Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. T. Lapresté

Idéaux d'opérateurs. Adjonction

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 13, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A12_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

IDEAUX D'OPERATEURS
ADJONCTION

par J. T. LAPRESTÉ

Exposé N° XIII   7 Février 1973

§ 1. IDEAUX NORMES. OPERATEURS r-s-NUCLEAIRES

1.1 Suivant A. Pietsch, nous appellerons idéal d'opérateurs une sous-classe $\mathcal{A}$ de la classe $\mathcal{L}$ des applications linéaires entre espaces de Banach, qui contienne la classe $\mathfrak{F}$ des opérateurs de rang fini et telle que chacun des ensembles $\mathcal{A}(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{A}$ satisfasse aux conditions suivantes :

(i) si $S \in \mathcal{A}(E,F)$, $T \in \mathcal{A}(E,F)$ alors $S + T \in \mathcal{A}(E,F)$

(ii) si $S \in \mathcal{A}(E,F)$, $R \in \mathcal{L}(G,E)$, $T \in \mathcal{L}(F,H)$ alors $T \circ S \circ R \in \mathcal{A}(G,H)$

1.2 Si de plus on a défini sur $\mathcal{A}$ une fonctionnelle α vérifiant les conditions :

(N,0) si $\eta \in E'$ et $y \in F$ alors $\alpha(\eta \otimes y) = \|\eta\| \, \|y\|$

(N,1) la restriction de α à chacun des ensembles (en fait des espaces vectoriels) $\mathcal{A}(E,F)$ est une norme, (N,2) si $S \in \mathcal{A}(E,F)$, $R \in \mathcal{L}(G,E)$, $T \in \mathcal{L}(F,H)$ alors $\alpha(T \circ S \circ R) \leq \|T\| \, \alpha(S) \, \|R\|$, on dit que le couple $(\mathcal{A},\alpha)$ est un idéal normé. Si chacun des espaces $\mathcal{A}(E,F)$ est α-complet, l'idéal est dit complet. Voici des exemples fondamentaux:

1.3 i) $(\mathcal{L}, \| \ \|)$; $(\mathcal{K}, \| \ \|)$ où $\mathcal{K}$ est la classe des opérateurs compacts et $\| \ \|$ la norme usuelle des opérateurs

ii) (Π_p, π_p) (introduit à l'exposé II) si $p \geq 1$

iii) $(\mathcal{N}_p, \nu_p)$ idéal des opérateurs p-nucléaires (cf. définition 2.5, exposé III) si $p \geq 1$

sont des idéaux normés complets.

Introduisons à présent une famille généralisant les opérateurs p-nucléaires :

1.4 On dit qu'un opérateur T de E dans F est (r,s)-nucléaire (où (r,s) est un élément de $\overline{\mathbb{R}}_+^2$) s'il existe une suite $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires et deux suites $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs respectivement dans E' et F telles que les relations

$$\|\lambda\|_p < +\infty \quad (\lambda \in c_o \text{ si } p = +\infty)$$

$$\|\eta\|_r^* < +\infty$$

$$\|y\|_s^* < +\infty \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

soient vérifiées et que pour tout vecteur x de E on ait

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \eta_n \rangle y_n \qquad (1)$$

Il est facile de montrer que la classe $\mathcal{N}_{r,s}$ des opérateurs (r,s)-nucléaires est un idéal normé complet pour la norme

$$\nu_{r,s}(T) = \inf \{ \|\lambda\|_p . \|\eta\|_r^* \|y\|_s^* ; T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \eta_n \otimes y_n \}$$

Cet idéal se rattache à la factorisation à travers les espaces l_p par le biais suivant :

1.5 <u>Théorème</u> : Il est équivalent de dire que T est (r,s)-nucléaire de E dans F, ou qu'il admet la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad T \quad} & F \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle B} \\ l_r & \xrightarrow[\quad M_\lambda \quad]{} & l'_s \end{array}$$

où A et B sont des opérateurs continus et M_λ est la multiplication par une suite $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l_p (c_o si $p = +\infty$).

De plus on a l'égalité :

$$(*) \qquad \nu_{r,s}(T) = \inf\{ \|A\| \; \|M_\lambda\| \; \|{}^tB\| ; B \circ M_\lambda \circ A = T \}$$

▲ remarquons immédiatement que l'hypothèse $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ impose que p,r et s soient tous trois supérieurs ou égaux à 1 et que $l'_s \simeq l_{s'}$

① soit donc $T \in \mathcal{N}_{r,s}(E,F)$. Par définition il peut s'écrire $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \eta_n \otimes y_n$, comme dans 1.4 avec de plus

$$\|\lambda\|_p \; \|\eta\|_r^* \; \|y\|_s^* \leq \nu_{r,s}(T) + \varepsilon$$

Considérons alors les opérateurs

$A \; : \; E \longrightarrow l_r \; : \; x \longmapsto (\langle x, \eta_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$

$M_\lambda \; : \; l_r \longrightarrow l_{s'} \; : \; (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (\lambda_n \xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

${}^tB \; : \; F' \longrightarrow l_s \; : \; \zeta \longmapsto (\langle y_n, \zeta \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$

il est facile de voir que l'on a

$$T = B \circ M_\lambda \circ A$$

et que

$$\|A\| = \|\eta\|_r^* \; ; \qquad \|{}^tB\| = \|B\| = \|y\|_s^*$$

$$\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_p$$

c'est-à-dire

(*)' $$\|A\| \, \|M_\lambda\| \, \|{}^tB\| \leq \nu_{r,s}(T) + \varepsilon$$

② Réciproquement si $T = B \circ M_\lambda \circ A$ et si (*)' est vérifiée, on constate aisément que les suites λ, $\eta = ({}^tA(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (B(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) satisfont les conditions de 1.4 et l'inégalité (*). ▼

1.6 ① On peut remarquer que l'idéal des opérateurs p-nucléaires se retrouve pour $r = +\infty$, $s = p'$.

② Dans un certain sens l'opérateur M_λ est le prototype des opérateurs (r,s)-nucléaires et on voit que $\|M_\lambda\| = \nu_{r,s}(M_\lambda)$.

§ 2. ADJONCTION DES IDEAUX NORMES

2.1 A chaque idéal normé $(\mathcal{A},\alpha)$, on peut associer une autre sous-classe de $\mathcal{L}$, notée $\mathcal{A}^*$ et définie de la manière suivante : l'opérateur T appartient à $\mathcal{A}^*(E,F)$ si et seulement si pour chaque diagramme

(non commutatif!)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & F \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[u, "g"] & Y \arrow[l, "u"] \end{tikzcd}$$

où X et Y sont des espaces de Banach de dimension finie et g, u, h des opérateurs (continus) on a

$$^{\blacklozenge}\ |\mathrm{trace}(uhTg)| \leq \rho(T)\ \|h\|\ \|g\|\alpha(u) \qquad (1)$$

Il n'est pas très difficile de montrer que si l'on pose par définition que $\alpha^*(T)$ est la borne inférieure des $\rho(T)$ qui vérifient l'inégalité (1), $(\mathcal{A}^*,\alpha^*)$ est un idéal normé complet .

2.2 Donnons quelques définitions concernant les idéaux ;

① on dit qu'un idéal $(\mathcal{A},\alpha)$ est parfait si l'on a $(\mathcal{A},\alpha) = (\mathcal{A}^{**},\alpha^{**})$

② on dit qu'un idéal est maximal si la condition : "pour tous couples X,Y d'espaces de dimension finie et A, B d'opérateurs avec $B \in \mathcal{L}(F,Y)$; $A \in \mathcal{L}(X,E)$ on a $\alpha(B\,T\,A) \leq \rho\|B\|\ \|A\|$" implique $T \in \mathcal{A}(E,F)$ et $\alpha(T) \leq \rho$.

On a le théorème suivant :

2.3 <u>Théorème</u> : il est équivalent de dire si $(\mathcal{A},\alpha)$ est un idéal normé :

i) il existe un idéal $(\mathfrak{B},\beta)$ avec $(\mathcal{A},\alpha) = (\mathfrak{B}^*\beta^*)$

ii) $(\mathcal{A},\alpha)$ est parfait

iii) $(\mathcal{A},\alpha)$ est maximal.

ii) $\Rightarrow$ i) est trivial en prenant $(\mathfrak{B},\beta) = (\mathcal{A}^*,\alpha^*)$

i) $\Rightarrow$ iii). Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que pour tous couples X,Y d'espaces de

---

♦ trace de l'endomorphisme uhTg appartenant à $\mathcal{L}(X,X)$.

dimension finie et A, B d'opérateurs avec $B \in \mathcal{L}(F,Y)$ et $A \in \mathcal{L}(X,E)$, on ait :

$$\alpha(B\,T\,A) = \beta^{*}(B\,T\,A) \leq \rho\|B\|\ \|A\|$$

Nous devons montrer qu'alors $T \in \mathfrak{A}(E,F) = \mathfrak{B}^{*}(E,F)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}|\text{trace } (u\,BTA)| &\leq \beta^{*}(B\,T\,A)\ \beta(u)\ \|I_X\|\ \|I_Y\| \\ &\leq \rho\|B\|\ \|A\|\beta(u)\end{aligned}$$

soit $T \in \mathfrak{B}^{*}(E,F)$ et $\beta^{*}(T) \leq \rho$

iii) ⇒ ii) Nous allons pour cela démontrer les lemmes suivants :

2.4 <u>Lemme</u> : Si $(\mathfrak{A},\alpha)$ est un idéal maximal, pour que $\mathfrak{A}$ soit parfait il suffit que pour tout opérateur T entre espaces de Banach de dimension finies on ait $\alpha(T) = \alpha^{**}(T)$

▲ En effet, soit $T \in \mathfrak{A}^{**}(E,F)$ on a dans les hypothèses de 2.2 ②

$$\alpha(B\,T\,A) = \alpha^{**}(B\,T\,A) \leq \alpha^{**}(T)\ \|B\|\ \|A\|$$

donc $T \in \mathfrak{A}(E,F)$ puisque $\mathfrak{A}$ est maximal ; la réciproque est immédiate. ▼

2.5 <u>Lemme</u> : Si E et F sont de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on a $\alpha(T) = \alpha^{**}(T)$.

▲ Par le théorème de Hahn-Banach on peut trouver sur $\mathcal{L}(E,F)$ une forme linéaire S telle que pour un opérateur fixé T_o on ait

$$\langle T_o, S\rangle = \alpha(T_o)$$

et $$|\langle T,S\rangle| \leq \alpha(T) \quad \text{pour } T \in \mathcal{L}(E,F).$$

En particulier comme pour chaque couple $(\eta, y) \in E' \times F$ on a

$$|\langle \eta\otimes y, S\rangle| \leq \|\eta\|\ \|y\|$$

S définit un opérateur linéaire continu $\hat{S} \in \mathcal{L}(F,E)$ par

$$<\hat{S}y, \eta> = <\eta \otimes y, S> \quad ♦$$

A présent soient T, B, A comme dans 2.2 2 on a

$$\begin{aligned} |\text{trace } (TA\hat{S}B)| = |\text{trace } (BTA, \hat{S})| = |<BTA,S>| &\leq \alpha(BTA) \\ &\leq \alpha(T)\|B\| \, \|A\| \end{aligned}$$

et donc $\alpha^*(\hat{S}) \leq 1$, de plus $\alpha(T_o) = <T_o, S>$

$$\begin{aligned} &= \text{trace } (T_o I_E \hat{S} I_F) \\ &\leq \alpha^{**}(T_o) \, \alpha^*(\hat{S}) \, \|I_E\| \, \|I_F\| \end{aligned}$$

soit $\alpha(T_o) \leq \alpha^{**}(T_o)$.

La réciproque est évidente. ▼

§ 3. L'ADJOINT DE $(\mathcal{N}_{r,s}, \nu_{r,s})$

3.1 Supposons que $T \in \mathcal{N}^*_{r,s}(E,F)$ et considérons le diagramme conforme à 2.1, où l'on a particularisé X, Y et u.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & F \arrow[d, "B"] \\ l^n_{s'} \arrow[u, "A"] & l^n_r \arrow[l, "M_\lambda"] \end{tikzcd}$$

Soient donc ${}^tA : E' \longrightarrow l^n_s : x \longmapsto (<x\, \eta_i>)_{i \leq n}$

$M_\lambda : l^n_r \longrightarrow l^n_{s'} : (\xi_i)_{i\leq n} \longmapsto (\lambda_i \xi_i)_{i \leq n}$

$B : F \longrightarrow l^n_r : l^n_r : \zeta \longmapsto (<\zeta b_i>)_{i \leq n}$

♦ On a donc pour tout $T \in \mathcal{F}(E,F)$:

$$<T,S> = \text{Trace } T\hat{S}$$

on peut écrire alors

$$T\,A\,M_\lambda B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, b_i \otimes T\eta_i$$

soit

$$|\mathrm{trace}\,(B\,T\,A\,M_\lambda)| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i <T\eta_i, b_i>\Big|$$

$$\leq \nu^*_{r,s}(T)\,\nu_{r,s}(M_\lambda)\,\|B\|\;\|A\|$$

$$\leq \nu^*_{r,s}(T)\;\|\lambda\|_p\;\|b\|^*_s\;\|\eta\|^*_r$$

d'après la proposition 1.7, ou de manière équivalente puisque λ est une suite arbitraire de n scalaires :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |<T\eta_i, b_i>|^{p'}\Big)^{1/p'} \leq \nu^*_{r,s}(T)\,\|b\|^*_s\;\|\eta\|^*_r$$

ce qui nous amène à la définition :

3.2 <u>Définition</u>: Un opérateur linéaire continu de E dans F est dit (p,r,s)-absolument sommant, s'il existe une constante $\rho(T)$ ne dépendant que de T telle que pour tout entier naturel n et pour toutes familles finies $(x_i)_{i\leq n}$; $(\eta_i)_{i\leq n}$ de vecteurs respectivement dans E et F' on ait

$$\|<T\,x, \eta>\|_p \leq \rho(T)\,\|x\|^*_r\;\|\eta\|^*_s \qquad (1)$$

et on note alors $T \in \pi_{p,r,s}(E,F)$

et au théorème

3.3 <u>Théorème</u> : ① $\pi_{p,r,s}$ est un idéal d'opérateurs normé pour la norme $\pi_{p,r,s}(T) = \inf\{\rho(T) ;\ (1) \text{ est valide}\}$ dès que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p} \leq 1$

② On a $(\pi_{p,s,r}, \pi_{p,r,s}) = (\mathcal{N}^*_{r,s}\ \nu^*_{r,s})$, lorsque $\frac{1}{p} = \frac{1}{s} + \frac{1}{r} \leq 1$.

▲ ① se démontre de manière standard par vérification tatillonne ; en ce qui concerne ② on a déjà montré en 3.1 que l'on a $\mathcal{N}^*_{p,s} \subset \pi_{p,s,r}$ et $\pi_{p,s,r} \leq \nu^*_{r,s}$. Réciproquement soit $T \in \pi_{p,s,r}(E,F)$ considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & F \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[u, "g"] & Y \arrow[l, "u"] \end{tikzcd}$$

conforme à 2.1; comme X,Y sont de dimension finie, on peut alors écrire

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^o \, b_i^o \otimes \eta_i^o$$

et même choisir λ^o, b^o et η^o en sorte que $\|\lambda^o\|_p \, \|b^o\|_s^* \, \|\eta\|_r^* \leq \nu_{r,s}(u) + \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} |\text{trace } (u\,h\,T\,g)| &= |\sum_i \lambda_i^o \langle h\,T\,g\,\eta_i^o, b_i^o\rangle| \\ &\leq \|\lambda^o\|_p \, \pi_{p,s,r}(T) \|h\| \, \|g\| \, \|\eta^o\|_r^* \, \|b^o\|_s^* \\ &\leq (\nu_{r,s}(u) + \varepsilon) \pi_{p,s,r}(T) \, \|h\| \, \|g\| \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ▼

3.4 Une simple application du théorème de Hahn Banach et le fait que $\| \ \|_\infty^* = \| \ \|_\infty$ permet de voir que $(\pi_{p,p,\infty}, \pi_{p,p,\infty}) = (\pi_p, \pi_p)$.

3.5 A. Pietsch a montré que l'adjoint de (π_p, π_p) est l'idéal des opérateurs p'-intégraux dans le sens que $T \in \mathcal{J}_{p'}(E,F)$ si et seulement si il admet la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[drr, "T"'] & L^\infty \arrow[r, hook, "i"] & L^{p'} \arrow[r, "B"] & F'' \\ & & F \arrow[ur, hook, "B_F"'] & \end{tikzcd}$$

De manière analogue, introduisons la définition suivante:

3.6 Définition : On dit qu'un opérateur T de E dans F est factorisable de type (r,s) ($\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leq 1$) s'il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ tel que l'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[drrr, "T"'] & L^r(\Omega, \mathcal{C}, \mu) \arrow[r, "M_\varphi"] & L^{s'}(\Omega, \mathcal{C}, \mu) \arrow[r, "B"] & F'' \\ & & & F \arrow[u, "B_F"'] \end{tikzcd} \qquad (2)$$

où A,B sont des opérateurs continus, M_φ l'opérateur de multiplication par une fonction $\varphi \in L^p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, et B_F l'injection canonique de F dans F''.

On montre "facilement" que la classe des tels opérateurs notée $\Gamma_{r,s}$ constitue un idéal normé pour la norme $\gamma_{r,s}(T) = \inf(\|A\|\ \|B\|\ \|M_\varphi\|)$, l'inf étant pris sur l'ensemble des représentations de T.

3.7 Dans le cas $s' < r$, on voit facilement que la factorisation (2) est équivalente à la suivante :

$$E \xrightarrow{A_1} L^r(\Omega, \mathcal{C}, \nu) \xrightarrow{i} L^{s'}(\Omega, \mathcal{C}, \nu) \xrightarrow{B_1} F''$$

où ν est une probabilité, et i l'injection canonique. (On remplace μ par $\nu = |\varphi|^p \mu$, et on modifie A et B convenablement).

3.8 Proposition : ① Soit T un opérateur continu de E dans F alors si $T \in \mathcal{N}_{r,s}(E,F)$ on a $T \in \Gamma_{r,s}(E,F)$ et $\nu_{r,s}(T) \geq \gamma_{r,s}(T)$

② Si E et F' possèdent la propriété d'approximation métrique, si T est un opérateur de rang fini de E dans F on a $\nu_{r,s}(T) = \gamma_{r,s}(T)$.

① est trivial, ② se démontre par approximation pas à pas. On pourra la trouver dans le cas particulier des opérateurs p-intégraux dans [1].

3.9 Corollaire : ① Si E' et F possèdent la propriété d'approximation métrique, on a pour tout opérateur T de $\mathcal{N}_{r,s}(E,F)$

$$\nu_{r,s}(T) = \gamma_{r,s}(T)$$

② On a $(\Gamma^*_{r,s}, \gamma^*_{r,s}) = (\pi_{s,r}, \pi_{s,r})$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Pietsch et A. Persson : Studia Math. 33 (1969) p. 19-62.
