

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

JACQUELINE MARTIN

Une caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 8, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A8_0

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDiciS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

UNE CARACTERISATION DES OPERATEURS DE HILBERT - SCHMIDT

par Jacqueline MARTIN

Cet exposé reprend, pour l'essentiel, les résultats développés par A. Pelczynski dans [1]. Le résultat fondamental est le suivant :

H_1 et H_2 étant deux espaces de Hilbert, la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2 coïncide avec la classe des opérateurs p sommants, où p est fixé $0 < p < +\infty$.

DEFINITIONS. Soit $T : H_1 \rightarrow H_2$, opérateur de H_1 dans H_2 .

1) T est un opérateur de Hilbert-Schmidt (noté $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$) si et seulement si, pour une base orthonormale (ou, ce qui est équivalent, pour toute base orthonormale) $(e_i)_{i \in I}$ de H_1

$$\sum_{i \in I} \|T e_i\|^2 < +\infty$$

2) T est p -sommant (noté $T \in \pi_p(H_1, H_2)$) si et seulement si il existe C constante positive, telle que, pour toute famille finie $(x_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$, k quelconque,

$$\left(\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{\|a\|=1} \left(\sum_{i=1}^k |\langle x_i, a \rangle|^p \right)^{1/p}$$

Le résultat fondamental s'écrit : $\mathfrak{S}_2(H_1, H_2) = \pi_p(H_1, H_2)$.

Le cas $p = 1$ a été étudié par Pietsch [2]. Dans un article plus récent [3] Pietsch l'établit pour $1 < p < 2$ et en déduit que, pour $1 \leq p < +\infty$ $\mathfrak{S}_2(H_1, H_2) \subset \pi_p(H_1, H_2)$.

Néanmoins, le résultat sera complètement établi dans cet exposé, et pour $0 < p < +\infty$.

RESULTATS PRELIMINAIRES.

1) Soient E et F, deux espaces de Banach, E étant supposé réflexif ; soit $0 < p < +\infty$, et T un opérateur linéaire, p-sommant de E dans F. Alors T est compact.

E étant réflexif, toute boule de centre 0, fermée, est compacte dans la topologie affaiblie de E. Soit x_n une suite telle que, pour tout n : $\|x_n\|_E \leq a$. On peut extraire (x_{n_k}) convergeant faiblement dans E ; c'est-à-dire que :

$$\forall x' \in E' \quad \langle x_{n_k}, x' \rangle \rightarrow \langle u, x' \rangle$$

$$\text{donc} \quad \|u\|_E \leq a \quad \text{et} \quad \|x_{n_k} - u\|_E \leq 2a .$$

T étant p-sommant transforme la suite faiblement convergeante (x_{n_k}) en une suite fortement convergente dans F : (Tx_{n_k}) ; en effet :

$$\exists \mu \text{ et } \rho \text{ tels que : } \|Tx_{n_k} - u\|_F \leq \rho \left(\int_{\varepsilon'} |\langle x_{n_k} - u, x' \rangle|^p d\mu(x') \right)^{1/p}$$

(ε' est la boule unité de E' ; voir Pietsch [3]).

Ceci prouve que l'opérateur T est compact.

Corollaire : Soit $T \in \pi_p(H_1, H_2)$, alors T est compact.

2) Soit T compact de H_1 dans H_2 , alors il existe une base orthonormale de H_1 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f'_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que : $Tf_n = \lambda_n g_n$ avec $\lambda_n > 0$,

$\lambda_n \rightarrow 0$, g_n suite orthonormale de H_2 , et $Tf'_\alpha = 0$.

Considérons l'opérateur $A = T^*T$; A est compact et symétrique ; l'analyse spectrale nous permet d'affirmer qu'il existe une base orthonormale $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f'_\alpha)_{\alpha \in A}$ de H_1 , des scalaires positifs ρ_n , tels que

$$\begin{cases} Af_n = \rho_n f_n & \text{avec } \rho_n \rightarrow 0 \\ Af'_\alpha = 0 \end{cases}$$

Posons $Tf_n = \lambda_n g_n$

$$\langle Tf_n, Tf_m \rangle = \langle Af_n, f_m \rangle = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

$$\langle Tf_n, Tf_n \rangle = \langle Af_n, f_n \rangle = \rho_n = \lambda_n^2 \quad \text{d'où la définition de } \lambda_n ;$$

g_n est bien une suite orthonormale dans H_2 .

$$\langle Tf'_\alpha, Tf'_\alpha \rangle = \langle Af'_\alpha, f'_\alpha \rangle = 0 \quad \text{d'où } Tf'_\alpha = 0$$

Remarques : 1. Nous remarquons que seule nous servira la partie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la base de H_1 , $(f'_\alpha)_{\alpha \in A}$ étant une base du noyau de T .

2. $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$: T est compact ; le résultat ci-dessus est valable et nous avons : $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^2 < \infty$.

3) Définition des fonctions de Rademacher.

Soit $n = 1, 2, 3, \dots$

$$t \in [0, 1]$$

On définit la $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher par :

$$r_n(t) = \begin{cases} (-1)^k & \text{pour } \frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{pour } t = \frac{k}{2^n} \text{ et pour } t = 1 \\ \text{avec } k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1 \end{cases}$$

4) Inégalité de Khintchine _{∞}

Soit $a_n \in \mathbb{C}$ et $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t)$ où $r_n(t)$ est la $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher ; $f(t)$ est la série de Rademacher de coefficients a_n .

Théorème : Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, la fonction $f(t) \in L^r(0, 1)$, $0 < r < \infty$

et l'on a :

$$A_r \| (a_n) \|_2 \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^r dt \right)^{1/r} \leq B_r \| (a_n) \|_2$$

A_r et B_r étant des constantes, positives, finies, ne dépendant que de r .
 (Cf. Zygmund : Trigonometric series, Vol. I p. 212, §8)

Remarque : De ce résultat, on déduit que g et h sont continues pour les topologies des normes :

$$(l^2) \xrightarrow{g} S \subset L^r ; \quad S \subset L^r \xrightarrow{h} (l^2)$$

telles que $(a_n) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t) ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t) \rightarrow (a_n)$

$$S = \{ \text{séries de Rademacher de coeff. dans } (l^2) \}$$

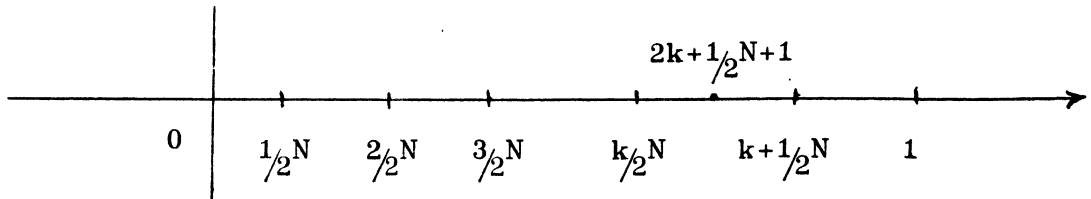
$$\underline{\pi_p(H_1, H_2) \subset \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)}$$

Soit $T \in \pi_p(H_1, H_2)$; soit f_n, λ_n, g_n (Cf. 2) préliminaires).
 Pour montrer que $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$, nous allons utiliser une famille finie, particulière, (x_k) , d'éléments de H_1 , soit :

$$x_k = \sum_{n=1}^N r_n^k f_n \quad \text{avec} \quad r_n^k = r_n\left(\frac{2k+1}{2^{N+1}}\right)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$$



On remarque que

$$r_n^k = r_n(t)$$

pour $\frac{k}{2^N} < t < \frac{k+1}{2^N}$ et $n \leq N$ (*)

Les x_k sont les sommets du "cube" unité du sous-espace de H_1 engendré par la famille orthonormale f_1, f_2, \dots, f_N .

En vertu de 2) des préliminaires

$$\|Tx_k\| = \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \right)^{1/2}$$

d'où

$$\left(\sum_{k=0}^{2^N-1} \|Tx_k\|^p \right)^{1/p} = 2^{N/p} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \right)^{1/2}$$

D'autre part, soit $a \in H_1$

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a, f_i \rangle f_i + \sum_{\alpha \in A} \langle a, f'_\alpha \rangle f'_\alpha$$

$$|\langle x_k, a \rangle|^p = \left| \sum_{n=1}^N r_n^k \overline{\langle a, f_n \rangle} \right|^p = 2^N \int_{\frac{k}{2^N}}^{\frac{k+1}{2^N}} \left| \sum_{n=1}^N r_n(t) \overline{\langle a, f_n \rangle} \right|^p dt, \text{ car } (*)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{2^N-1} |\langle x_k, a \rangle|^p \right)^{1/p} = 2^{N/p} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N r_n(t) \overline{\langle a, f_n \rangle} \right|^p dt \right)^{1/p}$$

D'après l'inégalité de Khintchine

$$\left(\sum_{k=0}^{2^N-1} |\langle x_k, a \rangle|^p \right)^{1/p} \leq 2^{N/p} B_p \left(\sum_{n=1}^N |\langle a, f_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq 2^{N/p} B_p \|a\|$$

B_p , constante ne dépendant que de p .

T étant p -sommant, il existe C tel que :

$$2^{N/p} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \right)^{1/2} \leq C \sup_{\|a\|=1} \left(\sum_{k=1}^{2^N-1} |\langle x_k, a \rangle|^p \right)^{1/p} \leq C B_p 2^{N/p}$$

Donc

$$\left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \right)^{1/2} \leq C B_p \text{ ceci quel que soit } N,$$

$$\text{d'où} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

$T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$.

$\mathfrak{S}_2(H_1, H_2) \subset \pi_p(H_1, H_2)$

Soit $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$; soit f_n, λ_n, g_n (Cf. 2) préliminaires)

$$Tf_n = \lambda_n g_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$$

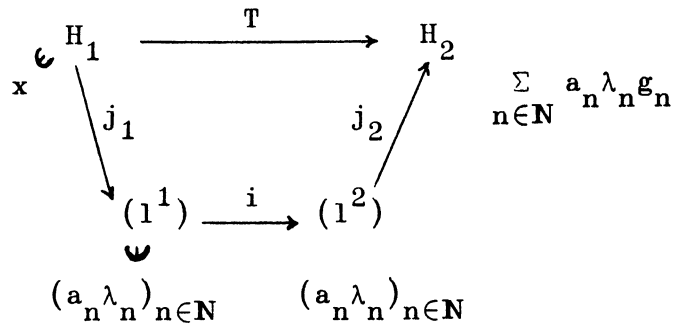
$$Tf'_\alpha = 0$$

Soit $x \in H_1$:

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n + \sum_{\alpha \in A} a_\alpha f'_\alpha$$

$$Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \lambda_n g_n \quad \text{avec} \quad a_n = \langle x, f_n \rangle$$

Décomposons T de la façon suivante :

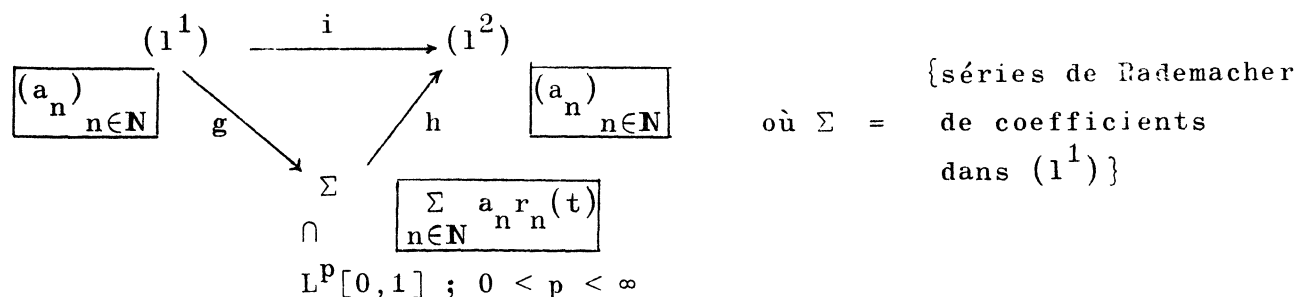


- $(a_n \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient bien à l^1 car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à (l^2)
- i est l'injection canonique de (l^1) dans (l^2) ; i est p-sommante
- j_1 est continue car $\|(a_n \lambda_n)\|_{1,1} \leq \|(a_n)\|_{1,2} \|(\lambda_n)\|_{1,2}$
 et $\|(\lambda_n)\|_{1,2} < \infty$; $\|(a_n)\|_{1,2} = \|x\|_{H_1}$
- j_2 est une isométrie de (l^2) dans H_2

Donc T est p-sommante ; $T \in \pi_p(H_1, H_2)$.

$(l^1) \xrightarrow{i} (l^2)$: i est p -sommante $0 < p < +\infty$

En effet, on factorise i de la façon suivante :



La remarque de 4) préliminaires, nous dit que g et h sont continues, g étant continue, il existe $x'_t \in L^{p'}(0,1)$ tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r_n(t) = \langle a, x'_t \rangle$$

$$\text{où } a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (l^1)$$

L'inégalité de Khintchine s'écrit ($a \in l^1$, donc $a \in l^2$ et le théorème est valable)

$$A_p \|ia\|_{l^2} \leq \left(\int_0^1 |\langle a, x'_t \rangle|^p dt \right)^{1/p}$$

Soit i est p -sommante $0 < p < 1$ d'après l'inégalité de Pietsch [3].

Références

- [1] A. Pelczynski (Warszawa) : A characterisation of Hilbert-Schmidt operators - Studia Mathematica T. XXVIII (1967) (p. 355-360).
- [2] A. Pietsch, Nukleare lokalkonvexe Räume - Berlin 1965.
- [3] A. Pietsch, Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Mathematica 28(1967) (p. 333-353).