Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

A. Nahoum

Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes. I. Le théorème de Menchov

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 24, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A23_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

APPLICATIONS RADONIFIANTES DANS L'ESPACE DES SERIES CONVERGENTES

I. LE THEOREME DE MENCHOV

par A. NAHOUM

Exposé N^{o} XXIV

23 Mai 1973

Soit S l'espace des séries convergentes dans $\mathbb{C}$. C'est l'espace des suites (a_n) telles que $N \mapsto \sum_1^N a_n$ a une limite, normé par $\sup_N |\sum_1^N a_n|$. C'est un Banach (obtenu par transport de structure à partir de l'espace $c \subset l^\infty$ des suites convergentes). Nous cherchons à quelles conditions une application diagonale α de l^p dans S ($1 \leq p \leq +\infty$) est q-radonifiante ($0 \leq q \leq +\infty$). Nous trouverons des conditions suffisantes, qui sont aussi nécessaires dans le cas $p < +\infty$, lorsque α est décroissante.

§ 1. LE THEOREME DE MENCHOV

Il nous donnera une condition suffisante dans le cas $p = 2$.

1) L'inégalité de Menchov : Nous étudions préalablement l'injection canonique $l_N^1 \overset{j}{\hookrightarrow} S_N$; il revient au même d'étudier l'opérateur $\sigma : l_N^1 \longrightarrow l_N^\infty$ défini par $\sigma a = (\sum_1^n a_k)_n$: en effet $\|a\|_{S_N} = \|\sigma a\|_{l_N^\infty}$, donc

$\pi_p(j) = \pi_p(\sigma)$. L'opérateur σ apparaît comme une "primitive discrète". Dans $\mathbb{R}$, prendre une primitive, peut se ramener à effectuer une convolution : si le support de f est dans $\mathbb{R}^+$ et si f est continue, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} Y(x-t)f(t)dt = (Y * f)(x)$ (Y : fonction de Heaviside).

On va créer une situation analogue pour σ. On introduit un groupe, on le coupe en deux, et on introduit une fonction analogue à Y. Le groupe G sera le groupe multiplicatif des racines $2N^{\text{èmes}}$ de l'unité : $\exp 2i\pi \frac{k}{2N}$ notée e_k, pour $0 \leq k \leq 2N-1$; soit $G_+ = \{e_k : 0 \leq k \leq N-1\}$ et $h = 1_{G_+}$. On normalise la mesure de Haar μ de G en donnant à chaque élément la masse $\frac{1}{2N}$.

Soit $C_h : L^1(G,\mu) \to L^\infty(G,\mu)$ la convolution par h. On peut factoriser σ par C_h. Soit d'abord $l_N^1 \xrightarrow{j_1} L^1(G,\mu)$ définie sur les éléments de base par $j_1(\varepsilon_k) = (\delta_{e_k}).2N$, $0 \leq k \leq N-1$ [$l_N^1 = l^1(\{0,\ldots,N-1\})$ pour simplifier les écritures]. On a $\|j_1\| = 1$; et l'image de l_N^1 est $L^1(G_+,\mu|G_+)$

Si $f \in L^1(G_+,\mu|G_+)$, on a pour $e_k \in G_+$:

$C_h(f)(e_k) = (h * f)(e_k) = \frac{1}{2N} \sum_0^{2N-1} h(e_k.e_l^{-1})f(e_l) = \frac{1}{2N} \sum_0^{N-1}$ [à cause de l'hypothèse sur f] $= \frac{1}{2N}\cdot \sum_{l=0}^{k} f(e_l)$ [à cause de l'hypothèse sur e_k, et de la définition de h]. On retrouve les sommes partielles. Posons donc $j_2 : L^\infty(G,\mu) \to l^\infty_N$: $j_2(\delta_{e_k}) = \varepsilon_k$ si $0 \le k \le N-1$, $j_2(\delta_{e_k}) = 0$ sinon; on a $\|j_2\| = 1$. Il est clair, d'après le calcul précédent que $j_2 \circ C_h \circ j_1 = \sigma : l^1_N \to l^\infty_N$; donc $\pi_1(\sigma) \le \|j_2\|\, \pi_1(C_h)\, \|j_1\| \le \pi_1(C_h)$. Reste à estimer $\pi_1(C_h)$; on va factoriser C_h par L^2 et utiliser le théorème de Grothendieck (exposé XXIII).

Soit $\hat{G}$ le groupe dual (groupe des caractères) de G ; G est un sous-groupe du tore $\mathbb{T}$, et $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$ (coefficients de Fourier!) ; donc $\hat{G}$ est le quotient de $\mathbb{Z}$ par le sous-groupe des caractères de $\mathbb{T}$ valant 1 sur G ; ce dernier est formé des multiples de 2N. Ainsi $\hat{G} = \mathbb{Z}/2N\ \{\dot{0},\ldots,\dot{\overline{2N-1}}\}$ (additif) avec pour dualité $\langle \exp 2i\pi \frac{k}{2N}, \dot{l}\rangle = \exp 2i\pi \frac{kl}{2N}$ $[G \times \hat{G} \to \mathbb{C}]$. Nous cherchons à normaliser la mesure de Haar ν de $\hat{G}$ de sorte que la transformation de Fourier soit une isométrie de $L^2(G,\mu)$ sur $L^2(\hat{G},\nu)$. En particulier :

$$\|\delta_{e_k}\|_{L^2(G)} = \frac{1}{\sqrt{2N}};\quad (1) : \widehat{\delta_{e_k}}(\dot{l}) = \frac{1}{2N}\sum_{p=0}^{2N-1} \delta_{e_k}(e_p)\,\langle e_p,\dot{l}\rangle =$$

$$\frac{1}{2N}\langle e_k,\dot{l}\rangle = \frac{1}{2N}\exp 2i\pi\frac{kl}{2N}\ ;\quad \|\widehat{\delta_{e_k}}\|_{L^2(G,\nu)} = \Big(\sum_{l=0}^{2N-1} \frac{1}{4N^2}\cdot\nu(\dot{l})\Big)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2N}}[\nu(\dot{0})]^{1/2}$$

donc ν donne à chaque point la masse 1.

Ceci étant, posons $\hat{h}(\dot{l}) = m_l$; $\widehat{C_h(f)} = \hat{h}.\hat{f} = \hat{C}_h(\hat{f})$, $\hat{C}_h$ est la multiplication diagonale par (m_l); on peut écrire $\hat{h}(\dot{l}) = m_l = (\sqrt{|m_l|})(\sqrt{|m_l|}\ \mathrm{sgn}(m_l)) = \hat{h}_1(\dot{l}).\hat{h}_2(\dot{l})$; d'où $C_h = C_{h_1 * h_2} = C_{h_2} \circ C_{h_1}$:

$$\begin{tikzcd}
L^1(G,\mu) \arrow[rr, "C_h"] \arrow[dr, "C_{h_1}"'] & & L^\infty(G,\mu) \\
& L^2(G,\mu) \arrow[ur, "C_{h_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

On a alors $\|C_{h_\lambda}\| \le \|h_\lambda\|_{L^2(G,\mu)} = \|\hat{h}_\lambda\|_{L^2(\hat{G},\nu)} = (\Sigma|m_l|)^{1/2}$ pour $\lambda = 1$ ou 2.

Par ailleurs, d'après l'exposé XXIII, il existe une constante universelle

A telle que $\pi_1(C_{h_1}) \leq A\|C_{h_1}\|$ (Théorème de Grothendieck). D'où, $\pi_1(C_h) \leq \pi_1(C_{h_1})\ \|C_{h_2}\| \leq A\ \Sigma\ |m_l|$; calculons $\Sigma|m_l|$. D'après (1)

$$m_l = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2N} \exp 2i\pi \frac{kl}{2N} = \frac{1}{2N} \cdot \frac{1 - \exp 2i\pi \frac{lN}{2N}}{1 - \exp 2i\pi \frac{l}{2N}} \quad \text{si } l \neq 0 \text{ ; on sait que}$$

$$|1 - e^{i\theta}| = 2\sin\frac{\theta}{2} \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi \ ; \ \geq \frac{2}{\pi}[\pi - \theta] \text{ si } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \quad \text{Donc :}$$

$$|m_l| \leq \frac{1}{2l} \quad \text{pour } 1 \leq l \leq N-1, \ |m_l| \leq \frac{1}{2}\ \frac{1}{2N-l} \text{ si } N \leq l \leq 2N-1 \ ; \text{ d'où}$$

$$\sum_{l=0}^{2N-1} |m_l| \leq 2(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}) \leq C.\ \mathrm{Log}(N+1) \text{ où } C \text{ est indépendante de } N.$$

$$\text{Ainsi } \pi_1(j) = \pi_1(\sigma) \leq A.C.\mathrm{Log}(N+1).$$

Cette inégalité a été démontrée par S. Kwapien et A. Pelczynski dans [1]. On en déduit aisément une nouvelle inégalité: si maintenant α est une application diagonale de l_N^2 dans S_N, on peut factoriser : $l_N^2 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} l_N^1 \overset{j}{\hookrightarrow} S_N$, donc :

$$\pi_1(\alpha) \leq \|\tilde{\alpha}\|\ \pi_1(j) \leq A\,C\,(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2)^{1/2}\ \mathrm{Log}\ (N+1)$$

C'est l'inégalité de Menchov.

<u>Remarque 1</u> : Nous avons écrit des majorations de $\pi_1(j)$, ou $\pi_1(\alpha)$: en fait d'après l'exposé XXIII, on a des majorations identiques pour $\pi_p(j)$ ou $\pi_p(\alpha)$, $-1 < p \leq 2$, en changeant simplement A.

<u>Remarque 2</u> : Le raisonnement précédent montre que si G est un groupe compact abélien, μ sa probabilité de Haar, on a pour un opérateur de convolution de $L^1(G,\mu)$ dans $L^\infty(\Omega,\mu)$: $\pi_1(C_h) \leq A \sum_{l\in\hat{G}} |m_l|$, où les (m_l) sont les coefficients de Fourier de h. On a aussi une inégalité en sens inverse : supposons C_h 2-sommant de $L^1(G,\mu)$ dans $L^\infty(\Omega,\mu)$; l'opérateur $L^2(G,\mu) \xrightarrow{I} L^1(G,\mu) \xrightarrow{C_h} L^\infty(G,\mu) \xrightarrow{J} L^2(G,\mu)$ composé de deux opérateurs 2-sommants, est nucléaire d'après Pietsch [2] et cet opérateur étant diagonal dans la base formée par les caractères :

$$\Sigma|m_1| = N_1(J \circ C_h \circ I) \le \pi_2(J)\ \pi_2(C_h) \le \pi_1(C_h).$$

2) <u>Théorème de Menchov</u> : Considérons maintenant une application diagonale $l^2 \xrightarrow{\alpha} S$. Nous allons procéder à un "découpage en tranches exponentielles" qui va permettre une juxtaposition commode pour les inégalités de Menchov. Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $I_N = [2^N + 1, 2^{N+1}] \subset \mathbb{N}$. Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et N tel que $n \in I_N$. On a alors, pour $a \in l^2$:

$$(2) \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k\right| \le \sum_{K=0}^{N-1} \left|\sum_{k\in I_K} \alpha_k a_k\right| + \left|\sum_{k=2^N+1}^{n} \alpha_k a_k\right| \le \sum_{K=0}^{N-1} \left|\sum_{k\in I_K} \alpha_k a_k\right| + \|\alpha a\|_{S(I_N)},$$

où $S(I_N)$ désigne l'espace des suites indexées dans I_N, avec la norme de S, et où αa est identifiée à sa restriction à I_N. D'après Hölder, la première somme est :

$$\sum_{K=0}^{N-1} \frac{1}{K+1}(K+1)\left|\sum_{k\in I_K} \alpha_k a_k\right| \le \left[\sum_{K=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{K+1}\right|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{K=0}^{+\infty}(K+1)^2\left|\sum_{k=I_K}\alpha_k a_k\right|^2\right]^{1/2}$$

Le deuxième terme de (2) est inférieur ou égal à $\left[\sum_{K=0}^{\infty} \|\alpha a\|^2_{S(I_K)}\right]^{1/2}$, d'où, en passant au sup sur n :

$$(3) \quad \|\alpha a\|_S^2 \le B^2 \sum_{K=0}^{+\infty}\left[(K+1)^2\left|\sum_{k\in I_K}\alpha_k a_k\right|^2 + \|\alpha a\|^2_{S(I_K)}\right].$$

Soit, pour $K \in \mathbb{N}$, V_K le sous espace de $\mathbb{C}\times S(I_K)$ formé des couples $(c,(d_k)_{k\in I_K})$ tels que $c = (K+1)\sum_{k\in I_K} d_k$, avec la norme induite par

$$\|(c,(d_k)_{k\in I_K})\|^2 = |c|^2 + \|(d_k)\|^2_{S(I_K)}.$$

Ensuite posons $u_K = (v_K, w_K) : l^2 \to V_K$ avec

$$v_K(a) = (K+1)\sum_{k\in I_K} \alpha_k a_k, \quad w_K(a) = (\alpha_k a_k)_{k\in I_K}.$$

Démontrons un lemme :

<u>Lemme</u> : Soient E un espace de Banach, (F_K) une suite d'espaces normés et pour chaque K soit $u_K \in \pi_2(E,F_K)$. On a pour l'opérateur $u = \Sigma u_K$ de E dans $l^2(F_K)$ ♦ :

$$\pi_2(u) \leq (\Sigma(\pi_2(u_K))^2)^{1/2}$$

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de Pietsch (exposé II), on peut trouver pour chaque K une mesure ≥ 0 μ_K sur la boule unité de E' telle que :

$$\forall\, x \in E \qquad \|u_K(x)\|^2 \leq \int |\langle x, \xi\rangle|^2 d\mu_K(\xi),$$

$$\text{et } \|\mu_K\| = (\pi_2(u_K))^2.$$

On a : $\|u(x)\|^2 = \Sigma\|u_K(x)\|^2 \leq \int |\langle x, \xi\rangle|^2 \, d(\Sigma\mu_K)(\xi)$, donc

$(\pi_2(u))^2 \leq \|\Sigma\mu_K\| \leq \Sigma(\pi_2(u_K))^2$, ce qui démontre le lemme.

Appliquons d'abord le lemme à u_K. Nous aurons :

$(\pi_2(u_K))^2 \leq (\pi_2(v_K))^2 + (\pi_2(w_K))^2$. Mais v_K est de rang 1, donc $\pi_2(v_K) = \|v_K\|$, et d'après l'inégalité de Menchov :

$$(\pi_2(u_K))^2 \leq (K+1)^2 \sum_{k\in I_K} |\alpha_k|^2 + A^2C^2(\mathrm{Log}(2^K+1))^2 \sum_{k\in I_K} |\alpha_k|^2$$

$$\leq (A^2C^2+1) \sum_{k\in I_K} |\alpha_k|^2(1+\mathrm{Log}\, k)^2$$

Appliquons maintenant le lemme à l'opérateur $u = \Sigma\, u_K$ de l^2 dans $l^2(V_K)$, en supposant

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2(1+\mathrm{Log}\, k)^2 < \infty \quad :$$

$$(\pi_2(u))^2 \leq (A^2C^2+1) \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2(1+\mathrm{Log}\, k)^2 < \infty$$

♦ C'est l'espace des suites (x_K), avec $x_K \in F_K$, muni de la norme $(\Sigma\|x_K\|^2)^{1/2}$.

Mais l^2 est un Hilbert, et $l^2(V_K)$ réflexif (les V_K sont de dimension finie). Donc, d'après les exposés V et IX, u est 0-radonifiante de l^2 dans $l^2(V_K)$ lui-même. Par ailleurs (3) prouve l'existence d'une application continue z de $l^2(V_K)$ dans S, telle que $\alpha = z \circ u$ [si $x \in l^2(V_K)$, les termes de zx dans la tranche I_N sont donnés par la deuxième projection de la projection de x dans V_N]. Donc α est aussi 0-radonifiante ; en résumé :

<u>Théorème de Menchov</u> [3]: Si la suite α vérifie $M^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 [1 + \operatorname{Log} k]^2 < +\infty$, elle définit une application diagonale 0-radonifiante α de l^2 dans S lui-même ; et il existe une constante universelle H telle que $\pi_2(\alpha) \leq H.M$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Kwapien, A. Pelczynski : The main triangle projection..., Studia Mathematica, Tom 34, 1970.

[2] A. Pietsch : Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. 28 (1967) p.333-354.

[3] L. Schwartz : Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes ;
Deux journées p-radonifiantes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972.