G. Pisier

# Bases, suites lacunaires dans les espaces $L^P$, d'après Kadec et Pelczynski (suite et fin)

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1972-1973), exp. nº 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A19_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

*17, rue Descartes*

*75230 Paris Cedex 05*

**S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3**

# BASES, SUITES LACUNAIRES DANS LES ESPACES $L^p$

# D'APRES KADEC ET PELCZYNSKI

**(suite et fin)**

**par G. PISIER**

**Exposé N° XIX** **28 Mars 1973**

Nous allons énoncer les conséquences du théorème 3 de l'exposé précédent dans les différents cas.

Remarquons tout d'abord que la proposition 4 est vraie sans modification si $\mu$ est $\sigma$-finie, à condition de définir la topologie de $L^o(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Comme celle qui est définie par les jauges

$$J_{\alpha,A} : f \in L^o(\Omega,\mathcal{A},\mu) \to \inf \{a > 0 | \mu(\{|f| > a\} \cap A) \leq \alpha\}$$

où $\alpha$ est positif et A est une partie intégrable. On voit alors que (quelle que soit la mesure $\mu$) si un sous-espace R de $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ a la topologie de $L^o(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ alors il est de type p. En effet il alors une partie intégrable $A \in \mathcal{A}$ telle que R se plonge dans $L^p(A,\mathcal{A}|_A, \mu|_A)$, avec la topologie de $L^o(A,\mathcal{A}|_A,\mu|_A)$.

Si $\mu$ est supposée $\delta$-finie, il existe une fonction mesurable f, telle que $\{f > 0\} = \Omega$ et $\delta f\, d\mu = 1$.

L'opérateur $T : g \to g f^{-1/p}$ de $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ sur $L^p(\Omega,\mathcal{A},(f.\mu))$ est une isométrie, et l'opérateur $g \to g f^{-1/p}$ de $L^o(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ sur $L^o(\Omega,\mathcal{A},(f\mu))$ est un isomorphisme d'e.v.t. On en conclut aisément qu'un sous-espace R de $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ a la topologie de $L^o(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ si et seulement si $T(R) \subset L^p(\Omega,\mathcal{A},(f\mu))$ a la topologie de $L^o(\Omega,\mathcal{A},(f\mu))$. La proposition 4 s'étend donc au cas où $\mu$ est $\sigma$-finie. Appliquée à l'espace $l^p$, cette remarque conduit à un résultat classique :

<u>Proposition 5</u> : Soit $p > 0$ et $\delta > 0$. Tout sous-espace fermé de dimension infinie de $l^p$ contient un sous-espace $(1+\delta)$ - isomorphe à $l^p$ [et $(1+\delta)$-complémenté si $p \geq 1$].

<u>Démonstration</u> : Si $\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{\{n\}}$, l'espace $L^o(\mathbb{N},\lambda)$ s'identifie à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ; comme la boule de $l^p$ est compacte pour la topologie induite par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, un sous-espace de dimension infinie de $l^p = L^p(\mathbb{N},\lambda)$ ne peut avoir la topologie de $L^o(\mathbb{N},\lambda)$. Il suffit donc d'appliquer la remarque précédente.

Soit $0 < p < q < 2$, le théorème 4 implique que toute probabilité cylindrique de type et cotype p sur $\sigma((L^q)^*, L^q)$ est de cotype 0, puisque $L^q$ est de type p. Si $p \in ]0,1[$ on peut préciser :

<u>Proposition 6</u> : Soit $0 < p < q \leq 1$. Toute probabilité cylindrique de type et cotype p sur un e.l.c.s. à dual q-normé est de cotype 0.

<u>Démonstration</u> : En effet, $l^p$ n'est pas q-normable. (ou encore : tout e.l.c.s. à dual q-normé est de type p si $0 < p < q \leq 1$. Cf. exposés X - XI corollaire 2).

<u>Rappel</u> : Soit E un e.v.t., une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite base inconditionnelle de E si, par définition, tout élément de E peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires et où $(\alpha_i x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable dans E. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ dans E est dite basique inconditionnelle, si c'est une base inconditionnelle du sous-espace fermé engendré par $\{x_i \mid i\in I\}$.

Soient E, F deux espaces de Banach. Une famille basique inconditionnelle $(x_i)_{i\in I}$ dans E et une famille basique inconditionnelle dans F $(y_j)_{j\in J}$ sont dites équivalentes s'il existe une bijection $\sigma$ de I sur J telle que, pour toute famille scalaire $(\alpha_i)_{i\in I}$, la famille $(\alpha_i x_i)_{i\in I}$ est sommable dans E si et seulement si la famille $(\alpha_i\, y_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est dans F.

Soit E un espace de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ une base inconditionnelle de E ; alors la norme $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = x \to \|x\|_1 = \sup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ fini}}} \|\sum_{i\in J} \alpha_i x_i\|$ est équivalente par le théorème de Banach à la norme initiale. Les formes linéaires $x_j^* : \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = x \to \alpha_j = \langle x_j^*, x\rangle$ sont donc continues sur E. On en déduit aisément le résultat suivant : si $\varphi$ est une application injective de $\mathbb{N}$ dans I telle qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\varphi(n)}\, x_{\varphi(n)}$ converge [où $(\alpha_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ est une suite scalaire] alors la famille $(\alpha_{\varphi(n)} x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable dans E. Rappelons enfin le théorème d'Orlicz : dans un espace de Hilbert, toute famille sommable $(x_i)_{i\in I}$ vérifie $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty$.

Notation : $L^p$ désigne dans la suite l'espace $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ où $\mu$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

Le théorème 3 entraîne que sur un espace de Hilbert toute probabilité cylindrique de type et cotype p, avec $p \neq 2$, est de cotype 0. En fait pour $p > 2$, les sous-espaces de $L^p$ qui ont la topologie de $L^0$ sont les sous-espaces hilbertisables de $L^p$ :

Théorème 4 : Soit $p > 2$, R un sous-espace fermé de $L^p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) R est hilbertisable.

ii) R a la topologie de $L^0$. (i e. $\exists\varepsilon > 0$ tel que $R \subset M^p_\varepsilon$)

iii) Il existe une constante C telle que :

$$\|x\|_{L^2} \leq \|x\|_{L^p} \leq C\|x\|_{L^2} \quad \text{pour tout élément x de R.}$$

iv) Il existe $\varepsilon > 0$ et une base inconditionnelle $(r_i)_{i\in I}$ de R telle que :

$$\forall\, i \in I \qquad r_i \in M^p_\varepsilon \ .$$

Lemme 3 : Pour tout $p > 2$, il existe une constante $B_p$ telle que pour toute suite finie $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $L^p$, on a :

$$\left(\int dt \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\ \varphi_i\right\|^p_{L^p}\right)^{1/p} \leq B_p\left(\sum_{i=1}^{i=n} \|\varphi_i\|^2_{L^p}\right)^{1/2}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des variables de Rademacher sur $((0,1),dt)$.

Démonstration du lemme : Par les inégalités de Khintchine (cf.[5]) on a :

$$\left(\int dt\, d\mu(\omega) \left| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\varphi_i(\omega)\right|^p\right)^{1/p} \leq B_p\left[\int d\mu(\omega)\left(\sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i(\omega)|^2\right)^{p/2}\right]^{1/p}$$

$$\leq B_p\left[\sum_{i=1}^{i=n}\left(\int|\varphi_i|^p d\mu\right)^{2/p}\right]^{1/2}$$

cqfd.

Démonstration du théorème :

i) ⇒ ii) : par le théorème 3 car $l^p$ n'est pas hilbertisable.

ii) ⇒ iii) : par la proposition 2

iii) ⇒ iv) : En effet R considéré comme sous-espace de $L^2$ admet une base orthonormale (donc inconditionnelle) $(r_i)_{i\in I}$ ; comme R a la topologie de $L^2$, c'est aussi une base inconditionnelle de $R \subset L^p$. De plus, par la proposition 2, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall i \in I$, $r_i \in M^p_\varepsilon$.

iv) ⇒ i) : On peut supposer que $\|r_i\|_{L^p} = 1$ $\forall$ $i \in I$. On va montrer que $(r_i)_{i\in I}$ est équivalente à la base canonique de $l^2(I)$.

- Supposons d'abord que la famille $(\alpha_i r_i)_{i\in I}$ est sommable dans $L^p$, alors elle est a fortiori sommable dans $L^2$, donc par le théorème d'Orlicz $\sum_{i\in I} \|\alpha_i r_i\|^2_{L^2} < \infty$, d'où

$$\sum_{i\in I} |\alpha_i|^2 = \sum_{i\in I} \|\alpha_i r_i\|^2_{L^p} \leq \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{i\in I} \|\alpha_i r_i\|^2_{L^2} < \infty$$

- Réciproquement si $\sum_{i\in I} |\alpha_i|^2 < \infty$, alors $\sum_{i\in I} \|\alpha_i r_i\|^2_{L^p} < \infty$. On pose

$J = \{i\in I \mid \alpha_i \neq 0\}$, J est au plus dénombrable. Soit $\varphi$ une application injective de $\mathbb{N}$ dans I telle que $\varphi(\mathbb{N}) \supset J$. D'après le lemme 3, la suite $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{\varphi(k)} r_{\varphi(k)} \varepsilon_k(.)$ converge dans $L^p([0,1]dt, L^p)$, il existe donc une sous-suite convergeant dans $L^p$ pour presque tout t. Soit $t_o \in [0,1]$, tel que cette sous-suite converge ; par la continuité des formes linéaires $r_i^*$ sur $[r_i]$, la limite ne peut être que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\varphi(n)} r_{\varphi(n)} \varepsilon_n(t_o)$ ; enfin comme $(r_i)_{i\in I}$ est une base inconditionnelle de R, $(\varepsilon_n(t_o)\alpha_{\varphi(n)} r_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable dans $L^p$, donc $(\alpha_{\varphi(n)}\ r_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi et finalement $(\alpha_i r_i)_{i\in I}$ est sommable dans $L^p$. cqfd.

Remarques : 4 : i ⇔ ii est encore vrai si on suppose seulement que $\mu$ est $\sigma$-finie sur $(\Omega,\mathfrak{A})$.

5 : En montrant iv ⇒ i on a montré en fait que si $(r_i)_{i\in I}$ est une base inconditionnelle normalisée de $L^p(\ p > 2)$ $(r_i)_{i\in I}$ est équivalente à la base canonique de $l^2(I)$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $r_i \in M^p_\varepsilon$ $\forall$ $i \in I$. On en déduit le résultat classique de Bari et Gelfand :

<u>Corollaire 2</u> : Toutes les bases inconditionnelles normalisées d'un espace de Hilbert sont équivalentes.

<u>Démonstration</u> : On sait que si I et I' sont deux ensembles, $l^2(I)$ et $l^2(I')$ sont isomorphes si et seulement si I et I' sont équipotents. D'après la remarque 5, il suffit donc de plonger l'espace de Hilbert dans un espace $L^p$ de probabilité (avec $p > 2$) pour obtenir le résultat.

Le corollaire suivant généralise les inégalités de Khintchine.

<u>Corollaire 3</u> : Si $p > 2$, toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de v.a.r indépendantes et centrées appartenant à $L^p$, est équivalente à la base canonique de $l^2(I)$ si et seulement si :

$$\sup_{i\in I} \frac{\|f_i\|_p}{\|f_i\|_2} < \infty \qquad (\bullet)$$

(si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille équidistribuée , cette condition est évidemment réalisée).

<u>Démonstration</u> : En effet, on vérifie aisément (à l'aide des espérances conditionnelles) que $(f_i)_{i\in I}$ est basique inconditionnelle. La condition $(\bullet)$ ne fait qu'exprimer (cf. Prop. 2) que $\{f_i | i\in I\}$ est inclus dans $M^p_\varepsilon$ pour un $\varepsilon$ positif.

<u>Remarque 6</u> : Rosenthal dans [3] a étudié le sous-espace fermé engendré dans $L^p$ par une suite de v.a.r $(f_n)_{n\geq 1}$ indépendantes et centrées. Il y montre notamment que celui-ci ne dépend à une isomorphie près que de la suite des nombres $w_n = \dfrac{\|f_n\|_p}{\|f_n\|_2}$ .

<u>Proposition 7</u> : Soit $p > 2$, tout sous-espace hilbertisable de $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est complémenté dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, si $\mu$ est une mesure $\sigma$-finie sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de le montrer si $\mu$ est une probabilité. Soit R un sous-espace hilbertisable de $L^p$ ; soit j l'injection de $L^p$ dans $L^2$ ; on note k la restriction de $j^{-1}$ au sous-espace $j(R)$ de $L^2$. $k : j(R) \to L^p$

est continue puisque R a la topologie de $L^2$. Soit P la projection orthogonale de $L^2$ sur $j(R)$, l'opérateur $k P j$ de $L^p$ dans $L^p$ est une projection de $L^p$ sur R.

Prøblème [1] : Est-ce qu'un sous-espace hilbertisable de $L^p$ pour $1 < p < 2$ est nécessairement complémenté ? Rosenthal a montré ([4]) que cela était faux si $1 < p < \frac{4}{3}$, on ne connait pas de contre-exemple si $\frac{4}{3} \leqslant p < 2$.

Notons qu'un sous-espace hilbertisable complémenté de $L^1$ est nécessairement de dimension finie (par exemple parce que $\mathcal{L}(L^1,L^2) = \pi_o(L^1,L^2)$ comme on le verra plus tard).

Proposition 8 : Soit $S = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite basique normalisée dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, avec $p > 2$, équivalente à la base canonique de $l^p$ ; alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x_n | n\in\mathbb{N}\}$ n'est pas inclus dans $M_\varepsilon^p$.

Démonstration : En effet $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite basique inconditionnelle, il suffit donc d'appliquer la remarque 5.

Remarque 6 : Cette dernière proposition est une réciproque "forte" du théorème 3. Pour $1 \leq p < 2$, on peut démontrer en utilisant le lemme 7 de [2] qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p$ telle que pour tout $\delta > 0$, il existe une sous-suite basique $(1+\delta)$-équivalente à la base de $l^p$, ne peut être incluse dans $M_\varepsilon^p$ quand $\varepsilon$ est positif. Ce qui est exactement la réciproque du théorème 3 quand $1 \leq p < 2$.

## § 3 SOUS-ESPACES REFLEXIFS DE $L^1$

Théorème 5 : Soit R un sous-espace fermé de $L^1$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) R est réflexif

ii) R est de type 1.

iii) R ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1$.

iv) R ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1$ et complémenté dans $L^1$.

<u>Démonstration</u> : L'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ iv) est contenue dans la proposition 4. De plus i) $\Rightarrow$ iii) est évident. Il suffit donc de montrer qu'un sous-espace fermé non réflexif R de $L^1$ contient une suite basique équivalente à la base canonique de $l^1$.

<u>Lemme 4</u> : Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $l^1$, soit $(k_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ et $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes d'entiers. On pose $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ :

$$z_\nu = \sum_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} (e_{n_{2i}} - e_{n_{2i+1}})$$

avec $a_i^{(\nu)} \geq 0$ pour $k_\nu < i \leq k_{\nu+1}$ et $\sum_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} = 1$.

Alors $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est une suite basique dans $l^1$, équivalente à $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\|z_\nu^*\| = \frac{1}{2}$ pour tout entier $\nu$.

<u>Démonstration du lemme</u> : C'est évident car

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{\nu=m} t_\nu z_\nu\right\|_{l^1} = 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=m} |t_\nu| .$$

Soit S la sphère unité de R, dire que R n'est pas réflexif équivaut à dire que S n'est pas équi-intégrable dans $L^1$ (critère de compacité de Dunford-Pettis). On suppose donc que :

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{x\in S} \int_{\{|x|>a\}} |x|\ d\mu = \delta > 0.$$

Donc, il existe une suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante, tendant vers l'infini, telle que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \quad \delta - \frac{\delta}{2n} < \sup_{x\in S} \int_{\{|x|>a_n\}} |x|\,dP < \delta + \frac{\delta}{2n} \qquad (*)$$

d'où une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S telle que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : \quad \delta - \frac{\delta}{2n} < \int_{\{|x_n|>a_n\}} |x_n|\ dP < \delta + \frac{\delta}{2n} \qquad (**)$$

On pose : $\hat{x}_n = x_n 1_{\{|x_n|>a_n\}}$ , $\bar{x}_n = x_n - \hat{x}_n$ .

. On a : $\forall\ \varepsilon > 0,\ m\{|\hat{x}_n| \geq \varepsilon\|\hat{x}_n\|\} \leq m\{|\hat{x}_n| \geq 0\} \leq m\{|x_n| > a_n\} \leq \frac{1}{a_n}$ et comme $\frac{1}{a_n} \to 0$ si $n \to \infty$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \not\subset M^p_\varepsilon$.

On peut donc (théorème 3) extraire de $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(\hat{x}_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, basique, équivalente à la base canonique de $l^1$ puisque, d'après (**), $\frac{\delta}{2} \leq \|x_{n_i}\| \leq \frac{3\delta}{2}$.

. La suite $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable car : si $\bar{S} = \{\bar{x}_n | n\in\mathbb{N}\}$

$$\sup_{x\in\bar{S}} \int_{\{|x|>a_n\}} |x|\,dP = \sup_{p>n} \int_{\{|\bar{x}_p|>a_n\}} |\bar{x}_p|\,d\mu = \sup_{p>n} \left( \int_{\{|x_p|>a_n\}} |x_p|\,d\mu - \int_{\{|x_p|>a_p\}} |x_p|\,d\mu \right)$$

$$\leq \sup_{p>n} \left[\delta + \frac{\delta}{2n} - \left(\delta - \frac{\delta}{2p}\right)\right] \leq \frac{\delta}{n} \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Donc on peut extraire de $(\bar{x}_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite notée $\bar{x}_{n_k}$ qui converge faiblement, donc telle que $(\bar{x}_{n_{2k}} - \bar{x}_{n_{2k+1}})$ converge faiblement vers 0.

L'enveloppe convexe de cette dernière suite adhère fortement à 0. Il existe donc une suite croissante d'entiers $(k_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ et des nombres positifs $(a_i^{(\nu)})_{k_\nu<i\leq k_{\nu+1}}$ avec $\sum_{k_\nu<i\leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} = 1$ tels que si

$$z_\nu = \sum_{k_\nu<i\leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} (x_{n_{2i}} - x_{n_{2i+1}}) \quad \text{on a } \lim_{\nu\to\infty} \|z_\nu - \hat{z}_\nu\| = \lim_{\nu\to\infty} \|\bar{z}_\nu\| = 0 \text{ avec :}$$

$$\hat{z}_\nu = \sum_{k_\nu<i\leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} (\hat{x}_{n_{2i}} - \hat{x}_{n_{2i+1}}) \quad \text{et } \bar{z}_\nu = z_\nu - \hat{z}_\nu \ ;$$

d'après le lemme 4, il est clair que $(\hat{z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est une suite basique équivalente à la base canonique de $l^1$ et que l'on peut en fait choisir $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|\hat{z}^*_\nu\|\ \|\bar{z}_\nu\| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|\hat{z}^*_\nu\|\ \|z_\nu - \hat{z}_\nu\| < 1 .$$

La suite $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est alors (théorème 1) équivalente à $(\hat{z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. On a donc obtenu une suite basique dans R équivalente à la base canonique de $l^1$.

cqfd.

A l'aide de ce dernier théorème, on démontrera plus tard (cf. [2]) des résultats beaucoup plus précis sur les sous-espaces réflexifs de $L^1$.

---

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Kadec, A. Pelcynski : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space $L_p$. Studia Math. XXI, (1962), p. 161-176.

[2] H. P. Rosenthal : On subspaces of $L^p$. (A paraître).

[3] H. P. Rosenthal : On the subspaces of $L^p$ $(p>2)$ spanned by sequences of independent random variables. Israel J. Math. 8. 1970. p.273-303.

[4] H. P. Rosenthal : Projections onto translation invariant subspaces of $L^p(G)$. Mem. A. M. S. 63 (1966.

[5] L. Schwartz : Séminaire Schwartz 1969-70, exposé XXVI.

---