrait $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, on pose $\Omega' = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, μ' est l'image de μ par $\omega \to (X_n(\omega))$, les (X'_n) sont les projections de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$: Ω' est topologique, μ' de Radon et on raisonne sur les (X'_n).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Kwapien et A. Pelczynski : The main triangle projection ... Studia Math. Tom 34, 1970.

[2] B. Maurey et A. Nahoum : Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t.276, p.751 (Mars 1973).

[3] Séminaire L. Schwartz 1969-70, Ecole Polytechnique, Paris.

[4] E. C. Titchmarsh : Reciprocal formulae involving series and integrals. Math. Z. 25 , 1926, pp.321-381.
