Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Une nouvelle démonstration d'un théorème de Grothendieck

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 22, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A21_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

UNE NOUVELLE DEMONSTRATION D'UN THEOREME DE GROTHENDIECK

par B. MAUREY

Exposé N° XXII

9 Mai 1973

Nous allons poursuivre l'étude de l'ensemble I_E, défini dans l'exposé précédent. Nous donnerons tout d'abord quelques corollaires du théorème de l'exposé précédent. Lorsque $q = 1$, ce théorème prend une forme particulièrement sympathique :

Corollaire 1 : Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $1 \notin I_E$

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, E contient un sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l_n^∞.

(Démonstration immédiate : si u et v sont les opérateurs de l_n^∞ dans E et de E dans l_n^∞ fournis par le théorème, on prend $F = u(l_n^\infty)$. Les opérateurs u et v restreints à F sont alors des isomorphismes entre F et l_n^∞, et $d(F,l_n^\infty) \leq \|u\|\|u^{-1}\| \leq \|u\|\|v\| \leq 1+\varepsilon$.)

Autrement dit, en dehors des espaces qui contiennent des l_n^∞ pour tout n, tous les Banach vérifient une "conjecture de Pietsch forte", c'est-à-dire que $\pi_1(E,F) = \pi_p(E,F)$ pour tout p tel que $-1 < p \leq 1$ et tout espace quasi-normé F. Si E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, on peut dire également d'après le théorème de l'exposé XVII que tout opérateur linéaire continu de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p \leq 1$, se factorise par $L^1(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de L^r, $1/p = 1 + 1/r$.

Corollaire 2 : Soit E un espace de Banach. S'il existe un réel $q \geq 1$ tel que toute suite sommable dans E (x_i) vérifie $\Sigma\|x_i\|^{q'} < \infty$, on a :

$$]0,q[\subset I_E .$$

Démonstration : L'espace des suites sommables sur E est un Banach pour la norme $\sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_i\, x_i\|$.

D'après le théorème du graphe fermé, l'hypothèse du corollaire implique l'existence d'une constante C telle que l'on ait pour toute suite sommable (x_i) :

$$(\Sigma\|x_i\|^{q'})^{1/q'} \leq C \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\Sigma\, \varepsilon_i\, x_i\|$$

Soit $p < q$, et supposons que $p \notin I_E$. On peut alors supposer $p \geq 1$ d'après la conjecture de Pietsch. D'après le théorème de l'exposé XXI, on peut trouver pour tout entier n deux opérateurs u et v, de $l_n^{p'}$ dans E et de E dans l_n^{∞} respectivement, tels que :

$$\|u\| \leq 2 \ ; \ \|v\| \leq 1 \ ; \quad v \circ u \text{ est l'injection de } l_n^{p'} \text{ dans } l_n^{\infty}.$$

Soit (e_i) la base canonique de $l_n^{p'}$, et posons $x_i = u(e_i)$. Nous aurons :

$$\|x_i\| \geq \|v(x_i)\| = \|e_i\| = 1, \qquad \text{donc} \quad (\Sigma\|x_i\|^{q'})^{1/q'} \geq n^{1/q'}$$

D'autre part :

$$\|\Sigma\, \varepsilon_i\, x_i\| = \|u(\Sigma\, \varepsilon_i\, e_i)\| \leq 2\|\Sigma\, \varepsilon_i\, e_i\| = 2n^{1/q'} \ .$$

Nous devons donc avoir pour tout n :

$$n^{1/q'} \leq 2C\, n^{1/p'},$$

ce qui est impossible puisque $1/p' < 1/q'$.

Remarque 1 : En général l'hypothèse du corollaire 2 n'implique pas que $q \in I_E$. Cependant, je ne connais pas de contre-exemple pour $q = 2$. (Alors que pour $1 \leq q < 2$, $L^{q'}$ fournit un contre-exemple).

Signalons aussi que l'on a toujours $I_E \subset]0,2]$ pour un espace de Banach de dimension infinie. En effet, si $q \in I_E$, $q > 2$, on a $\pi_q(E,F) = \pi_1(E,F)$ pour tout F, donc d'après le théorème de l'exposé XVII, toute suite sommable (x_i) sur E (qui est en particulier une suite scalairement l^1) peut s'écrire :

$$x_i = \alpha_i\, y_i \ , \text{ avec } (\alpha_i) \in l^{q'},$$

et où (y_i) est une suite scalairement l^q, donc bornée. On a donc

$\Sigma\|x_i\|^{q'} < \infty$, et $q' < 2$. Or cela contredit le théorème de Dvoretsky-Rogers, qui indique que si E est un Banach de dimension infinie, on peut trouver pour tout $p < 2$ une suite sommable (x_i) dans E telle que $\Sigma\|x_i\|^p = +\infty$.

Corollaire 3 : Pour tout espace de Banach E de dimension infinie l'ensemble I_E est un segment ouvert, ou est égal à $]0,2]$.

Démonstration : Il est clair que I_E est un segment, contenu dans $]0,2]$ d'après la remarque 1. Supposons que $I_E =]0,q]$, avec $q < 2$. Soient $\varepsilon > 0$ et n entier donnés. On peut trouver un $\alpha > 0$ tel que l'injection j de $l_n^{q+\alpha}$ dans l_n^q ait une norme $\leq \sqrt{1+\varepsilon}$. Par hypothèse $q+\alpha \notin I_E$. On peut donc trouver deux opérateurs u et v, de $l_n^{(q+\alpha)'}$ dans E et de E dans l_n^∞, tels que :

$$\|u\| \leq \sqrt{1+\varepsilon} \ ; \quad \|v\| \leq 1 \ ;$$

$v \circ u$ est l'injection de $l_n^{(q+\alpha)'}$ dans l_n^∞ .

Alors $u_1 = u \circ j$, $v_1 = v$ donne un couple d'opérateurs de $l_n^{q'}$ dans E, et de E dans l_n^∞ , tel que :

$$\|u_1\| \leq 1+\varepsilon \ ; \ \|v_1\| \leq 1 \ ;$$

$v_1 \circ u_1$ est l'injection de $l_n^{q'}$ dans l_n^∞ . Puisque l'on peut trouver un tel couple pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, on en déduit que $q \notin I_E$ d'après le théorème de l'exposé précédent, d'où une contradiction qui achève la démonstration.

Remarque 2 : Le cas où $I_E =]0,2[$ se présente effectivement. On peut prendre par exemple pour E l'espace d'Orlicz $L^\Phi([0,1],dt)$, avec $\Phi(t) = t^2 \mathrm{Log}(t+1)$.

Théorème 1 : Soient E un espace de Banach, p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q$. Si on a pour tout espace quasi-normé F $\pi_q(E,F) = \pi_p(E,F)$, on en déduit : $q \in I_E$.

Ce théorème résulte immédiatement de la remarque 3 de l'exposé XXI. Cependant nous allons donner un énoncé plus précis, et une démonstration qui n'utilise pas le lemme de Rosenthal.

<u>Théorème 1 bis</u> : Soient E un espace de Banach, p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q$, et C une constante telle que l'on ait pour tout espace quasi-normé F et pour tout opérateur $v \in \pi_q(E,F)$:

$$\pi_p(v) \leq C\, \pi_q(v)$$

Soit s un nombre réel tel que $0 < s < p < q$. Définissons un nombre $\theta \in]0,1[$ par $1/p = (1-\theta)/s + \theta/q$. On a alors pour tout espace quasi-normé F et pour tout opérateur $v \in \pi_q(E,F)$:

$$\pi_s(v) \leq C^{1/(1-\theta)}\, \pi_q(v)$$

Nous démontrerons d'abord un lemme :

<u>Lemme</u> : Soient s, p, q, θ comme précédemment, F un espace quasi-normé, u un opérateur linéaire continu de F dans un espace $L^s(\Omega,\mu)$. On a :

$$C_{s,p}(u) \leq \|u\|^{1-\theta}(C_{s,q}(u))^{\theta}$$

<u>Démonstration</u> : Posons $1/s = 1/r + 1/q$, d'où

$$1/p = (1-\theta)/r + 1/q \quad ; \quad 1/s = \theta/r + 1/p$$

Par définition de $C_{s,q}(u)$, on peut trouver une fonction $\varphi \geq 0$ telle que :

$$\int \varphi^r d\mu \leq 1 \;\; ; \;\; \forall\, x \in F \qquad \left(\int \left|\frac{u(x)}{\varphi}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C_{s,q}(u)\; \|x\|$$

On peut écrire par ailleurs :

$$\left|\frac{u(x)}{\varphi^\theta}\right|^p = (|u(x)|^s)^{p(\frac{1-\theta}{s})} \;.\; \left(\left|\frac{u(x)}{\varphi}\right|^q\right)^{p\theta/q} \;.$$

On en déduit, d'après l'inégalité de Hölder (puisque $p(1-\theta)/s + p\theta/q = 1$), pour tout $x \in F$:

$$\left(\int \left|\frac{u(x)}{\varphi^\theta}\right|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |u(x)|^s d\mu\right)^{(1-\theta)/s} . \left(\int \left|\frac{u(x)}{\varphi}\right|^q d\mu\right)^{\theta/q}$$

$$\leq \|u\|^{1-\theta}(C_{s,q}(u))^{\theta}\; \|x\| \;.$$

Or $\int(\varphi^\theta)^{r/\theta}d\mu \le 1$, et $1/s = \theta/r + 1/p$. On en déduit bien $C_{s,p}(u) \le \|u\|^{1-\theta}(C_{s,q}(u))^\theta$.

Démontrons maintenant le théorème 1 bis : d'après le théorème de l'exposé XVII, il suffit de montrer que toute suite $(x_1,\dots,x_n)$ sur E admet la décomposition $x_i = \alpha_i y_i$, avec :

$$\Sigma|\alpha_i|^r \le 1 \ ; \quad \|(y_i)\|_q^* \le C^{1/1-\theta}\|(x_i)\|_s^*$$

Il suffit donc de montrer que pour tout entier n et pour tout opérateur linéaire continu u de E' dans l_n^s, on a :

$$C_{s,q}(u) \le C^{1/1-\theta}\|u\|$$

Soit donc u un opérateur linéaire continu de E' dans l_n^s. Nous noterons $l_n^s = L^s(\Omega,\mu)$ pour des commodités d'écriture. Par définition de $C_{s,p}(u)$, on peut trouver une fonction ψ telle que :

$$\int|\psi|^{r/\theta}d\mu \le 1 \ ; \quad \forall\, x \in E' \quad \left(\int\left|\frac{u(x)}{\psi}\right|^p d\mu\right)^{1/p} \le C_{s,p}(u)\ \|x\|$$

Considérons maintenant l'opérateur u_1 de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$ défini par $u_1(x) = \frac{u(x)}{\psi}$. Puisque l'on a par hypothèse $\pi_p(v) \le C\pi_q(v)$ pour tout F et tout $v \in \pi_q(E,F)$, on déduit♦ du théorème de l'exposé XVII :

$$C_{p,q}(u_1) \le C\ \|u_1\| \le C.C_{s,p}(u)$$

Il existe donc une fonction χ telle que :

$$\int|\chi|^{r/(1-\theta)}d\mu \le 1; \quad \forall\, x \in E' \quad \left(\int\left|\frac{u_1(x)}{\chi}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \le C_{p,q}(u_1)\|x\|$$
$$\le C.C_{s,p}(u)\|x\|$$

♦ Dans ce théorème, on suppose que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique lorsque $p < 1$. Une distraction coupable nous a fait oublier de signaler que les conditions b) et c) de ce théorème sont toujours équivalentes, car l^p vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. C'est ce que nous utilisons ici dans le cas $p < 1$.

On a alors en posant $\varphi = \psi\chi$:

$$\int|\varphi|^r d\mu \leq 1 \ ; \quad \forall\, x \in E' \qquad \left(\int\left|\frac{u(x)}{\varphi}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C.C_{s,p}(u)\ \|x\| \ ,$$

d'où $C_{s,q}(u) \leq C.C_{s,p}(u)$, et d'après le lemme :

$$C_{s,q}(u) \leq C\|u\|^{1-\theta}(C_{s,q}(u))^{\theta}$$

Mais $C_{s,q}(u)$ est fini puisque u est de rang fini, et l'on obtient :

$$(C_{s,q}(u))^{1-\theta} \leq C\|u\|^{1-\theta}, \qquad \text{d'où le résultat.}$$

Théorème 2 : Si E est un espace de Banach de cotype 2 (cf. exposé VII), on a $2 \in I_E$.

Démonstration : D'après le théorème 1, il suffit de montrer que l'on a $\pi_2(E,F) = \pi_p(E,F)$ pour tout $p \in]1,2]$ et tout espace quasi-normé F. En fait il suffit de se restreindre au cas où F est un espace de Banach, et même si l'on veut un espace de Hilbert, puisque tout opérateur 2-sommant de E dans F admet la factorisation (cf. exposé II) :

$$E \xrightarrow{\bar{u}} H \longrightarrow F \ ,$$

où H est un espace de Hilbert et $\bar{u} \in \pi_2(E,H)$.

Nous avons démontré dans l'exposé VII, corollaire 2 du théorème 2 que si E est de cotype 2, on a pour tout espace de Banach F :

$$\pi_2(F,E) = \pi_q(F,E) \quad \text{pour tout } q \text{ tel que } 2 \leq q < \infty$$

On en déduit aussitôt, en utilisant l'adjonction des idéaux d'opérateurs (cf. exposé XIII et exposé XVI, remarque 1.6) :

$$\forall\, F \qquad \mathcal{J}_{q'}(E,F) = \mathcal{J}_2(E,F).$$

Or on a toujours $\mathcal{J}_2 = \pi_2$ (cf. [2]) et $\mathcal{J}_{q'} \subset \pi_{q'}$, donc :

$$\forall\, F, \quad \forall\, q \in [2,\infty[\ , \ \pi_2(E,F) = \pi_{q'}(E,F),$$

d'où le résultat.

Remarque 3 Nicole Tomczak-Jaegermann a donné dans [3] des exemples non triviaux d'espaces de cotype 2 :

1) Si E est une C^*-algèbre (non nécessairement commutative !), son dual E' est de cotype 2.

2) Soit H un espace de Hilbert, et soit $S_p(H)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(H,H)$ formé des opérateurs u tels que $\mathrm{Tr}(u u^*)^{p/2} < \infty$. L'espace $S_p(H)$ est de cotype 2 pour $1 \leq p \leq 2$, et de type 2 pour $2 \leq p < \infty$.

Nous allons donner maintenant une forme du théorème de Grothendieck. Nous verrons d'autres formes dans l'exposé suivant.

Corollaire (cf.[1]) : On a pour tout espace quasi-normé F, et pour tout réel p tel que $-1 < p \leq 2$:

$$\pi_2(L^1,F) = \pi_p(L^1,F)$$

En effet, L^1 est de cotype 2 d'après l'exposé VII.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29(1968) p. 275-326.

[2] A. Pietsch : Absolut-p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. 28 (1967) p.333-353.

[3] N. Tomczak-Jaegermann : On the moduli of smoothness and the Rademacher average of the trace classes S_p, Preprint.